Analiza - klasa 3a Zestaw 5. 7.11.2023

Wielomiany IV

Niech $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n \neq 0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych.

I twierdzenie o pierwiastkach wymiernych. Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze, jest pierwiastkiem wielomianu f, to $p \mid a_0$ oraz $q \mid a_n$.

Wniosek. Każdy wymierny pierwiastek unormowanego wielomianu o współczynnikach całkowitych jest liczbą całkowitą.

II twierdzenie o pierwiastkach wymiernych. Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze, jest pierwiastkiem wielomianu f i b jest liczbą całkowitą taką, że $f(b) \neq 0$, to $p - bq \mid f(b)$.

Definicja. Mówimy, że wielomian $p \in \mathbb{K}[x]$ (gdzie $\mathbb{K} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) jest rozkładalny w $\mathbb{K}[x]$ (nad $\mathbb{K}$), jeżeli istnieją wielomiany $q, r \in \mathbb{K}[x]$ dodatnich stopni takie, że $p = q \cdot r$.

Kryterium Eisensteina nierozkładalności wielomianów w $\mathbb{Z}[x]$. Dany jest wielomian $f \in \mathbb{Z}[x]$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ i $a_n \neq 0$. Załóżmy, że istnieje liczba pierwsza p taka, że

$$p \nmid a_n, \qquad p \mid a_k \text{ dla } k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \text{oraz} \quad p^2 \nmid a_0.$$

Wówczas wielomian f nie jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

---

1. Wartości $w(0)$ i $w(1)$ wielomianu w stopnia 3 o współczynnikach całkowitych są nieparzyste. Udowodnij, że w nie ma pierwiastków całkowitych.

2. Zbadaj, czy istnieje wielomian w o współczynnikach całkowitych oraz liczba naturalna k takie, że $w(k) = k+1$, $w(k+1) = k+2$, $w(k+2) = k$.

3. Czy istnieje wielomian w stopnia 5 o współczynnikach całkowitych taki, że $w(5) = 2$ i $w(-5) = 3$?

4. Wyznacz wszystkie pierwiastki wymierne wielomianów:

(a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$,

(b) $x^4 + 4x^3 - 25x^2 - 16x + 84$,

(c) $11x^4 + 9x^3 - 35x^2 - 27x + 6$,

(d) $15x^4 - 19x^3 + 16x^2 - x - 3$,

(e) $18x^6 + 27x^5 - 5x^4 - 18x^2 - 27x + 5$,

(f) $9x^4 - 48x^3 + 10x^2 + 24x + 5$,

(g) $x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 26x^2 + 36x - 72$.

5. Udowodnij, że liczby $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ i $\sqrt[3]{3} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ są niewymierne.

6. Wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartości nieparzyste dla dwóch kolejnych liczb całkowitych. Udowodnij, że f nie ma pierwiastków całkowitych.

7. Wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartość 1 dla trzech różnych liczb całkowitych. Udowodnij, że nie ma on pierwiastków całkowitych.

8. Wielomian $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, ma współczynniki całkowite. Załóżmy, że liczby a_n, a_0 i $f(1)$ są nieparzyste. Udowodnij, że f nie ma pierwiastków wymiernych.

9. Liczby 1 i 2 są pierwiastkami wielomianu f o współczynnikach całkowitych. Udowodnij, że pewien współczynnik wielomianu f jest mniejszy od -1.

10. Niech $k, p \in \mathbb{N}$ i wielomian $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ma współczynniki całkowite. Udowodnij, że jeżeli $p+1$ nie dzieli żadnej z liczb $f(k), f(k+1), \ldots, f(k+p)$, to wielomian f nie posiada pierwiastków wymiernych.

11. Dane są różne liczby całkowite a i b. Pokaż, że wielomian $(x-a)^2(x-b)^2 + 1$ nie jest iloczynem dwóch wielomianów o współczynnikach całkowitych dodatniego stopnia.

12. Liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są różne. Pokaż, że wielomian

$$(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) - 1$$

nie jest rozkładalny w nad $\mathbb{Z}$.

13. Rozłóż wielomiany na czynniki w $\mathbb{Z}[x]$:

(a) $(x+1)^3 + (x-1)^3$,

(b) $x^6 + 1$,

(c) $x^9 + x^4 - x - 1$,

(d) $x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5x + 15$,

(e) $x^4 + 4$,

(f) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$,

(g) $8x^3 - 5x^2 - 24x + 15$,

(h) $2x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 2$

(i) $x^5 + x^3 - x^2 - 1$,

(j) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 6x - 12$,

(k) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 9x - 15$,

(l) $x^5 + x^4 + x^3 - 1$

(m) $x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1$

(n) $x^8 + x^4 + 1$,

(o) $x^{10} + x^5 - 2$,

(p) $x^{10} + x^5 + 1$,

(q) $(x^2+x+1)^2 + 3x(x^2+x+1) + 2x^2$,

(r) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2 - x^5$

(s) $x^9 - 6x^4 + x^3 + 8$

14. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ liczba $n^{12} + 64$ jest iloczynem czterech różnych liczb naturalnych.

15. Udowodnij, że wielomian $2x^{17} - 18x^{12} + 24x^9 + 243x^6 - 30x^3 - 6$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

16. Udowodnij, że wielomian $x^6 + x^3 + 1$ nie jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

17. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ i $P(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$. Pokaż, że wielomian P jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$ wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą złożoną.