Wprowadzenie

1. Liczby a i b są naturalne. Która z liczb jest większa, $a^a \cdot b^b$ czy $a^b \cdot b^a$?
2. Liczbę naturalną n zapisano w pozycyjnym systemie liczbowym o podstawie a jako 111. Udowodnij, że n nie jest kwadratem liczby naturalnej.
3. Każda osoba na świecie uścisnęła dłoń pewnej liczbie innych osób. Udowodnij, że liczba osób, które uścisnęły dłoń nieparzystej liczbie osób, jest parzysta.
4. W pewnej grupie dziewcząt i chłopców każda dziewczynka zna n chłopców i każdy chłopiec zna n dziewcząt, liczba n jest naturalna. Udowodnij, że w grupie jest ta sama liczba chłopców i dziewcząt.
5. 200 osób posadzono w 10 rzędach, po 20 w każdym rzędzie. Z każdej z tak utworzonych 20 kolumn wybrano najniższą osobę i z tych wybranych 20 osób wybrano najwyższą i dano jej do potrzymania niebieski balonik.

   Następnie, wybrano najwyższą osobę z każdego rzędu i z tych 10 osób wybrano najniższą i dano jej do potrzymania czerwony balonik.

   Okazało się, że te dwie wybrane osoby są różnego wzrostu. Która z nich jest wyższa?
6. Dane są liczby x, y, z takie, że $xyz = 1$. Znajdź wartość sumy
$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}.$$
7. Udowodnij, że jeżeli
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1,$$
to
$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0.$$
8. Liczby a, b, c są dodatnie i $a < b + c$. Udowodnij, że
$$\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$
9. Udowodnij, że
$$\frac{9}{100} < \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \ldots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{10}.$$

Analiza - klasa 1a   Zestaw 2.   12.9.2023

Elementy logiki

Zmienna logiczna może przyjmować wartość *prawda* (1) lub *fałsz* (0).

Wyrażenie logiczne składa się ze zmiennych logicznych i operacji logicznych przedstawionych w tabelce poniżej. Wyrażenie logiczne również może przyjmować wartość *prawda* lub *fałsz*, w zależności od wartości zmiennych logicznych, które w nim występują.

Operacje logiczne:

		negacja *nie p*	**koniunkcja** *p i q*	**alternatywa** *p lub q*	**implikacja** *z p wynika q*	**równoważność** *p wtw., gdy q*
p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \iff q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Kolejność wykonywania operacji w wyrażeniach złożonych jest taka jak kolejność odpowiednich kolumn w tabelce. Kolejność operacji można zmienić wstawiając w odpowiednich miejscach nawiasy. Nawiasów można także używać, aby poprawić czytelność wyrażeń. Nawiasów należy użyć w wyrażeniach niejednoznacznych z implikacją postaci $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$, $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$, itp.

Tautologią nazywamy wyrażenie logiczne, które przyjmuje wartość *prawda* niezależnie od wartości występujących w nim zmiennych logicznych. Przykłady tautologii to

- *prawo podwójnego przeczenia*: $\sim(\sim p) \iff p$,
- *prawa przemienności alternatywy*: $(p \vee q) \iff (q \vee p)$,

---

1. Sporządź tabelkę wartości dla wyrażeń logicznych
(a) $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$, (b) $\big((p \wedge q) \vee (\sim p)\big) \Rightarrow q$.
2. Sprawdź, że następujące wyrażenia logiczne są tautologiami:
   (a) *Prawo wyłączonego środka:* $p \vee \sim p$,
   (b) *Pierwsze prawo de Morgana:* $\sim(p \wedge q) \iff \big((\sim p) \vee (\sim q)\big)$,
   (c) *Drugie prawo de Morgana:* $\sim(p \vee q) \iff \big((\sim p) \wedge (\sim q)\big)$,
   (d) *Prawo negacji implikacji:* $\sim(p \Rightarrow q) \iff p \wedge \sim q$,
   (e) *Prawo przechodności implikacji:* $\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.
3. Które z dwuargumentowych operacji logicznych są (a) przemienne, (b) łączne?
4. Wykaż, że koniunkcja jest rozdzielna względem alternatywy i alternatywa jest rozdzielna względem koniunkcji.
5. Które dwuargumentowe operacje logiczne, poza implikacją, są przechodnie?
6. Zapisz alternatywę, implikację i równoważność tylko za pomocą koniunkcji i negacji.
7. Udowodnij, że implikacji nie da się zapisać tylko za pomocą alternatywy i koniunkcji.
8. Zapisz zaprzeczenia poniższych zdań dotyczących liczby całkowitej a:
(a) $-10 < a \leqslant 2019$, (b) $3 \mid a \vee 5 \nmid a$, (c) $a = 72 \Rightarrow 9 \mid a$; (d) $x = 10 \vee x > 5$.
9. W 100-kartkowym zeszycie na 1. kartce jest napisane zdanie *W tym zeszycie dokładnie 1 zdanie jest fałszywe.*, na 2. kartce jest napisane zdanie *W tym zeszycie dokładnie 2 zdanie są fałszywe.*, itd, aż do ostatniej kartki, na której jest napisane zdanie *W tym zeszycie dokładnie 100 zdań jest fałszywych.* Czy wśród tych zdań są zdania prawdziwe. Jeśl tak, to które? (Zakładamy, że w zeszycie nie zapisano żadnych innych zdań).
10. Na wyspie mieszkają tylko rycerze i oszuści. Rycerze zawsze mówią prawdę, oszuści zawsze kłamią. Podróżnik napotkał trzech mieszkańców wysypy i dwóch z nich zapytał, ilu rycerzy mu towarzyszy. Pierwszy odpowiedział, że ani jeden, drugi, że tylko jeden. Który z napotkanych mieszkańców jest rycerzem, a który oszustem?
11. W sądowej sprawie o kradzież konia jest 3 podejrzanych: A, B i C. Wiadomo, że dokładnie jeden z nich ukradł konia. B zeznał, że konia ukradł C. Zeznań A i C nie znamy. Ustalono jednak, że tylko jeden z podejrzanych zeznał prawdę i że to on ukradł konia. Kto ukradł konia?
12. Agent Tajny ma dwóch informatorów. Każdy informator albo zawsze kłamie, albo zawsze mówi prawdę. Każdemu z informatorów Agent Tajny zadał dwa pytania: (1) *Czy ten drugi informator jest kłamcą?* i (2) *Czy, jeśli ty jesteś kłamcą, to drugi informator nie jest kłamcą?* Czy na podstawie uzyskanych odpowiedzi Agent Tajny może stwierdzić, który z informatorów mówi prawdę, a który kłamie? (Jest możliwe, że obaj kłamią lub obaj mówią prawdę.)
13. Sporządź tabelki wartości poniższych wyrażeń logicznych. Które z tych wyrażeń są tautologiami?
   (a) $(p \wedge q) \vee (q \Rightarrow p)$,
   (b) $\big((p \vee q) \wedge r\big) \iff \big((p \wedge r) \vee (q \wedge r)\big)$,
   (c) $\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big) \iff \big((p \Rightarrow q) \Rightarrow r\big)$,
   (d) $\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big) \iff \big(q \Rightarrow (p \Rightarrow r)\big)$.
14. O liczbach a, b, c, d, e wiadomo, że spełniają wszystkie 4 warunki poniżej:
   (i) $(e > a) \Rightarrow \big((e > b) \vee (e < c)\big)$,
   (ii) $(e \leqslant b) \Rightarrow (e < d)$,
   (iii) $\big((e < d) \wedge (e > a)\big) \Rightarrow (e \geqslant c)$,
   (iv) $\big((e < d) \wedge (e \leqslant b)\big) \Rightarrow (e > a)$.

   Która z liczb jest większa: e czy b?

Analiza - klasa 1a   Zestaw 3.   27.9.2023

Zbiory i kwantyfikatory

Suma zbiorów: $A \cup B$; **przecięcie** (część wspólna, iloczyn) zbiorów: $A \cap B$, **różnica** zbiorów: $A \setminus B$.

Zbiór pusty oznaczamy $\emptyset$.

Zapis $x \in A$ odczytujemy jako x *jest elementem (należy do) zbioru* A, $x \notin A$ jako x *nie jest elementem (nie należy do) zbioru* A.

Jeśli A i B to zbiory, to zapis $A \subset B$ oznacza, że A *jest podzbiorem* B

Dopełnienie zbioru. Jeżeli $A \subset \Omega$, to zbiór $A' = \Omega \setminus A$ nazywamy *dopełnieniem* zbioru A (w zbiorze Ω). Na przykład, dopełnieniem zbioru liczb wymiernych w zbiorze liczb rzeczywistych jest zbiór liczb niewymiernych.

Zachodzi równoważność $A \subset B \iff B' \subset A'$.

Różnica symetryczna zbiorów: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

---

1. Zapisz różnicę symetryczną $A \triangle B$ dwóch zbiorów $A, B \subset \Omega$ za pomocą operacji dopełnienia, sumy i przecięcia zbiorów.
2. Udowodnij *prawa de Morgana* dla podzbiorów $A, B, C \subset \Omega$:
   (a) $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$, (b) $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$.
3. Niech $A, B \subset \Omega$. Zaznacz na diagramie Venna zbiór elementów $x \in \Omega$, dla których prawdziwe jest zdanie
   (a) $x \in A \iff x \in B$, (b) $x \in A \Rightarrow x \in B$, (c) $x \in A \Rightarrow x \in B' \cap A$.
4. A, B, C oznaczają zbiory. Udowodnij następujące związki:
   (a) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$,
   (b) $A \cap B = \emptyset \iff A \cup B = A \triangle B$,
   (c) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$
   (d) $A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$,
   (e) $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$,
   (f) $A \triangle C \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$
5. A, B, C, D, E to zbiory. Wykaż, że $A \triangle E \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C) \cup (C \triangle D) \cup (D \triangle E)$.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – zbiór liczb naturalnych,
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ – zbiór liczb całkowitych,
- $\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych.

Kwantyfikator ogólny. Zdania postaci *Dla każdego x ze zbioru X zachodzi p(x)*, zapisujemy następująco: $\forall_{x \in X}\ p(x)$. Np. zdanie *Dla każdej liczby nauturalnej x prawdziwa jest nierówność* $x > \frac{1}{2}$ można zapisać jako $\forall_{x \in \mathbb{N}}\ x > \dfrac{1}{2}$.

Symbol $\forall$ nazywamy *kwantyfikatorem ogólnym.*

Kwantyfikator szczegółowy. Zdania postaci *Istnieje x należące do zbioru X, dla którego zachodzi p(x)*, np. zdanie *Istnieje liczba naturalna x taka, że* $x > 2023$, można zapisać jako $\exists_{x \in \mathbb{N}}\ x > 2022$.

Symbol $\exists$ nazywamy *kwantyfikatorem szczegółowym.*

Jeżeli dwa kwantyfikatory ogólne lub dwa kwantyfikatory szczegółowe występują jeden po drugim, można zmienić ich kolejność, np.

$$\Big(\forall_{x \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}}\ x > 1 \Rightarrow x^n > 1\Big) \iff \Big(\forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x \in \mathbb{R}}\ x > 1 \Rightarrow x^n > 1\Big)$$
$$\Big(\exists_{x \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}}\ x^2 = n + 1 \wedge x > n\Big) \iff \Big(\exists_{n \in \mathbb{N}} \exists_{x \in \mathbb{R}}\ x^2 = n + 1 \wedge x > n\Big).$$

Nie można zmienić kolejności kwantyfikatora ogólngo i szczególnego. Poniższe dwa zdania **nie są** równoważne:

(i) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}}\ x < n$, (ii) $\exists_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x \in \mathbb{R}}\ x < n$.

Zawsze zachodzi implikacja $\Big(\exists_{x \in X} \forall_{y \in Y}\ p(x, y)\Big) \Rightarrow \Big(\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X}\ p(x, y)\Big)$.

Na przykład: $\Big(\exists_{x \in \mathbb{N}} \forall_{y > 1}\ y^2 > x\Big) \Rightarrow \Big(\forall_{y > 1} \exists_{x \in \mathbb{N}}\ y^2 > x\Big)$.

Prawa de Morgana: Jeżeli Ω jest zbiorem, a $p(x)$ to zdanie logiczne, którego wartość zależy od elementu $x \in \Omega$, to

(i) $\sim \Big(\forall_{x \in \Omega}\ p(x)\Big) \iff \exists_{x \in \Omega} \sim p(x)$, (ii) $\sim \Big(\exists_{x \in \Omega}\ p(x)\Big) \iff \forall_{x \in \Omega} \sim p(x)$.

---

6. Zapisz zaprzeczenia poniższych zdań z kwantyfikatorami.
   (a) $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ 2 \mid n^2 + n^5$
   (b) $\exists_{n \in \mathbb{N}}\ n^n = 16\,777\,216$
   (c) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}}\ x \neq 0 \Rightarrow x^2 > n$
   (d) $\exists_{x \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{Z}}\ x > 0 \wedge x < n^2 - n + \frac{1}{20}$
   (e) $\exists_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x > 0} \exists_{k \in \mathbb{N}}\ \sqrt[k]{x} < n$
   (f) $\forall_{k \in \mathbb{N}} \exists_{x > 0} \forall_{n \in \mathbb{Z}_+}\ (n + \frac{1}{100})^k \geqslant xn$
   (g) $\exists_{q \in \mathbb{Q}} \forall_{x \in \mathbb{R}} \forall_{k \in \mathbb{Z}}\ q = xk \Rightarrow q = x \vee q = n$

   Czy potrafisz rozstrzygnąć czy prawdziwe jest zdanie, czy jego zaprzeczenie?
7. Zapisz za pomocą kwantyfikatorów i działań logicznych definicję *liczby pierwszej.*
8. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są podzbiorami zbioru Ω. Stosując rachunek zdań i kwantyfikatory udowodnij *prawa de Morgana* dla zbiorów:
   (i) $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)' = A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_n'$
   (ii) $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)' = A_1' \cup A_2' \cup \ldots \cup A_n'$

Analiza - klasa 1a Zestaw 4. 3.10.2023

Wzory skróconego mnożenia I

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2, \quad a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \qquad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$

1. Za pomocą wzorów na kwadrat sumy lub różnicy oblicz 19^2, 52^2, 195^2, 107^2, 999^2.

2. Za pomocą wzoru na różnicę kwadratów oblicz iloczyny $18\cdot 22$, $53\cdot 47$, $495\cdot 505$.

3. Przedstaw wyrażenia jak kwadraty lub sześciany:

(a) p^2+6p+9,
(b) $a^2-10a+25$,
(c) $9x^2-12xy+4y^2$,
(d) $x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6$,
(e) $\frac{1}{27}a^3-\frac{1}{3}a^2b+ab^2+b^3$,
(f) $27p^3+9p^2q+pq^2+\frac{1}{27}q^3$,
(g) $x^6-3x^3+3-\frac{1}{x^3}$.

4. Rozwiąż równania

(a) $x^2-2x=3$, (b) $x^2+x=2$, (c) $x^2+1=x$, (d) $4x^2-2x=\frac{3}{4}$

5. Zapisz jako iloczyny:

(a) $4x^2-y^2$,
(b) x^5-16x,
(c) $a^2+4ab+3b^2$,
(d) $2x^2+2xy-y^2$,
(e) a^6-b^6,
(f) $8a^3+b^3c^3$
(g) $a^3+6a^2+12a+9$,
(h) $a^6-3a^4b^2+3a^2b-2b^3$
(i) $x^3-xy^2+x^2y-y^3$,
(j) $x^3+xy^2-x^2y-y^3$,
(k) $a^3+b^3+3ab-1$,
(l) a^4+4b^4,
(m) a^8-16b^8,
(n) $a^{12}-4b^{12}+4a^8b^4-a^4b^8$,
(o) $x^3+y^3+z^3-3xyz$,
(p) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$,

6. (a) Każda z liczb całkowitych a, b jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych. Wykaż, że liczba $a\cdot b$ też jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.

(b) Każda z liczb całkowitych a, b jest różnicą kwadratów liczb całkowitych. Czy liczba $a\cdot b$ też jest różnicą kwadratów liczb całkowitych?

7. Uprość sumy

(a) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$,
(b) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}$,
(c) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$,
(d) $\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{4k^4+1}$,
(e) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-\frac{1}{2}}{k^4+\frac{1}{4}}$

8. Rozwiąż układy równań

(a) $\begin{cases} xy+xz=8-x^2 \\ xy+yz=12-y^2 \\ yz+zx=-4-z^2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x^2+2y^2-2yz=100 \\ 2xy-z^2=100 \end{cases}$

9. Rozwiąż równania
(a) $(x-y+z)^2=x^2-y^2+z^2$,
(b) $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{x+y+z}{2}$.

10. Udowodnij, że każda liczba naturalna postaci a^4+3, gdzie $a\in\mathbb{N}$ i $a>1$, jest sumą trzech kwadratów liczb naturalnych.

11. Załóżmy, że $x+y=a$ i $xy=b\neq 0$. Wyraź za pomocą a i b wartości wyrażeń:
(a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, (b) x^2+y^2, (c) x^3+y^3, (d) $|x-y|$, (e) $|x^3-y^3|$, (f) x^4+y^4.

12. Załóżmy, że $x+y+z=a$, $xy+yz+zx=b$, $xyz=c$. Wyraź poprzez a,b,c wartości wyrażeń

(a) $x^2+y^2+z^2$,
(b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$,
(c) $x^3+y^3+z^3$,
(d) $(x+y)(y+z)(z+x)$,
(e) $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$,
(f) $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$.

13. Niech $a,b,c\in\mathbb{R}$. Wykaż, że $\sqrt[3]{a-b}+\sqrt[3]{b-c}+\sqrt[3]{c-a}\neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a,b,c są parami różne.

14. Liczby całkowite k,l,m spełniają równość

$$(k-l)^2+(l-m)^2+(m-k)^2=klm.$$

Wykaż, że liczba $k^3+l^3+m^3$ jest podzielna przez $k+l+m+6$.

Wzory skróconego mnożenia II

1. Załóżmy, że $x + \frac{1}{x} = 3$. Oblicz $x^3 + \frac{1}{x^3}$, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ i $x^9 + \frac{1}{x^9}$.
2. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b spełnione są nierówności:

$$\max(a,b) \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \geqslant \min(a,b).$$

   Kiedy każda z tych nierówności staje się równością?
3. Niech $x > 0$. Wykaż, że $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$. Kiedy zachodzi równość?
4. Udowodnij nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną dla trzech i czterech liczb dodatnich:

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}, \qquad \frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}.$$

5. **Nierówność między średnią kwadratową i arytmetyczną.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Powtórzenie

1. Czy poniższe zdanie logiczne jest tautologią?

$$\big((p \vee q) \;\Rightarrow\; (q \wedge r)\big) \iff \big((\sim p \wedge \sim q) \vee q \wedge r\big).$$

2. W trakcie kolejnej misji Agent Tajny (A.T.) ma 3 informatorów. Każdy informator albo zawsze kłamie, albo zawsze mówi prawdę. Informatorzy wiedzą, który z nich kłamie, a który mówi prawdę. Każdemu informatorowi A.T. zadał dwa pytania:

   1. *Czy któryś z pozostałych informatorów kłamie wtedy i tylko wtedy, gdy ty mówisz prawdę?*
   2. *Czy, jeśli kłamiesz, to któryś z pozostałych informatorów mówi prawdę?*

   Czy na podstawie otrzymanych odpowiedzi A.T. może stwierdzić, który informator mówi prawdę, a który kłamie?
3. Zapisz zaprzeczenie poniższego zdania i rozstrzygnij, czy prawdziwe jest zdanie, czy jego zaprzeczenie.

$$\exists_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \forall_{y\in\mathbb{R}} \exists_{z\in\mathbb{R}} (xy \leqslant 0) \vee (x+z > y).$$

4. Dane są zbiory A, B, C, D. Udowodnij, że zbiór

$$X = \big(A \triangle (B \cup C \cup D)\big) \cap \big(B \triangle (C \cup D \cup A)\big) \cap \big(C \triangle (D \cup A \cup B)\big)$$

   składa się z tych elementów, które należą do dokładnie jednego ze zbiorów A, B, C, D.
5. Załóżmy, że $x - \frac{1}{x} = -2$. Oblicz $x^3 - \frac{1}{x^3}$ i $x^6 + \frac{1}{x^6}$.
6. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie i ich iloczyn jest równy 1. Wykaż, że

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n.$$

7. Wykaż, że dla liczb nieujemnych a, b, c spełniona jest nierówność

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

8. Udowodni, że dla dowolnych liczb a, b, c zachodzi nierówność

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca.$$

9. Udowodnij, że dla dowolnych liczb $a, b \geqslant 0$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}.$$

10. Dane są liczby rzeczywiste x, y, z takie, że

$$x+y+z=-5, \quad xy+yz+zx=2, \quad xyz=12.$$

    Wyznacz wartości wyrażeń: $x^3+y^3+z^3$ oraz $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$.
11. Rozwiąż układy równań

$$\text{(a)} \begin{cases} (x+y)\cdot z + x^2 = -3 \\ (y+z)\cdot x + y^2 = 0 \\ (z+x)\cdot y + z^2 = 3 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} 2y^2+4z^2-4yz+2y+1=0 \\ 3z^2-6z+3=x^2 \end{cases}$$

Nierówności

Poniżej a, b, c, d oznaczają liczby rzeczywiste.

(1) jeśli $a < b$ i $b < c$, to $a < c$;

(2) jeśli $a < b$, to $a + c < b + c$ i $a - c < b - c$;

(3) jeśli $a < b$ i $c > 0$, to $ac < bc$ i $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$;

(4) jeśli $a < b$ i $c < 0$, to $ac > bc$ i $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$;

(5) jeśli $a < b$ i $c < d$, to $a + c < b + d$

UWAGA: Nie jest prawdą, że jeśli $a < b$ i $c < d$, to $a - c < b - d$!!!

(6) jeśli $0 < a < b$ i $0 < c < d$, to $ac < bd$;

(7) jeśli $0 < a < b$ i $c < d < 0$, to $ad > bc$;

UWAGA: Nie jest prawdą, że jeśli $a < b$ i $c < d$, to $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$!!!

(8) jeśli $a > b > 0$, to $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;

(9) jeśli $a \neq 0$, to $a^2 > 0$;

(10) jeśli $a > 0, b > 0$ i $a^2 > b^2$, to $a > b$;

(11) jeśli $a > 0, b > 0$ i $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, to $a > b$.

---

1. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie i ich iloczyn jest równy 1. Wykaż, że

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

2. Wykaż, że dla liczb nieujemnych a, b, c spełniona jest nierówność

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc.$$

3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb $a, b \geqslant 0$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} \geqslant \frac{a + b}{2}.$$

4. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności.

(a) $x^2 > 2x$,

(b) $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) > 0$,

(c) $(x^2 - 4)(x + 1)^2 \leqslant 0$,

(d) $(x^4 - 1)(x^3 + 1) \geqslant 0$

(e) $\frac{4}{1 + x^2} - \frac{3}{1 - x + x^2} < 0$.

5. Wykaż, że jeśli $0 \leqslant x \leqslant 1$ i $0 \leqslant y \leqslant 1$, to

$$\frac{x}{1 + y} + \frac{y}{1 + x} < 1.$$

6. Niech n będzie liczbą naturalną. Która z liczb jest większa: $\sqrt{n} + \sqrt{n + 2}$ czy $2\sqrt{n + 1}$?

7. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają nierówności

$$a + b + c \leqslant 3d, \quad b + c + d \leqslant 3a, \quad c + d + a \leqslant 3b, \quad d + a + b \leqslant 3c.$$

Wykaż, że $a = b = c = d$.

8. Liczby a, b, c są rzeczywiste. Udowodnij, że wśród trzech liczb $a - b^2$, $b - c^2$, $c - a^2$ przynajmniej jedna jest mniejsza lub równa $\frac{1}{4}$.

9. Załóżmy, że $0 < a_1, a_2, \ldots, a_n < 1$. Udowodnij, że

$$a_1 a_2 \ldots a_n \leqslant \frac{1}{2^n} \quad \text{lub} \quad (1 - a_1)(1 - a_2)\ldots(1 - a_n) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

10. Która z pięciu liczb a, b, c, d, e jest najmniejsza, a która największa, jeśli spełniają one nierówności

$$a + b < c + d, \quad b + c < d + e, \quad c + d < e + a, \quad d + e < a + b.$$

11. Wykaż, że dla liczb dodatnich a, b prawdziwe są nierówności

(a) $\left(\frac{1}{a} + 3b\right)\left(\frac{1}{b} + 3a\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geqslant 24$, (b) $(a+b) \cdot \sqrt{\frac{a + b}{2}} \geqslant a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$.

12. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{ab + ad + bc + cd}{a + b + c + d} \geqslant \frac{ab}{a + b} + \frac{cd}{c + d}.$$

13. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równości

$$a + b + c = 1 \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Udowodnij, że $a \cdot b \cdot c \leqslant 0$.

14. Agent Tajny pływa w środku kwadratowego basenu, Wrogi Agent stoi w jednym z rogów. Wrogi Agent nie umie pływać, ale biega 4 razy szybciej niż Agent Tajny pływa. Agent Tajny biega szybciej niż Wrogi Agent. Czy Agent Tajny może uciec Wrogiemu Agentowi?

Analiza - klasa 1a Zestaw 7. 7.11.2023

Indukcja matematyczna I

Zasada indukcji matematycznej. Dla $n \in \mathbb{N}$ niech T_n oznacza zdanie, które, w zależności od n, może być prawdziwe lub fałszywe.

Jeżeli spełnione są oba warunki:

(i) *baza indukcji*: prawdziwe jest zdanie T_1 ,

(ii) *krok indukcyjny*:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad T_n \quad \Rightarrow \quad T_{n+1},$$

czyli dla każdej liczby naturalnej n ze zdania T_n wynika zdanie T_{n+1},

to dla każdej liczby naturalnej n zdanie T_n jest prawdziwe.

Uwaga: Bazą indukcji może być także zdanie T_k, gdzie k jest pewną liczbą całkowitą. Wówczas krok indukcyjny polega na udowodnieniu dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant k$ implikacji $T_n \quad \Rightarrow \quad T_{n+1}$. Wówczas zdanie T_n jest prawdziwe dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant k$.

---

1. Za pomocą zasady indukcji wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są równości:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$,

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k = (n+1)! - 1$,

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{n+1} - 1$

(h) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ $(n \geqslant 2)$,

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$,

2. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

(a) $6 \mid n^3 + 5n$,

(b) $9 \mid 4^n + 15n - 1$,

(c) $3 \mid 10^n + 4^n - 2$,

(d) $11 \mid 2^{6n+1} + 3^{2n+2}$,

(e) $37 \mid 1000^n - 1$,

(f) $13 \mid 1000^n + (-1)^{n+1}$,

(g) $41 \mid 5 \cdot 7^{2(n+1)} + 2^{3n}$,

(h) $10 \mid 2^{(2^{n+1})} - 6$.

3. Znajdź i udowodnij wzór na sumę pierwszych n liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1.

4. Znajdź i udowodnij wzory na sumy

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$.

5. **(WAŻNE!!)** Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n i liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest tożsamość

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Natomiast jeśeli liczba n jest nieparzysta, to prawdziwa jest tożsamość

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

6. Na płaszczyźnie narysowano n prostych w taki sposób, że żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Udowodnij, że proste te dzielą płaszczyznę na $(n^2 + n + 2)/2$ obszarów.

7. Na ile obszarów dzieli płaszczyznę n okręgów narysowanych tak, że każde dwa mają 2 punkty wspólne i żadne trzy nie mają puktu wspólnego?

8. Udowodnij, że wśród obszarów na jakie dzieli płaszczyznę n prostych, jest co najwyżej $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ obszarów ograniczonych.

9. Z tablicy o wymiarach 2^n na 2^n usunięto jedno pole o wymiarach 1 na 1. Udowodnij, że pozostałą część tablicy można pokryć nie zachodzącymi na siebie płytkami w kształcie litery L, składającymi się z 3 kwadratów.

10. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to zbiory. Udowodnij, że zbiór $A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n$ składa się z tych elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, które należą do nieparzystej liczby zbiorów A_k.

11. Agent Tajny dostał zadanie rozpracowania mafii handlującej dowodami fałszywych twierdzeń matematycznych. W tym celu organizuje on siatkę n informatorów stosując następującą zasadę: dla dowolnych dwóch różnych informatorów pierwszy przekazuje informacje drugiemu albo drugi pierwszemu. Udowodnij, że pewien informator będzie mógł otrzymywać informacje od pozostałych bezpośrednio lub z udziałem tylko jednego pośrednika. (Nie wymagamy, aby pośrednik był zawsze ten sam!)

12. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $2^{(2^n)} - 1$ ma co najmniej n różnych dzielników pierwszych.

Analiza - klasa 1a Zestaw 9. 21.11.2023

Indukcja matematyczna II

1. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

$$\sqrt{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}.$$

2. Wykaż, że dla $n \in \mathbb{N}$ i $a, b > 0$ zachodzi nierówność

$$(a+b)^n \leqslant 2^{n-1}(a^n + b^n).$$

3. Znajdź wszystkie liczby naturalne n spełniające nierówność

(a) $2^n > n^2$

(b) $n! > n^3$

(c) $3^n > (n+1) \cdot 2^n$

(d) $2^{n+1}(n!)^2 < (2n)!$

(e) $(n!)^2 > n^n$

(f) $(2n)! > 3^{n-1} \cdot (n!)^2 + 4^n$

4. Dane są liczby dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takie, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$. Udowodnij, że $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \leqslant 1$.

5. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{3n}{2n+1} \leqslant 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

6. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

(a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2}$

(b) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{7}{12}$

7. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

8. Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą (czyli $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, itd.) Udowodnij, że $p_n > 3n$ dla $n \geqslant 12$.

9. Udowodnij **nierówność Bernoulliego:**

Dla każdej liczby naturalnej n i liczby rzeczywistej $x \geqslant -1$ prawdziwa jest nierówność

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

10. Kiedy nierówność Bernoulliego staje się równością?

11. Udowodnij **nierówność Weierstrassa**:

Dla liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n > -1$, które wszystkie są tego samego znaku, prawdziwa jest nierówność

$$(1+x_1) \cdot (1+x_2) \cdot \ldots \cdot (1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

12. Niech $x \geqslant 0$ i $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij nierówność

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

Analiza - klasa 1a Zestaw 9. 22.10.2023

Powtórzenie - nierówności, zasada indukcji

1. Zaznacz zbiór rozwiązań nierówności na osi liczbowej i zapisz go jako sumę rozłącznych przedziałów lub półprostych:

(a) $(2x+1)^2 - 4 < 0$,

(b) $(x+1)(x-2)(x-5) \geqslant 0$,

(c) $(x^2-9)(x^2+9)(x+2) < 0$,

(d) $(x^2+2x+2)(4x-5)(4-5x)(6x+5) \leqslant 0$.

2. Dane są liczby dodatnie a, b, c, d takie, że

$$a+b < c+d \quad \text{i} \quad a+c < b+d.$$

Udowodnij, że

$$a \cdot (a+b+c) < d \cdot (b+c+d).$$

3. Liczby x, y, z są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$(x+y)(y+z) \leqslant x^2 + 2y^2 + z^2.$$

4. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant \sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right).$$

5. Załóżmy, że $x, y, z > 0$. Udowodnij, że

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqslant 9.$$

6. Udowodnij wzory:

(a) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

(b) $\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$,

(c) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-k-1}{k!} = 1 - \frac{n+1}{n!}$.

7. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij przez indukcję, że

(a) $9 \mid 5^{2n} + 3n - 1$,

(b) $25 \mid 2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$,

(c) $19 \mid 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$.

8. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność

$$2 \cdot \prod_{k=1}^{n}\frac{3^k}{3^k+1} > 1 + \frac{1}{3^n}.$$

9. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

(a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1$

(b) $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n}} < 3$

10. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n takie, że spełniona jest nierówność

(a) $3^n > n \cdot 2^n$,

(b) $2^n + n^2 < 3^n$,

(c) $n \cdot 5^n > 3^{n+1} + (n+1)^2 \cdot 2^n$.

Analiza - klasa 1a Zestaw 10. 5.12.2023

Indukcja matematyczna III

Silna indukcja: Dla każdej liczby naturalnej n dane jest pewne zdanie T_n. Jeżeli
(i) zdanie T_1 jest prawdziwe,
(ii) dla każdej liczby naturalnej k z prawdziwości zdań $T_1, T_2, \ldots, T_k$ wynika prawdziwość zdania T_{k+1}
to każde ze zdań T_n jest prawdziwe.

Indukcja Cauchy'ego: Dla każdej liczby naturalnej n dane jest pewne zdanie T_n. Jeżeli
(i) zdanie T_1 jest prawdziwe,
(ii) dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi implikacja $T_{2^{k-1}} \quad \Rightarrow \quad T_{2^k}$,
(ii) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi implikacja $T_{n+1} \quad \Rightarrow \quad T_n$,
to każde ze zdań T_n jest prawdziwe.

---

1. Wskaż błąd w poniższym rozumowaniu:

Udowodnimy, że wszystkie koty są tego samego koloru, tzn. dla każdej liczby naturalnej n wykażemy zadanie T_n : każde n kotów jest tego samego koloru.

T_1 jest zdaniem prawdziwym, bo jest tylko jeden kot.

Załóżmy, że prawdziwe jest zdanie T_k. Rozważmy dowolną grupę $k+1$ kotów i ponumerujmy koty liczbami $1, 2, \ldots, k, k+1$. Koty o numerach $1, 2, \ldots, k$ są tego samego koloru, bo jest ich k, tak samo koty o numerach $2, 3, \ldots, k+1$ są tego samewgo koloru, bo jest ich k. Zatem dla dowolnego $j = 1, 2, \ldots, k$ koty o numerach j i $j+1$ są tego samego koloru, więc wszystkie $k+1$ kotów jest tego samego koloru. Na mocy zasady indukcji zdanie T_n jest prawdziwe dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

2. Udowodnij, że jeśli n jest liczbą całkowitą większą od 3, to kwotę n złotych można wypłacić monetami 2 i 5 złotowymi.

3. Dana jest liczba rzeczywista x taka, że liczba $x + \dfrac{1}{x}$ jest całkowita. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $x^n + \frac{1}{x^n}$ też jest całkowita.

4. Załóżmy, że $a_1 = 5$, $a_2 = 13$ oraz $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

$$a_n = 2^n + 3^n \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

5. W każde pole tabeli o 3 wierszach i n kolumnach wpisano literę α, β lub γ, przy czym każdą z liter wpisano w dokładnie n pól. Udowodnij, że można tak poprzestawiać litery w każdym wierszu, aby w każdej kolumnie znalazły się trzy różne litery.

6. Wierzchołki n-kata wypukłego pomalowano trzema różnymi kolorami, przy czym każdy kolor został użyty do pomalowania co najmnieje jednego wierzchołka oraz każde dwa kolejne wierzchołki pomalowano różnymi kolorami. Udowodnij, że wielokąt można podzielić przekątnymi na trójkąty w taki sposób, że wierzchołki każdego trójkąta będą pomalowane na różne kolory.

7. Udowodnij, że każdą liczbę naturalną można zapisać jako sumę różnych potęg całkowitych nieujemnych liczby 2.

8. Znajdź wszystkie liczby naturalne n o własności, że grupę składającą się z n osób można podzielić na zespoły cztero- i pięcioosobowe.

9. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ istnieje n różnych dzielników liczby $n!$, których suma jest równa $n!$.

10. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i $y_1, y_2, \ldots, y_m$ to liczby naturalne takie, że

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_m < nm.$$

Udowodnij, że z każdej z sum $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ i $y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ można usunąć część wyrazów (ale nie wszystkie) tak, że sumy pozostałych wyrazów też będą równe.

11. Stosując indukcję Cauchy'ego udowodnij **nierówność Cauchy'ego:** Dla liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Ponadto, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

12. Stosując indukcję Cauchy'ego udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant \left(1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\right)^n.$$

Analiza - klasa 1a Zestaw 11. 6.12.2023

Nierówność Cauchy'ego

Definicja. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

- liczbę $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ nazywamy *średnią arytmetyczną* liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- dla $a_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, liczbę $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ nazywamy *średnią geometryczną* liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- dla $a_k \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, liczbę $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$ nazywamy *średnią harmoniczną* liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Twierdzenie (nierówność Cauchy'ego). Dla liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Ponadto, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Wniosek (nierówność między średnią geometryczną i harmoniczną). Dla liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Ponadto, rówość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

---

1. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n.$$

2. Dana jest liczba naturalna n. Udowodnij, że

$$n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

3. Korzystając z nierówności Cauchy'ego, udowodnij nierówność Bernoulliego.

4. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}.$$

5. Liczby a, b, c są dodatnie i $abc = 1$. Wykaż, że

$$a^4 + 2b^2 + 4c \geqslant 7.$$

6. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z prawdziwa jest nierówność

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 8\sqrt{xyz} - 16.$$

Kiedy ta nierówność staje się równością?

7. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

8. Liczby a, b, c, d są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a+b+c+d}.$$

9. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie. Udowodnij, że

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

10. Niech $0 \leqslant x \leqslant 3$. Wyznacz maksymalną wartość wyrażenia $x^2 \cdot \sqrt{3-x}$ i wskaż liczbę x, dla której ta wartość jest przyjmowana.

11. Wyznacz maksymalną wartość wyrażenia $(1+x)^4 \cdot \sqrt[3]{1-x}$, gdzie $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Wskaż liczbę x, dla której ta wartość jest przyjmowana.

12. Dane są liczby dodatnie $a_1, \ldots, a_n$, takie że $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$ oraz $k \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

$$\frac{1}{a_1^k} + \frac{1}{a_2^k} + \ldots + \frac{1}{a_n^k} \geqslant n^{k+1}.$$

13. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ spełniona jest nierówność

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} \leqslant \sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)}.$$

14. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunek $abcd = 1$. Udowodnij, że

$$\frac{a}{b+c+d+1} + \frac{b}{c+d+a+1} + \frac{c}{d+a+b+1} + \frac{d}{a+b+c+1} \geqslant 1.$$

15. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ są dodatnie. Udowodnj nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i b_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \geqslant 4n^2.$$

16. Niech $n \in \mathbb{N}$. Za pomocą nierówności Cauchy'ego udowodnij nierówności

(a) $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, (b) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$.

17. Udowodnij nierówność Cauchy'ego, korzystając z nierówności Bernoulliego.

Analiza - klasa 1a   Zestaw 12.   20.12.2023

Ciągi jednomonotoniczne

Definicja. Mówimy, że dwa ciągi liczb rzeczywistych $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ są *jednomonotoniczne*, jeżeli $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ i $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ lub $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ i $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$.

Umawiamy się, że dla dwóch ciągów liczb rzeczywistych $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.$$

Mówimy, że ciąg $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n)$ jest *permutacją* ciągu $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, jeżeli zmieniając kolejność wyrazów w jednym ciągu możemy otrzymać drugi.

Twierdzenie. Jeżeli ciągi liczb rzeczywistych $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ są jednomotoniczne, to to dla dowlonej permutacji $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n)$ ciągu $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ zachodzą nierówności

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b'_1 & b'_2 & \ldots & b'_n \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_n & b_{n-1} & \ldots & b_1 \end{bmatrix}.$$

---

1. Liczby a, b są dodatnie. Udowodnij nierówności

(a) $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$,

(b) $a^2 + b^2 \leqslant \dfrac{a^3}{b} + \dfrac{b^3}{a}$,

(c) $\dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3} \leqslant \dfrac{1}{a^3}\sqrt{\dfrac{b}{a}} + \dfrac{1}{b^3}\sqrt{\dfrac{a}{b}}$,

(d) $\sqrt{\dfrac{a^2}{b}} + \sqrt{\dfrac{b^2}{a}} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$

2. Liczby x, y są dodatnie, $m, n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $a^{m+n} + b^{m+n} \geqslant a^mb^n + a^nb^m$.

3. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzą nierówności

(a) $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2b + b^2c + c^2a$

(b) $a^3b + b^3c + c^3a \geqslant a^2bc + b^2ca + c^2ab$

(c) $\dfrac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geqslant \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

4. Udowodnij, że dla liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1}{a_2^2} + \frac{a_2}{a_3^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n^2} + \frac{a_n}{a_1^2} \geqslant \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}.$$

5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^3b}{c} + \frac{a^3c}{b} + \frac{b^3a}{c} + \frac{b^3c}{a} + \frac{c^3a}{b} + \frac{c^3b}{a} \geqslant 6abc.$$

6. Wykaż, że dla dowolnej permutacji $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\frac{a_1}{a'_1} + \frac{a_2}{a'_2} + \ldots + \frac{a_n}{a'_n} \geqslant n.$$

Następnie za pomocą tej nierówności udowodnij nierówność Cauchy'ego.

7. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c są dodatnie, to

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

8. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

9. Dane są liczby $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ i $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n$ i permutacja $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ciągu $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(x_k - z_k)^2.$$

10. **Nierówność Czebyszewa.** Niech $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots a_n$ i $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Udowodnij, że wówczas

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

11. Niech $k \in \mathbb{N}$ i $a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 0$. Udowodnij, że wówczas zachodzi nierówność

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

12. Niech a, b, c to długości boków pewnego trójkąta. Udowodnij nierówności

$$\frac{a(b+c-a)}{bc} + \frac{b(c+a-b)}{ca} + \frac{c(a+b-c)}{ab} \leqslant 3 \leqslant \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c}.$$

13. Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb naturalnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \ldots + \frac{x_n}{n^2} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

14. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie i $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Udowodnij, że wówczas prawdziwe są nierówności

(a) $\dfrac{a_1}{S-a_1} + \dfrac{a_2}{S-a_2} + \ldots + \dfrac{a_n}{S-a_n} \geqslant \dfrac{n}{n-1}$,

(b) $\dfrac{S}{S-a_1} + \dfrac{S}{S-a_2} + \ldots + \dfrac{S}{S-a_n} \geqslant \dfrac{n^2}{n-1}$.

Analiza - klasa 1a Zestaw 13. 10.1.2024

Nierówności

1. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

(a) $\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2-n} \geqslant 2n-1$,

(b) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+2n} < \frac{1}{n+3}$

(c) $\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n-1} < \frac{1}{\sqrt[n]{2n-1}}$.

2. Dla danej liczby naturalnej n rozstrzygnij, która z liczb jest większa: n^n czy $(n+1)^{n-1}$

3. Dla danej liczby naturalnej n rozstrzygnij, która z liczb jest większa: $\sqrt[n+1]{n+1}$ czy $\sqrt[n]{n}$.

4. Niech $x, y, z \geqslant 0$. Udowodnij nierówność

$$\frac{(x+y+z)^2}{3} \geqslant x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}.$$

5. Liczy dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają warunek $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1$. Udowodnij, że

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{x_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{x_n}\right) \geqslant (n+1)^n.$$

6. Wyznacz maksymalną wartość wyrażenia $(2+x)^3 \cdot \sqrt[4]{2-x}$, gdzie $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Wskaż liczbę x, dla której ta wartość jest przyjmowana.

7. Niech $m, n \in \mathbb{N}$ i $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Wyznacz maksymalną wartość iloczynu

$$(x-a)^m \cdot (b-x)^n,$$

gdzie $a \leqslant x \leqslant b$.

8. Niech $n \in \mathbb{N}$. Znajdź najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$\left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right)^n + \left(1 + \frac{a-b}{a+b}\right)^n,$$

gdzie $a, b > 0$.

9. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie oraz $a_{n+1} = a_1$ i $a_{n+2} = a_2$. Udowodnij nierówność

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 a_{k+1}^2 a_{k+2}^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^3 a_{k+1}^3}\right) \geqslant n^2.$$

10. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność

$$n \cdot \sqrt[n]{n+1} < n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

11. Niech $a > 1$ i $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij nierówność

$$a^n - 1 > n\left(\sqrt{a^{n+1}} - \sqrt{a^{n-1}}\right).$$

12. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij nierówność

$$\prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{\frac{k}{k+1}} \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

13. Liczby a, b, c są dodatnie. Udowodnij nierówności

$$a+b+c \leqslant \frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b} \leqslant \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

14. Liczby a, b, c, d są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geqslant a^2b + b^2c + c^2d + d^2a.$$

15. (*) Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}}{3} \leqslant \sqrt[3]{a \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b+c}{3}}.$$

16. (*) Udowodnij, że każdą liczbę naturalną n można jednoznacznie zapisać jako sumę

$$n = \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot j!,$$

gdzie k jest liczbą naturalną i a_j to liczby całkowite takie, ża $0 \leqslant a_j \leqslant j$ dla $j = 1, 2, \ldots, k$.

Wprowadzenie do funkcji

Definicje. Jeżeli każdemu elementowi x zbioru X został przyporządkowany dokładnie jeden element y zbioru Y, to mówimy, że została określona *funkcja* przekształcająca zbiór X w zbiór Y. Jeśli taką funkcję oznaczymy przez f, to piszemy $f: X \to Y$.

- Jeżeli $y \in Y$ jest elementem przyporządkowanym elementowi $x \in X$, to piszemy $y = f(x)$ i mówimy, że y jest *wartością* funkcji f dla *argumentu* x
- Zbiór X nazywamy *dziedziną* funkcji f, a zbiór Y *przeciwdziedziną* funkcji f.
- Dla podzbioru $U \subset X$ *obrazem* zbioru U względem funkcji f nazywamy zbiór
$$f(U) = \{f(x) \in Y : x \in U\}.$$
Zbiór $f(X)$ nazywamy *obrazem funkcji* f.
- Funkcję f taką, że dla dowolnych $u, v \in X$ zachodzi $f(u) = f(v)$ nazywamy funkcją *stałą*.
- Funkcję $f: X \to X$ taką, że dla każdego $x \in X$ zachodzi $f(x) = x$ nazywamy *identycznością* na zbiorze X.
- Dwie funkcje $f, g : X \to Y$ są równe, jeżeli dla każdego $x \in X$ zachodzi $f(x) = g(x)$. Możemy wówczas napisać $f = g$.
- Powiemy, że funkcja f jest *różnowartościowa* (1 - 1), jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ z równości $f(x_1) = f(x_2)$ wynika, że $x_1 = x_2$ czyli
$$\forall_{x_1, x_2 \in X}\; f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2.$$
Piszemy wówczas $f: X \overset{1-1}{\to} Y$. Funkcje różnowartościowe są też nazywane *injekcjami*.
- Powiemy, że funkcja f jest *na*, jeżeli każdy element Y jest wartością funkcji f, czyli
$$\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X}\; y = f(x).$$
Piszemy wówczas $f: X \overset{\text{na}}{\to} Y$. Funkcje „na” są nazywane są *surjekcjami*.
- Funkcję, która jest jednocześnie różnowartościowa i „na” nazywamy *bijekcją* lub funkcją *wzajemnie jednoznaczną* i piszemy $f: X \underset{\text{na}}{\overset{1-1}{\to}} Y$.

Złożenie funkcji $f: X \to Y$ i $g: Y \to Z$ jest to funkcja $g \circ f : X \to Z$, której wartość dla elementu $x \in X$ jest zdefiniowana jako
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$
Składanie funkcji jest łączne, tzn. jeśli $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to U$, to $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Definicja. Funkcja $g: Y \to X$ jest *funkcją odwrotną* do funkcji $f: X \to Y$, jeżeli $g \circ f$ jest identycznością na zbiorze X i $f \circ g$ jest identycznością na zbiorze Y. Funkcję g oznaczamy wówczas f^{-1}.

Twierdzenie. Funkcja $f: X \to Y$ posiada funkcję odwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy f jest bijekcją.

Wniosek. Jeżeli funkcja f ma funkcję odwrotną, to tylko jedną.

1. Naszkicuj wykresy i wyznacz obrazy funkcji:

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$,
(b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$,
(c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$,
(d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$,
(e) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
(f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,
(g) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x+2| - 2$.
(h) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$,

Która z tych funkcji jest injekcją, surjekcją czy bijekcją?

2. Niech $k \in \mathbb{N}$. Czy funkcja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n}$, jest różnowartościowa?

3. Podaj przykłady funkcji (a) $f: \mathbb{Z} \overset{1-1}{\to} \mathbb{N}$, (b) $g: \mathbb{N} \overset{\text{na}}{\to} \mathbb{Z}$.

4. Podaj przykład funkcji przekształcającej zbiór $\mathbb{N}$ **na** zbiór liczb wymiernych dodatnich.

5. Podaj przykład funkcji $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takich, że $f \circ g \neq g \circ f$.

6. Rozstrzygnij, czy istnieje funkcja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest równość $f(f(n)) = f(n) + 1$ oraz $1 \in f(\mathbb{N})$.

7. Zbiór A ma skończenie wiele elementów i $f: A \to A$. Udowodnij równoważność warunków: (i) f jest injekcją (ii) f jest surjekcją (iii) f jest bijekcją.

8. Niech $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

- Każdą funkcję wzajemnie jednoznaczną $f: A_n \to A_n$ nazywamy *permutacją* zbioru n-elementowego A_n.
- Permutację f taką, że dla pewnych różnych elementów $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A_n$ zachodzi $f(a_i) = a_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$, $f(a_k) = f(a_1)$ i $f(x) = x$ dla $x \neq a_1, \ldots, a_k$, nazywamy *cyklem* długości k i zapisujemy $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Cykl długości 2 nazywamy *transpozycją*.
- Mówimy, że cykle $(a_1, \ldots, a_k)$ i $(b_1, \ldots, b_l)$ są rozłączne, jeśli $\{a_1, \ldots, a_k\} \cap \{b_1, \ldots, b_l\} = \emptyset$.

(a) Udowodnij, że każdą permutację można przedstawić jako złożenie pewnej liczby parami rozłącznych cykli.

(b) Udowodnij, że każdą permutację można przedstawić jako złożenie pewnej liczby transpozycji.

9. Permutację f zapisano na dwa sposoby jako złożenie p transpozycji i jako złożenie q transpozycji. Udowodnij, że $2 \mid p - q$.

Funkcje liczbowe

Definicja. *Funkcja liczbowa* jest to dowolna funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}$.

Funkcje liczbowe $f, g : D \to \mathbb{R}$ (określone na tym samym zbiorze D) można dodawać, odejmować i mnożyć. Tak otrzymane funkcje oznaczamy $f + g$, $f - g$, fg. Jeśli $f(x) \neq 0$ dla każdego $x \in D$, to można rozważać iloraz funkcji $\frac{g}{f}$.

Definicja. Niech $D \subset \mathbb{R}$ i $x \in D \iff -x \in D$. Funkcję $f : D \to \mathbb{R}$ nazywamy *parzystą*, jeśli $f(x) = f(-x)$ dla każdego $x \in D$ i *nieparzystą*, jeśli $f(x) = -f(-x)$ dla dowolnego $x \in D$.

Monotoniczność funkcji. Mówimy, że funkcja f jest

- *rosnąca*, jeśli $f(x) < f(y)$, gdy $x < y$,
- *malejąca*, jeśli $f(x) > f(y)$, gdy $x < y$,
- *niemalejąca*, jeśli $f(x) \leqslant f(y)$, gdy $x < y$,
- *nierosnąca*, jeśli $f(x) \geqslant f(y)$, gdy $x < y$,
- *monotoniczna*, jeśli jest niemalejąca lub nierosnąca,
- *ściśle monotoniczna*, jeśli jest rosnąca lub malejąca

Przedział monotoniczności funkcji f jest to przedział, na którym funkcja f jest monotoniczna, który nie jest zawarty w większym przedziale o tej własności.

Przykład: funkcja $f(x) = x^2$ ma dwa przedziały monotoniczności: $(-\infty, 0]$, na którym maleje i $[0, +\infty)$, na którym rośnie.

Mówimy, że funkcja f jest ograniczona, jeśli istnieją stałe $A, B \in \mathbb{R}$ takie, że $A < f(x) < B$ dla dla każdego x.

Ekstrema funkcji. Powiemy, że funkcja f ma w punkcie $a \in D$

- *minimum (minimum globalne)*, jeżeli $f(x) \geqslant f(a)$ dla każdego $x \in D$. Wówczas piszemy $\min f = f(a)$ lub $\min\limits_D f = f(a)$;
- *maksimum (maksimum globalne)*, jeżeli $f(x) \leqslant f(a)$ dla każdego $x \in D$. Wówczas piszemy $\max f = f(a)$ lub $\max\limits_D f = f(a)$;
- *minimum lokalne*, jeżeli istnieje przedział $(b, c) \subset D$ taki, że $a \in (b, c)$ i $f(x) \geqslant f(a)$ dla każdego $x \in (b, c)$;
- *maksiumum lokalne*, jeżeli istnieje przedział $(b, c) \subset D$ taki, że $a \in (b, c)$ i $f(x) \leqslant f(a)$ dla każdego $x \in (b, c)$.

Minumum globalne lub maksimum globalne nazywamy *ekstremum globalnym*
Minumum lokalne lub maksimum lokalne nazywamy *ekstremum lokalnym.*

---

1. Wyznacz dziedziny funkcji

(a) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x - 7}{(x^2 - 2)(x + 1)(x^2 + 2)}$,

(b) $f(x) = \sqrt{x(x-1)(x-2)(x-3)}$,

(c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$,

(d) $f(x) = \sqrt{\sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{2x+1}}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{(x^2 + 2x)\sqrt[4]{x^4 - 13x^2 + 36}}$,

(f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x} - \sqrt[4]{4+x}}$.

2. Opisz, jak z wykresu funkcji $f(x)$ otrzymać wykres funkcji $f(x) + a$, $f(x + a)$, $af(x)$, $f(ax)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

3. Korzystając z poprzedniego zadania naszkicuj wykresy funkcji i wyznacz ich zbiory wartości:

(a) $f(x) = x^2 + 2x - 2$, (b) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 1}$, (c) $f(x) = \big||x - 2| - 2\big| - 2$.

4. Udowodnij, że każda funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest sumą funkcji parzystej i funkcji nieparzystej. Czy takie przedstawienie funkcji f jest tylko jedno?

5. Co można powiedzieć o (nie)parzystości funkcji $f + g$, fg, $f \circ g$ w zależności od (nie)parzystości funkcji f i g?

6. Udowodnij, że funkcja $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ jest rosnąca. Wyznacz funkcję f^{-1}.

7. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji, zbadaj czy funkcja jest ograniczona z góry lub z dołu, wyznacz jej ekstrema globalne (jeśli istnieją).

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$

(d) $f(x) = \big||x - 2| - 2\big|$, $x \in \mathbb{R}$

(e) $f(x) = \dfrac{x - 3}{2x + 1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

(f) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

8. Funkcje $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$ są niemalejące. Czy funkcje $g(x) = \min(f_1(x), f_2(x))$ i $h(x) = \max(f_1(x), f_2(x))$ również są niemalejące?

9. Funkcja $f : D \to E$ jest bijekcją i jest ściśle monotoniczna. Wykaż, że funkcja f^{-1} też jest monotoniczna.

10. Funkcje f i g są ściśle monotoniczne. Co można powiedzieć o monotoniczności funkcji $f \cdot g$ i $f \circ g$?

11. Punkt P jest środkiem symetrii wykresu funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Udowodnij, że P należy do tego wykresu.

12. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}$ spełniona jest równość $f(x) + f(y) = f(x + y)$.

13. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takie, że $f(m+n) = f(m)f(n)$ dla wszystkich $m, n \in \mathbb{N}$ oraz $f(f(k)) = f(k)^2$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$

14. Funkcja $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ spełnia równość $f(xf(y)) + f(yf(x)) = 2xy$ dla dowolnych $x, y \in (0, +\infty)$. Udowodnij, że f jest injekcją. Wyznacz wszystkie takie funkcje f.

15. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełania równość $f(f(x)+y) = 2x+f(f(y)-x)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że f jest surjekcją. Wyznacz wszystkie takie funkcje f.

16. Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełnia dla każdego $n \in \mathbb{N}$ nierówność $f(n + 1) > f \circ f(n)$. Udowodnij, że $f(n) = n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

17. Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest rosnąca i spełnia dla każdej liczby naturalnej n równość $f\big(f(n)\big) = 3n$ Oblicz $f(999)$.

Analiza - klasa 1a Zestaw 16. 13.3.2023

Funkcje – powtórzenie

Funkcja *signum*:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ -1 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

1. Wyznacz dziedzinę funkcji:

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x+5}}{\sqrt[3]{\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-2}}}$

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{(x-2)(x+3)}}$

(c) $f(x) = \sqrt{x + \dfrac{1}{x} - 2}$

(d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{4x-1}{2x+3}}$

2. Zbadaj, czy poniższe funkcje są parzyste lub nieparzyste:

(a) $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|$,

(b) $f(x) = \dfrac{x \cdot |x|}{x^3 + x}$,

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{\sqrt{|x| - 16}}$,

(d) $f(x) = \dfrac{|x-10|}{x+5} + \dfrac{|x+10|}{x-5}$

3. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ równanie $f(x)f(y) = f(xy)$. Udowodnij, że f jest funkcją parzystą lub nieparzystą.

4. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji, zbadaj czy funkcja jest ograniczona z góry lub z dołu, wyznacz jej ekstrema globalne (jeśli istnieją). Naszkicuj wykres każdej funkcji.

(a) $f(x) = |3x+1| - |3x-1|$, $x \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \big||2x-1| + 2\big|$, $x \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(d) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

5. Wykaż, że funkcja $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ jest ściśle monotoniczna, wyznacz jej obraz i wyznacz funkcję $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

6. Udowodnij, że funkcja $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}$$

jest różnowartościowa, wyznacz jej obraz i funkcję odwrotną $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

7. Wykaż, że funkcja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1}$$

jest różnowartościowa, jej obrazem jest przedział $[0, \frac{1}{2})$ i wyznacz jej funkcję odwrotną $f^{-1} : [0, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}$.

Wskazówka: Jeżeli funkcja ma funkcję odwrotną, to jest bijekcją.

8. Znajdź wszystkie funkcje $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ takie, że dla każdego $x \neq 1$ spełniona jest równość $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$.

9. Wyznacz wszystkie (a) injekcje, (b) surjekcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f(f(x) + y) = f(x+y) + 1$.

10. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest równość

(a) $f(x) \cdot f(y) - xy = f(x) + f(y) - 1$,

(b) $f(x+y)^2 = f(x)^2 + f(y)^2$,

(c) $f(x+y) - f(x-y) = 4xy$

(d) $f(x+y) + xy = f(x)f(y)$.

11. Dla jakich liczb naturalnych n istnieje permutacja f zbioru $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ taka, że dla każdej liczby $k \in A_n$

$$f(k) \neq k \qquad \text{i} \qquad f(f(k)) = k?$$

12. S_n oznacza zbiór wszystkich permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ i $p \in S_n$ jest ustaloną permutacją. Udowodnij, że funkcja $H : S_n \to S_n$ dana wzorem

$$H(g) = p \circ g$$

jest bijekcją.

Analiza - klasa 1a   Zestaw 17.   27.3.2024

Wartość bezwzględna

Najważniejsze własności wartości bezwzględnej:

(i) $|x| \geqslant x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Jeśli $a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$ to nierówność $|x| \leqslant a$ jest równoważna **koniunkcji** nierówności $-a \leqslant x \leqslant a$.

(iii) Jeśli $a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$ to nierówność $|x| \geqslant a$ jest równoważna **alternatywie** nierówności $x \geqslant a$ lub $x \leqslant -a$.

(iv) Jeśli $x, y \in \mathbb{R}$ to $|xy| = |x| \cdot |y|$ oraz, gdy $y \neq 0$, to $\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|$.

(v) Jeśli $x, y \in \mathbb{R}$, to $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ oraz $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y| \leqslant |x| + |y|$.

---

1. Rozwiąż równania:

(a) $|x+2| = 2(3-x)$
(b) $|x| - |x-2| = 2$
(c) $|x-3| + |x+4| = 9$
(d) $|2x| + 3x - 5 = |x-1|$
(e) $\big||x+1| - 2\big| = 1$
(f) $\big||x+2| - |x|\big| = 2$
(g) $2|x| + |x-1| + |x+1| = 4$
(h) $\big||x+1| - |x-1|\big| = 3$

2. Rozwiąż nierówności:

(a) $|5-2x| < 1$
(b) $|2-x| < 1-2x$
(c) $|3x-4| \geqslant 7$
(d) $|x-2| \leqslant |x+4|$
(e) $|x+2| - |x| > 1$
(f) $\big||x+3| - 2\big| \leqslant 1$
(g) $\big||x+3| - 2\big| > 3$
(h) $\dfrac{|x-2|}{x+1} > \dfrac{x-1}{|x+2|}$

3. Dla danje wartości $a > 0$ narysuj na płaszczyźnie z układem współrzędnych zbiory punktów (x, y) takich, że

(a) $|x| + |y| = a$ (b) $|x+y| = a$ (c) $\max(|x|, |y|) = a$ (d) $\big||x| - |y|\big| = a$

4. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} |x-y| = z \\ |y-z| = x \\ |z-x| = y \end{cases}.$$

5. Wyznacz liczbę rozwiązań równania w zależności od wartości parametru $m \in \mathbb{R}$:

(a) $\big||x| - 3\big| = m$ (b) $\big||x| - m\big| = 1$ (c) $\big||x-m| - 3\big| = 1$

6. Rozwiąż równanie

$$2\Big|x - \big|x + |x-1|\big|\Big| = \Big|x + \big|x - |x+1|\big|\Big|.$$

7. Zapisz $\min(a, b)$ i $\max(a, b)$ za pomocą wartości bezwględnej, dodawania, odejmowania, mnożenia i/lub dzielenia.

8. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji

$$f(x) = |x-1| + |x-2| + \ldots + |x-100|, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

9. Załóżmy, że $-1 < x, y < 1$. Wykaż, że $|x-y| < |1-xy|$.

10. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$|x| + |y| + |z| \leqslant |y+z-x| + |z+x-y| + |x+y-z|.$$

11. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$|x| + |y| + |z| + |x+y+z| \geqslant |x+y| + |y+z| + |z+x|.$$

12. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność

$$\left|\frac{x}{1+x^2} - \frac{y}{1+y^2}\right| \leqslant |x-y|.$$

13. Dla $x, y \in \mathbb{R}$ niech $d(x, y) = \dfrac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$. Udowodnij, że jeśli $x, y, z \in \mathbb{R}$, to

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$$

14. Udowodnij, że dla dowlnych liczb rzeczywistych x, y, z spełniona jest nierówność

$$\frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} + \frac{|z|}{1+|z|}.$$

15. Wykaż, że jeśli $a, b, c \in \mathbb{R}$, to

$$\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right| \leqslant |b-c|.$$

16. Wyznacz wszystkie funkcje $f : [0,1] \to [0,1]$ takie, że dla dowolnych $x, y \in [0,1]$

$$|f(x) - f(y)| = |x-y|.$$

17. Wykaż, że dla dowolnych funkcji $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ istnieją $x, y \in [0,1]$ takie, że

$$|f(x) + g(y) - xy| \geqslant \frac{1}{4}.$$

18. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \big(|a_i - a_j| + |b_i - b_j|\big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_i - b_j|.$$

Część całkowita

Część całkowitą (podłogę) liczby rzeczywistej x (ozn. $\lfloor x \rfloor$) definiujemy jako największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą x. Można także spotkać oznaczenie $[x]$.

Stw. Jeżeli x jest liczbą rzeczywistą i k jest liczbą całkowitą, to $\lfloor x \rfloor = k$ wtw. gdy $k \leqslant x < k+1$.

Najważniejsze własności części całkowitej:

(i) Jeśli $x < y$, to $\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$ (czyli funkcja $f(x) = \lfloor x \rfloor$ jest niemalejąca).

(ii) $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Jeśli $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$ to $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.

(iv) Jeśli $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$, to $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$.

(v) Jeśli $x, y \in \mathbb{R}$ to $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

(vi) Jeśli $x, y \geqslant 0$, to $\lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor xy \rfloor$.

Sufit liczby rzeczywistej x (ozn. $\lceil x \rceil$) definiujemy jako najmniejszą liczbę całkowitą większą lub równą x. Zachodzi równość $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.

Część ułamkowa liczby rzeczywistej x jest to liczba $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

---

1. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor .$$

2. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.

3. Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest dana wzorem $f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$. Wykaż, że f jest surjekcją i znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że $f(n) = 2023$.

4. Rozwiąż równania

(a) $\lfloor x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor = 17$,

(b) $\left\lfloor \frac{5+6x}{8} \right\rfloor = \frac{15x-7}{5}$,

(c) $\left\lfloor \frac{12x-5}{7} \right\rfloor = \frac{7x-6}{4}$,

(d) $\lfloor x - 1 \rfloor = \left\lfloor \frac{x+2}{2} \right\rfloor$,

(e) $\lfloor x \cdot \lfloor x \rfloor \rfloor = 1$,

(f) $\lfloor (x+1)^2 \rfloor = \lfloor x^2 \rfloor + 1$.

5. Wyznacz liczbę rozwiązań równania

$$x = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor .$$

6. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + \lfloor y \rfloor + \{z\} = 1,1 \\ \lfloor x \rfloor + \{y\} + z = 2,2 \\ \{x\} + y + \lfloor z \rfloor = 3,3 \end{cases}$$

7. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor .$$

8. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\lfloor 3x \rfloor + \lfloor 3y \rfloor + \lfloor 3z \rfloor \geqslant 2\left(\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor z \rfloor\right) + \lfloor x + y + z \rfloor .$$

9. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor .$$

10. Niech $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij *tożsamość Hermite'a*:

$$\lfloor nx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor .$$

11. Niech $x \in \mathbb{R}$. Oblicz sumę $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k < l \leqslant n} \left\lfloor \frac{x+k}{l} \right\rfloor$.

12. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste $x > 1$ takie, że liczba $\sqrt[n]{\lfloor x^n \rfloor}$ jest całkowita dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

13. Niech $x \geqslant 0$. Udowodnij równość $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

14. Wykaż, że jest nieskończenie wiele liczb wymiernych dodatnich q takich, że $\{q^2\} + \{q\} = 0,99$ i nie istnieje liczba wymierna dodatnia q taka, że $\{q^2\} + \{q\} = 1$.

15. Udowodnij, że $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \left\{ \sqrt{k} \right\} \leqslant \frac{n^2-1}{2}$ dla każdej liczby naturalnej n

16. Liczby a, b są dodatnie, niewymierne i $a + b = 1$. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\lfloor na \rfloor + \lfloor nb \rfloor = n - 1.$$

17. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$ i dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\lfloor na \rfloor + \lfloor nb \rfloor = \lfloor nc \rfloor .$$

Udowodnij, że $a + b = c$.

Zasada szufladkowa

Tw. 1. Niech $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $n+1$ przedmiotów rozmieszczamy w n szufladach, to w jednej z szuflad znajdą się co najmniej 2 przedmioty.

Tw. 2. Niech $k, n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $kn+1$ przedmiotów rozmieszczamy w n szufladach, to w jednej z szuflad znajdzie się co najmniej $k+1$ przedmiotów.

---

1. Na przyjęciu jest $n \geqslant 2$ gości. Udowodnij, że pewne dwie osoby mają taką samą liczbę znajomych wśród osób będących na przyjęciu.

2. W każde pole tabeli $n \times n$ wpisano jedną z liczb $-1, 0, 1$, a następnie dodano do siebie liczby z każdego wiersza, z każdej kolumny i z każdej z przekątnych. Udowodnij, że pewne 2 z otrzymanych sum są równe.

3. Na płaszczyźnie z układem współrzędnych wybrano 5 punktów kratowych (czyli o obydwu współrzędnych całkowitych). Wykaż, że 2 z nich są końcami odcinka, którego środek też jest punktem kratowym.

4. Udowodnij, że każdy zbiór składający się z n różnych liczb całkowitych zawiera niepusty podzbiór, którego suma elementów jest podzielna przez n.

5. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ wybrano $n+1$ róznych liczb. Wykaż, że z tych $n+1$ liczb można wybrać trzy liczby a, b, c (nie muszą być parami różne) takie, że $a = b + c$.

6. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ wybrano $n+1$ liczb. Udowodnij, że jedna z wybranych liczb jest dzielnikiem innej.

7. Liczba naturalna n nie jest podzielna przez 2 i 5. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele wielokrotności liczby n, których zapis dziesiętny składa się z samych cyfr 1.

8. Wybrano 20 różnych liczb naturalnych mniejszych od 70. Wykaż, że wśród wszystkich różnic par tych liczb są co najmniej 4 równe.

9. W trójkącie równobocznym o boku 4 rozmieszczono 17 punktów. Udowodnij, że odległość pewnych dwóch z nich nie przekracza 1.

10. Każdy punkt na okręgu pomalowano jednym z dwóch kolorów. Udowodnij, że pewien trójkąt równoramienny wpisany w ten okrąg ma wszystkie wierzchołki tego samego koloru.

11. Wewnątrz kwadratu o polu 1 obrano 51 punktów. Wykaż, że pewne 3 z nich leżą w kole o promieniu $\frac{1}{7}$.

12. Każde dwa wierchołki sześciokąta foremnego połączono odcinkiem zielonym lub czerwonym. Wykaż, że pewne trzy wierzchołki tego sześciokąta są wierzchołkami trójkąta o bokach tego samego koloru.

13. Każde dwa wierzchołki 17-kąta foremnego połączono odcinkiem pomalowanym na jeden z trzech kolorów. Wykaż, że pewne trzy odcinki tego samego koloru są bokami trójkąta.

14. Zapis dziesiętny liczby wymiernej $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{N}$ są liczbami względnie pierwszymi, jest ułamkiem okresowym. Wykaż, że okres tego ułamka wynosi co najwyżej $q-1$.

15. Adam ma 77 dni, aby przygotować się do olimpiady matematycznej. Codziennie chce rozwiązać co najmniej jedno zadanie, ale łącznie nie więcej niż 132. Udowodnij, że w ciągu kilku kolejnych dni rozwiąże dokładnie 21 zadań.

16. **Tw. Dirichleta.** Liczba x jest niewymierna. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją liczby całkowite p, q takie, że $1 \leqslant q \leqslant n$ oraz

$$|xq - p| \leqslant \frac{1}{n}.$$

17. Liczby od 1 do 101 zapisano w dowolnej kolejności. Wykaż, że można skreślić 90 z nich tak, że pozostałe 11 będzie ustawione w porządku rosnącym lub malejącym.

Analiza - klasa 1a Zestaw 20. 22.5.2024

Powtórzenie

1. Rozwiąż równania

(a) $|x-1|+|x|+|x+1|=x+2$,

(b) $|x-1|+|x-4|=2$,

(c) $\big||x-3|-2\big|=1$.

2. Dla jakich wartości $a\in\mathbb{R}$ równanie $(x-1)^2=|x-a|$ ma dokładnie 3 rozwiązania?

3. Rozwiąż nierówności

(a) $|x-2|+|x+1|\geqslant 3x-3$,

(b) $\big||x-3|-5\big|\leqslant 2$,

(c) $|2x+6|+|3x-12|+|x|<20$.

4. Liczby x,y,z spełaniają warunek $x+y+z=2$. Udowodnij, że

$$|1-x|+|1-y|+|1-z|\geqslant 1.$$

5. Załóżmy, że $-1\leqslant x,y,z\leqslant 1$. Udowodnij, że

$$2|xy+yz+zx|\leqslant |x+y|+|y+z|+|z+x|.$$

6. Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x,y,z prawdziwa jest nierówność

$$\frac{|x+2y|}{|y-z|}+\frac{|y+2z|}{|z-x|}+\frac{|z+2x|}{|x-y|}\geqslant 1.$$

7. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba $\lfloor\sqrt[n]{111}\rfloor$ dzieli liczbę 111.

8. Rozwiąż równania

(a) $\dfrac{19x+6}{10}=\left\lfloor\dfrac{4x+7}{3}\right\rfloor$,

(b) $\left\lfloor\dfrac{8x+19}{7}\right\rfloor=\dfrac{16(x+1)}{11}$,

(c) $\lfloor x+1\rfloor=\left\lfloor\dfrac{x-2}{2}\right\rfloor$,

(d) $x-\sqrt{\lfloor x\rfloor}=\frac{1}{2}$,

(e) $\lfloor x\rfloor+\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 4x\rfloor+\lfloor 6x\rfloor+\lfloor 8x\rfloor=2006$.

9. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\rfloor=\lfloor\sqrt{9n+8}\rfloor.$$

10. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n istnieją liczby całkowite a i b takie, że

$$n=\left\lfloor a\sqrt{2}\right\rfloor+\left\lfloor b\sqrt{3}\right\rfloor.$$

11. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba zapisana w systemie dziesiętnym przy pomocy zer i jedynek, która dzieli się przez n.

12. Udowodnij, że każdy wielościan wypukły ma co najmniej 2 ściany o tej samej liczbie boków.

13. Wybrano 16 liczb ze zbioru $\{1,2,\ldots,30\}$. Wykaż, że pewne dwie różnią się o 3.

14. Udowodnij, że ze zbioru 102 różnych liczb całkowitych można wybrać dwie, których suma lub różnica dzieli się przez 200.

Analiza - klasa 1a Zestaw 21. 29.5.2023

Kombinatoryka I

Niech A będzie zbiorem skończonym. *Moc zbioru* A jest to liczba jego elementów. Moc zbioru A zapisujemy jako $|A|$ lub $\overline{\overline{A}}$.

Reguła dodawania. Jeżeli zbiory skończone $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są parami rozłączne, to

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Reguła mnożenia. $A_1, A_2, \ldots, A_k$ to zbiory skończone. Liczba różnych ciągów k-elementowych $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ takich, że $a_j \in A_j$ dla $j = 1, 2, \ldots, k$ wynosi

$$|A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|.$$

Tw. Zbiory A i B są skończone. Wówczas

- $|A| = |B|$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bijekcja $f : A \to B$.
- $|A| \geqslant |B|$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje surjekcja $f : A \to B$.
- $|A| \leqslant |B|$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje injekcja $f : A \to B$

---

1. Numer dowodu osobistego składa się z trzech liter i sześciu cyfr. Ile różnych dowodów osobistych można wydać?

2. Ile jest różnych liczb czterocyfrowych, mających tą samą cyfrę setek i jedności?

3. Ile jest różnych liczb pięciocyfrowych o nie powtarzających się cyfrach?

4. W urnie znajdują się cztery kule oznaczone numerem 1 i jedna oznaczona numerem 5. Z tej urny losujemy kolejno bez zwracania trzy kule zapisując ich numery według kolejności losowania. Ile różnych liczb czterocyfrowych możemy otrzymać?

5. Ile różnych dzielników naturalnych ma liczba 17 640?

6. Ile jest liczb sześciocyfrowych, których cyfry należą do zbioru $\{1, 2, 3\}$

(a) większych od 230000,

(b) których kolejne cyfry różnią się o 1,

(c) które są większe od 230000 i ich kolejne cyfry różnią się o 1;

(d) które są większe od 230000 lub ich kolejne cyfry różnią się o 1.

7. Ile jest zgodnych z regułami gry w szachy ustawień na szachownicy 8×8 dwóch króli?

8. Ile jest możliwych ustawień na szachownicy dwóch hetmanów tak, aby jeden nie zagrażał drugiemu?

9. Zbiory $|A|$ i $|B|$ są skończone, $|A| = k$, $|B| = n$.

(a) Ile jest funkcji $f : A \to B$?

(b) Ile jest injekcji $f : A \to B$?

(c) Ile jest bijekcji $f : A \to B$?

10. Ile jest surjekcji ze zbioru 4 elementowego na zbiór 3 elementowy?

11. Ile jest różnych podzbiorów zbioru n-elementowego? (Zbiór pusty i cały zbiór też są podzbiorami).

12. Zbiór A jest niepusty i skończony. Udowodnij, że

(a) A ma tyle samo podzbiorów o parzystej i o nieparzystej liczbie elementów.

(b) Dla dowolnego elementu $a \in A$, zbiór A ma tyle samo podzbiorów zawierających a i nie zawierających a.

13. Udowodnij, że spośród dowolnych $2^{n-1} + 1$ różnych podzbiorów zbioru n-elementowego zawsze można wybrać dwa podzbiory rozłączne.

14. Niech $n \in \mathbb{N}$. Jakich podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ jest więcej: tych, których suma elementów jest parzysta, czy tych, których suma elementów jest nieparzysta?

15. Na ile sposobów można wybrać 2 rozłączne podzbiory zbioru n-elementowego?

16. Ile podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ nie zawiera dwóch kolejnych liczb?

17. Zbiór A ma n elementów, $B_j \subset A$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$, to różne podzbiory zbioru A, przy czym każde trzy z tych podzbiorów mają niepustą część wspólną. Udowodnij, że istnieje element należący do każdego ze zbiorów B_j.