Analiza - klasa 3a Zestaw 1. 5.9.2023

Algebra liniowa

Definicja. Liczbę $ad - bc$ nazywamy *wyznacznikiem* macierzy kwadrtowej $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, i zapisujemy $\det A$.

Stw. 1. Wektory $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ na płaszczyźnie są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 0$.

Tw. 2. (Wzory Cramera) Układ 2 równań liniowych z 2 niewiadomymi

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \tag{1}$$

ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0$. Wówczas

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} e & b \\ f & d \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \qquad y = \frac{\det \begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

Definicja. Wyznacznikiem macierzy 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3], \qquad \vec{a}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{bmatrix}$$

nazywamy liczbę

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Stw. 3. (Własności wyznacznika) Niech $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}, \vec{b}$ to wektory w przestrzeni, t_1, t_2, t_3 to liczby. Wówczas

(i) $\det[t_1\vec{a}_1, t_2\vec{a}_2, t_3\vec{a}_3] = t_1t_2t_3 \cdot \det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$,

(ii) $\det[\vec{a}_1 + \vec{b}, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = \det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] + \det[\vec{b}, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$ (i analogicznie dla pozostałych kolumn macierzy)

(iii) $\det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{0}] = \det[\vec{a}_1, \vec{0}, \vec{a}_3] = \det[\vec{0}, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = 0$,

(iv) $\det[\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}] = \det[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}] = \det[\vec{b}, \vec{a}, \vec{a}] = 0$.

Stw. 4. Wektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ w przestrzeni są współpłaszczyznowe wtw. gdy $\det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = 0$.

Tw. 5. (Wzory Cramera). Układ 3 równań z 3 niewiadomymi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$ i wówczas

$$x = \frac{\det[\vec{b}, \vec{a}_2, \vec{a}_3]}{\det A}, \quad y = \frac{\det[\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{a}_3]}{\det A}, \quad z = \frac{\det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}]}{\det A}.$$

---

1. Określ ilość rozwiązań układu równań w zależności od wartości parametrów a i b:

(a) $\begin{cases} x - y = a \\ bx - 2y = 12 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} ax + 2y = b + 4 \\ 2x + (a+3)y = 10 \end{cases}$

2. Boki trójkąta zawierają się w prostych $4x+3y-21 = 0$, $x+2y-4 = 0$, $3x+y-7 = 0$.
(a) Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta.
(b) Napisz równania prostych zawierających środkowe trójkąta.
(c) Napisz równania prostych symetralnych boków trójkąta i wyznacz środek okręgu opisanego na tym trójkącie.

3. Wykaż, że układ równań ma jednoznaczne rozwiązanie i znajdź y:

(a) $\begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + 4y + z = 1 \\ 5x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases}$

4. Znajdź taki trójmian kwadratowy f, że $f(1) = 8$, $f(-1) = 2$, $f(2) = 14$.

5. Wyznacz w zależności od $a \in \mathbb{R}$ wszystkie rozwiązania układu równań

(a) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x + ay - 3z = 1 \\ x + 10y - z = a \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$

6. Korzystając z twierdzeń na tej kartce udowodnij, że na każdym czworościanie można opisać sferę.