Analiza - klasa 2a Zestaw 12. 10.12.2024

Funkcja kwadratowa I

Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$ nazywamy trójmianem kwadratowym, funkcją kwadratową, lub wielomianem stopnia 2 (zmiennej x).

Tw. 1. Postać kanoniczna i wyróżnik funkcji kwadratowej. Każdą funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c$ można zapisać w postaci

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \qquad \text{gdzie } \Delta = b^2 - 4ac,$$

zwaną *postacią kanoniczną*. We wzorze powyżej liczba Δ jest nazywana *wyróżnikiem* funkcji kwadratowej f.

Tw. 2. (przebieg zmienności funkcji kwadratowej). Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a > 0$, jest malejąca na przedziale $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ i rosnąca na przedziale $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$. W pukcie $x = \frac{-b}{2a}$ funkcja f przyjmuje wartość minimalną.

Jeżeli $a < 0$, to funkcja f jest rosnąca na przedziale $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ i malejąca na przedziale $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$. W pukcie $x = \frac{-b}{2a}$ funkcja f przyjmuje wartość maksymalną.

Tw. 3. Pierwiastki funkcji kwadratowej. Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ z wyróżnikiem $\Delta = b^2 - 4ac$

(i) ma dwa rózne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, jeżeli $\Delta > 0$, i wówczas

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(ii) ma jeden pierwiastek rzeczywisty x_1, jeżeli $\Delta = 0$, i wówczas $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$.

(iii) nie ma pierwiastków rzeczywistych, jeżeli $\Delta < 0$.

Tw. 4. Wzory Viete'a. Rozważamy funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c$. Niech $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne:

(i) Liczby x_1 i x_2 są (wszystkimi) pierwiastkami funkcji f.

(ii) $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$ (*Wzory Viete'a*).

(iii) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (*postać iloczynowa* funkcji kwadratowej).

1. Sprowadź trójmiany kwadratowe do postaci kanonicznej, znajdź ich pierwiastki, wyznacz przedziały, na których te funkcje są rosnące / malejące i określ ich wartość najmniejszą lub największą:

(a) $\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{6}$, (b) $-\sqrt{2}x^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{6}$, (c) $x^2 + x - 8$,

2. Wyznacz najmniejszą i największą wartość trójmianu kwadratowego na podanych przedziałach:

(a) $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$, na $[-4, 4]$ i $[1, 5]$.

(b) $g(x) = -4x^2 + 11x - 5$, na $[0, 5]$ i $[-1, 1]$.

3. Rozwiąż równania

(a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$,

(b) $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$,

(c) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$,

(d) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$

(e) $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2 = \dfrac{17}{4}$.

4. Dla danych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ rozwiąż równanie

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x + a + b}.$$

5. Niech $a, b, c > 0$. Czy jest możliwe, że każdy z trójmianów

$$ax^2 + bx + c, \quad cx^2 + ax + b, \quad bx^2 + cx + a$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste?

6. Niech $f(x) = ax^2 + bx + c$ i załóżmy, że równanie $f(x) = x$ nie ma rozwiazań rzeczywistych. Pokaż, że równanie $f(f(x)) = x$ też nie ma rozwiązań rzeczywistych.

7. Dany jest trójmian kwadratowy $f(x) = ax^2 + bx + c$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

(i) $\forall_{n\in\mathbb{Z}}\ f(n) \in \mathbb{Z}$,

(ii) liczby $f(-1)$, $f(0)$ i $f(1)$ są całkowite,

(iii) liczby $2a$, $a + b$ i c są całkowite.

8. Korzystając ze wzorów Viete'a, wyznacz (w pamięci) pierwiastki trójmianów

$$x^2 - 5x - 6, \quad x^2 - 6x + 8, \quad x^2 + 2x - 3, \quad 2x^2 + x - 1,$$
$$x^2 + 10x + 21, \quad 6x^2 - 5x - 1, \quad x^2 + x - 56, \quad 8x^2 + 2x - 3.$$

9. Rozwiąż równanie $x^2 + x = 1111111122222222$.

10. Liczby p i q są pierwiastkami trójmianu $x^2 + px + q$. Znajdź p i q.

11. Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami trójmianu $x^2 + ax + bc$, liczby x_2, x_3 są pierwiastkami trójmianu $x^2 + bx + ac$, przy czym $ac \neq bc$. Udowodnij, że liczby x_1, x_3 są pierwiastkami trójmianu $x^2 + cx + ab$.

12. Pierwiastki trójmianu $x^2 + ax + b + 1$ są liczbami naturalnymi. Udowodnij, że liczba $a^2 + b^2$ nie jest pierwsza.