Analiza - klasa 3a Zestaw 2. 19.9.2023

Wielomiany I

Niech $\mathbb{K}$ oznacza zbiór $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. W każdym twierdzeniu lub zadaniu $\mathbb{K}$ zawsze oznacza ten sam zbiór.

Definicja. *Wielomianem stopnia k* o współczynnikach $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$, gdzie $a_k \neq 0$, nazywamy funkcję $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (lub $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeśli $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$)

$$w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k.$$

Stopień wielomianu w oznaczamy $\deg w$. Liczbę a_k nazywamy *współczynnikiem wiodącym* wielomianu w. Jeżeli $a_k = 1$, to mówimy, że w jest wielomianem *unormowanym* lub *monicznym*. Stopień *wielomianu zerowego* $w_0(x) = 0$ jest równy $-\infty$.

Każdą liczbę $\alpha \in \mathbb{C}$ taką, że $w(\alpha) = 0$ nazywamy *pierwiastkiem* lub *miejscem zerowym* lub *zerem* wielomianu w.

Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach zespolonych oznaczamy $\mathbb{C}[x]$. Analogicznie definiujemy zbiory $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ i $\mathbb{Z}[x]$. Każdy z tych zbiorów jest zamknięty ze względu na operacje dodawania, odejmowania, mnożenia i składania funkcji.

Lemat. Niech $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + a_kx^k$, $a_j \in \mathbb{C}$, będzie wielomianem stopnia $k \geqslant 1$. Wówczas istnieje liczba rzeczywista M taka, że

$$|a_kx^k| > |w(x) - a_kx^k|, \qquad \text{gdy } |x| > M.$$

Tw. (Pierwsze twierdzenie o równości wielomianów). Załóżmy, że wielomiany

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k \quad \text{i} \quad g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n$$

gdzie $a_j, b_j \in \mathbb{C}$ i $a_k, b_n \neq 0$, spełniają dla każdego $x \in \mathbb{C}$ równość $f(x) = g(x)$. Wówczas $k = n$ i $a_j = b_j$ dla $j = 0, 1, \ldots, k$.

---

1. Liczba zespolona x_0 jest pierwiastkiem wielomianu $P \in \mathbb{R}[x]$. Wykaż, że liczba $\overline{x_0}$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu.

2. Udowodnij, że dla każdego wielomianu $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ istnieje wielomian $g \in \mathbb{K}[x]$ taki, że $f(x) = g(x+1) - g(x)$ dla każdego x.

3. Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Wyznacz pierwiastki zespolone wielomianu

$$p(x) = x^3 - 3abx + a^3 + b^3.$$

Jak za pomocą uzyskanych wzorów można otrzymać pierwiastki dowolnego wielomianu stopnia 3?

4. Załóżmy, że f i g są wielomianami. Udowodnij, że

(i) funkcja $f + g$ jest wielomianem i $\deg(f+g) \leqslant \max(\deg f, \deg g)$, oraz jeśli $\deg f > \deg g$, to $\deg(f+g) = \deg f$;

(ii) funkcja $f \cdot g$ jest wielomianem i $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$;

(iii) funkcja $f \circ g$ jest wielomianem i $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$.

5. Wyznacz wszystkie wielomiany $p \in \mathbb{R}[x]$ takie, że $p(x^2) = p(x)^2$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

6. Pokaż, że wielomian $w(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ jest

(i) funkcją nieparzystą wtedy tylko wtedy, $a_k = 0$ dla parzystych k;

(ii) funkcją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy $a_k = 0$ dla nieparzystych k.

7. (a) Udowodnij, że wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych jest funkcją (określoną na $\mathbb{R}$) nieograniczoną z dołu i z góry
(b) Udowodnij, że wielomian stopnia parzystego i dodatniego o współczynnikach rzeczywistych i dodatnim współczynniku wiodącym jest funkcją ograniczoną z dołu i nieograniczoną z góry.

8. Udowodnij, że funkcje (a) $\dfrac{x}{1+x^2}$, $\sqrt[2n+1]{x}$, $n \in \mathbb{N}$ nie są wielomianami.

9. Udowodnij, że wielomian $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (gdzie $a \neq 0$) przyjmuje dla każdej liczby całkowitej x wartość całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $6a$, $2b$, $a + b + c$ oraz d są całkowite.

10. (a) Udowodnij, że wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych jest funkcją (określoną na $\mathbb{R}$) nieograniczoną z dołu i z góry
(b) Udowodnij, że wielomian stopnia parzystego i dodatniego o współczynnikach rzeczywistych i dodatnim współczynniku wiodącym jest funkcją ograniczoną z dołu i nieograniczoną z góry.

11. Udowodnij, że wielomian $w(x) = x^3 - 2x$ nie jest różnowartościowy na zbiorze liczb rzeczywistych i jest różnowartościowy na zbiorze liczb wymiernych.

12. Wielomian P stopnia $n > 1$ ma współczynniki całkowite, $x, y \in \mathbb{Z}$ i $P(x) \neq P(y)$. Udowodnij, że $|P(x) - P(y)| \geqslant |x - y|$.

13. Niech $f \in \mathbb{Z}[x]$. Udowodnij, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}$ liczba $f(a+\sqrt{b}) + f(a-\sqrt{b})$ jest całkowita.

14. Niech $n > 1$ i $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że wielomian

$$w(x) = x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - x^{2n-3} + \ldots + x^2 - x + \frac{n}{4}$$

nie ma pierwiastków rzeczywistych.