Analiza - klasa 3a Zestaw 3. 3.10.2023

Wielomiany II

Tw. 1. (o dzieleniu wielomianów) Dla każdej pary wielomianów $f(x)$ i $h(x)$, gdzie $\deg h \geqslant 0$, istnieje dokładnie jedna para wielomianów $q(x)$ i $r(x)$ taka, że

$$f = h \cdot q + r, \quad \text{i} \quad \deg r < \deg h.$$

Mówimy wówczas, że r jest *resztą z dzielenia* wielomianu f przez wielomian h. Jeżeli $r = 0$ (czyli $f = h \cdot q$), to mówimy, że h jest *dzielnikiem* f lub f jest *podzielny* przez h.

Tw. 2. (Bézouta) Reszta z dzielenia wielomianu f przez dwumian $x - c$ jest równa $f(c)$, czyli $f(x) = (x - c)q(x) + f(c)$ dla pewnego wielomianu q takiego, że $\deg q = \deg f - 1$.

Wniosek. Jeżeli różne liczby $c_1, c_2, \ldots, c_k$ są pierwiastkami wielomianu f, to f jest podzielny przez wielomian $(x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_k)$.

Definicja. Mówimy, że liczba c jest pierwiastkiem wielomianu f krotności k, jeżeli $f(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x - c)^k$ i nie jest podzielny przez $(x - c)^{k+1}$.

Schemat Hornera. Dany jest wielomian $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) i liczba c. Współczynniki wielomianu $g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ takiego, że $f(x) = (x - c)g(x) + f(c)$ i liczbę $f(c)$ można sprawnie wyznaczyć za pomocą algorytmu zwanego *schematem Hornera*:

	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_1	a_0
c	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1}$	$\ldots$	$b_0 = a_1 + cb_1$	$f(c) = a_0 + cb_0$

Algorytm dzielenia wielomianów z resztą: Dla danych wielomianów w i q, gdzie $\deg w \geqslant \deg q$, szukamy wielomianów v i r takich, że $w = p \cdot v + r$ i $\deg(r) < \deg(q)$:

Niech $w_0(x) = w(x)$, $v_0(x) = 0$.

Jeżeli mamy już wyznaczone wielomiany w_k i v_k, to v_{k+1} otrzymujemy dodając do v_k iloraz najwyższych stopniem wyrazów wielomianów w_k i p: $v_{k+1}(x) = v_k(x) + c_k x^{j_k}$. Następnie wyznaczamy $w_{k+1}(x) = w_k(x) - c_k x^{j_k} \cdot p(x)$. Wówczas $\deg(w_{k+1}) - \deg(w_k)$.

Powtarzamy tak długo, aż $\deg(w_k) < \deg(q)$. Wtedy $v = v_k$ i $r = w_k$.

Tw. 3. (O interpolacji wielomianowej) Niech $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ i $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$, $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$. Wówczas istnieje dokładnie jeden wielomian p stopnia nie większego od n taki, że $p(x_j) = y_j$ dla $j = 0, 1, \ldots, n$.

Wniosek. (Drugie tw. o równości wielomianów) Jeżeli wielomiany p, q stopnia nie większego niż n przyjmują te same wartości dla $n + 1$ różnych argumentów, to $p = q$.

---

1. Nie wykonując dzielenia wielomianów, wyznacz resztę z dzielenia wielomianu (a) $x^4 + x^2 - 6$ przez $x^2 - 2x - 3$, (b) $2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x - 1$ przez $x^2 + 1$.

2. Dla jakich wartości a, b wielomian $x^3 + ax^2 + bx - 6$ jest podzielny przez (a) $x + 1$, (b) $x^2 - 3x + 2$?

3. Wielomian f daje resztę -1 przy dzieleniu przez $x - 1$, resztę 2 przy dzieleniu przez $x - 2$ i resztę 11 przy dzieleniu przez $x - 3$. Wyznacz resztę z dzielenia f przez $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

4. Stosując schemat Hornera oblicz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu

(a) $f(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1$ przez $x - 1$,

(b) $g(x) = 4x^5 + 3x^3 - 2x + 1$ przez $x + 2$,

(c) $h(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{2}{3}x - 2$ przez $x + \frac{1}{3}$.

5. Stosując schemat Hornera zapisz wielomiany (a) $x^5 + x^3 + x$, (b) $x^4 - 2x^3 + 3x + 5$ jako sumę potęg dwumianu $x - 1$.

6. Wykonaj dzielenie wielomianu z resztą:

(a) $x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ przez $x^2 + 2x$,

(b) $x^6 + 1$ przez $x^2 + x - 2$

(c) $3x^7 - x^6 + 2x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x - 2$ przez $x^2 + 1$

(d) x^8 przez $x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$

7. Dla jakich wartości $a, b \in \mathbb{R}$ wielomian $ax^4 + bx^3 + 1$ jest podzielny przez $(x - 1)^2$?

8. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że wielomian $nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$ jest podzielny przez $(x - 1)^2$.

9. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ wielomian $x^2 + x + 1$ dzieli wielomian (a) $(x - 1)^n - x^n - 1$, (b) $(x + 1)^n + x^n + 1$?

10. Niech $f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + x + 1$. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $f(x^n)$ przez wielomian $f(x)$.

11. Liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu w. Pokaż, że wielomian $v(x) = w(x^n)$ jest podzielny przez wielomian $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$.

12. Udowodnij, że nie istnieje wielomian p taki, że $p(x) = \sin x$ dla każdego $x \in [0, \pi]$.

13. Niech p będzie wielomianem stopnia n takim, że $p(k) = \dfrac{k}{k+1}$ dla k $= 0, 1, 2, \ldots, n$. Oblicz $p(n + 1)$.

14. Wykaż, że liczby 1 i -1 to jedyne rzeczywiste pierwiastki wielomianu

$$f(x) = x^7 + x^6 - x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x - 1.$$

15. Udowodnij, że wielomian $P(x) = x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \ldots - 2nx + (2n + 1)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.