Analiza - klasa 2a Zestaw 7. 17.10.2024

Teoria liczb II – kongruencje

Niech a i b będą liczbami całkowitymi, zaś m liczbą naturalną.

Definicja. Mówimy, że a *przystaje do* b *modulo* m wtedy i tylko wtedy, gdy $m \mid a-b$. Zapisujemy to jako

$$a \equiv b \pmod m \quad \iff \quad m \mid a-b$$

i nazywamy *kongruencją / przystawaniem modulo* m.

Zauważmy, że $a \equiv b \pmod m$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a i b dają te same reszty po podzieleniu przez m.

Jeżeli a nie przystaje do b modulo m, to piszemy $a \not\equiv b \pmod m$.

Stw. (Podstawowe własności kongruencji) Niech $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$.

(i) $a \equiv a \pmod m$ (zwrotność),

(ii) $a \equiv b \pmod m$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b \equiv a \pmod m$ (symetria),

(iii) jeśli $a \equiv b \pmod m$ i $b \equiv c \pmod m$, to $a \equiv c \pmod m$ (przechodniość),

(iv) jeśli $a \equiv b \pmod m$ i $c \equiv d \pmod m$, to $a+c \equiv b+d \pmod m$ oraz $a-c \equiv b-d \pmod m$;

(v) jeśli $a \equiv b \pmod m$ i $c \equiv d \pmod m$, to $ac \equiv bd \pmod m$.

Uwaga. Nie jest prawdą, że jeśli $a \equiv b \pmod m$ oraz $d \mid a$ i $d \mid b$, to $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod m$.

---

1. Wyznacz resztę z dzielenia liczby
(a) $28 \cdot 33 \cdot 73$ przez 35, (b) 111111 przez 7, (c) 123456789 przez 13

2. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n \equiv 3 \pmod 4$. Udowodnij, że n nie jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.

3. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n \equiv k \pmod 8$, gdzie $k = 3, 6, 7$. Udowodnij, że liczba n nie jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych.

4. Niech $n, m \in \mathbb{N}$ i r_k to reszta z dzielenia liczby n^k przez m dla $k = 1, 2, 3, \ldots$. Wykaż, że od pewnego momentu liczby r_k będą się powtarzać cyklicznie. Wyznacz te cykle dla (a) $n = 2$, $m = 17$; (b) $n = 6$, $m = 32$.

5. Znajdź resztę z dzielenia

(a) 3^{89} przez 7, (b) 4^{2022} przez 26, (c) 9^{1000} przez 210

6. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

(a) $7 \mid 2^{n+2} + 3^{2n+1}$,

(b) $13 \mid 3^{3n+1} + 9^{3n+1} + 1$,

(c) $21 \mid 2^{4^n} + 5$,

(d) $19 \mid 20^{2n} + 16^{2n} - 3^{2n} - 1$.

7. Wyznacz dwie ostatnie cyfry dziesiętne liczb

(a) $99^{99} - 51^{51}$,

(b) 5^{555},

(c) 9^{9^9},

(d) $3^{4^{5^{6^7}}}$.

8. Wyznacz resztę z dzielenia przez 7 liczby

$$\sum_{k=1}^{10} 10^{10^k}.$$

9. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których $7 \mid 2^n - 1$.

Wykaż, że $7 \nmid 2^n + 1$ dla każdej liczby naturalnej n.

10. Liczby a, b, c są całkowite i $9 \mid a^2 + b^2 + c^2$. Udowodnij, że

$$9 \mid a^2 - b^2 \quad \text{lub} \quad 9 \mid b^2 - c^2 \quad \text{lub} \quad 9 \mid c^2 - a^2.$$

11. Udowodnij, że $7 \mid 2222^{5555} + 5555^{2222}$.

12. Niech $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że liczby $2n+1$ i $3n+1$ są kwadratami liczb całkowitych. Udowodnij, że $40 \mid n$.

13. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

(a) $3 \mid n$ wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr dziesiętnych liczby n jest podzielna przez 3.

(b) $9 \mid n$ wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr dziesiętnych liczby n jest podzielna przez 9.

(c) $11 \mid n$ wtedy i tylko wtedy, gdy naprzemienna suma cyfr dziesiętnych liczby n jest podzielna przez 11.

14. Niech $x, y \in \mathbb{Z}$. Wykaż, że $7 \mid 10x + y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $7 \mid x - 2y$. Następnie sprawdź, czy $7 \mid 4\,378\,479$.

15. Wiedząc, że zapis dziesiętny liczby 34! to

$$34! = 295232799039a041408476186096435b0000000,$$

wyznacz cyfry a i b.