Analiza - klasa 3a Zestaw 4. 17.10.2023

Wielomiany III

Mówimy, że liczba x_0 jest *k-krotnym pierwiastkiem* wielomianu $P(x)$ stopnia n, jeżeli istnieje wielomian $Q(x)$ stopnia $n-k$ taki, że $P(x) = (x-x_0)^k Q(x)$ i $Q(x_0) \neq 0$.

Zasadnicze twierdzenie algebry. Każdy wielomian o współczynnikach zesolonych dodatniego stopnia ma pierwiastek zespolony.

Wniosek 1. Każdy wielomian $p \in \mathbb{C}[z]$, $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ stopnia $n > 1$, ma dokładnie n pierwiastków zespolonych $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ (niekoniecznie różnych) i $p(z) = a_n(z-z_0)(z-z_1)\ldots(z-z_{n-1})$.

Wniosek 2. Każdy wielomian z $\mathbb{R}[x]$ dodatniego stopnia jest iloczynem wielomianów z $\mathbb{R}[x]$ stopnia 1 i wielomianów z $\mathbb{R}[x]$ stopnia 2 nie mających pierwiastków rzeczywistych.

Wniosek 3. Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych nieparzystego stopnia ma pierwiastek rzeczywisty.

Twierdzenie (Wzory Viete'a). Liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są wszystkimi zespolonymi pierwiastkami wielomianu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_i \in \mathbb{C}$ i $a_n \neq 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są równości

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \qquad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \qquad \ldots,$$
$$\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}, \qquad \ldots, \qquad x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Uwaga: W powyższym twierdzeniu nie zakładamy, że pierwiastki $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są różne.

---

1. Wielomian $w(x) = x^3 + px + q$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, x_3, przy czym $x_1 = x_2$ i $x_3 = x_1 - 6$. Wyznacz p i q.

2. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Oblicz sumę, sumę kwadratów i iloczyn pierwiastków wielomianu $x^n - (x-1)^n$.

3. Liczby x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu $x^3 + 6x^2 + 11x - 6$. Znajdź wielomian stopnia 3, którego pierwiastkami są liczby (a) x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1, (b) $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$, $x_3 + x_1$

4. Znajdź pierwiastki wielomianu $x^4 - 10x^3 + 32x^2 - 34x + 7$, wiedząc, że suma pewnych dwóch jego pierwiastków jest równa 4.

5. Wielomian $p(x) = x^5 - 10x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 32$ ma pięć pierwiastków dodatnich. Wyznacz współczynniki a, b, c.

6. Wielomian $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste. Udowodnij, że $b^2 \geqslant ac$ i $c^2 \geqslant bd$. Czy jest prawdziwe twierdzenie odwrotne?

7. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $a+b+c > 0$, $ab+bc+ca > 0$ i $abc > 0$. Udowodnij, że $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$.

8. Liczby x, y, z, u, v, w spełniają warunki

$$x+y+z = u+v+w, \quad xyz = uvw, \quad 0 < u \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant w, \quad u \leqslant v \leqslant w.$$

Udowodnij, że $u = x, v = y, w = z$.

9. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunki $xyz > 1$ i $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Udowodnij, że dokładniej jedna z liczb x, y, z jest mniejsza od 1.

10. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x+y+z = 2 \\ x^2+y^2+z^2 = 14 \\ x^3+y^3+z^3 = 20 \end{cases}$$

11. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n \geqslant 3$, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-3} \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że nie wszystkie pierwiastki wielomianu $P(x) = x^n + 2nx^{n-1} + 2n^2x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_1x + a_0$ są liczbami rzeczywistymi.

12. Wielomian $ax^3 + bx^2 + cx + d$ współczynniki całkowite i trzy pierwiastki rzeczywiste. Liczba ad jest nieparzysta, a liczba bc jest parzysta. Udowodnij, że pewien pierwiastek tego wielomianu jest liczbą niewymierną.

13. Wszystkie współczynniki wielomianu $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + 1$ są liczbami nieujemnymi i wielomian P ma n pierwiastków rzeczywistych. Udowodnij, że $P(2) \geqslant 3^n$.

14. Liczby zespolone $x_1, x_2, \ldots, x_n$ to pierwiastki wielomianu $x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1$. Udowodnij, że

$$\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \ldots + \frac{1}{1-x_n} = \frac{n}{2}.$$

15. Udowodnij, że suma pewnych dwóch pierwiastków zespolonych wielomianu $x^4 - 12x - 5$ wynosi 2.