Analiza - klasa 2a Zestaw 6. 10.10.2024

Teoria liczb I – podzielność liczb

Niech $a, b \in \mathbb{Z}$. Mówimy, że liczba a jest dzielnikiem liczby b (liczba b jest podzielna przez a), jeżeli istnieje liczba $c \in \mathbb{Z}$ taka, że $b = a \cdot c$. Piszemy wtedy $a \mid b$. Jeżeli a nie jest dzielnikiem b, piszemy $a \nmid b$.

Przydatne własności podzielności liczb:

(i) $a \mid 0$ oraz $a \mid a$ dla każdej liczby całkowitej a.

(ii) Jeżeli $a \mid b$ i $b \neq 0$, to $|a| \leqslant |b|$.

(iii) Jeżeli $a \mid b$ i $a \mid c$ oraz $x, y \in \mathbb{Z}$, to $a \mid bx + cy$.

(iv) Jeżeli $a \mid b$ i $b \mid c$, to $a \mid c$.

(v) Jeżeli $a \mid b$ i $b \mid a$, to $|a| = |b|$.

(vi) Jeżeli $a \mid b$ i $b \neq 0$, to $\frac{b}{a} \mid b$.

(vii) Jeżeli $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ to $a \mid b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ac \mid bc$.

Tw. o dzieleniu z resztą. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b istnieją jednoznacznie wyznaczone liczby całkowite k i r takie, że $0 \leqslant r \leqslant a-1$ oraz $b = ak+r$. Liczbę r nazywamy resztą z dzielenia a przez b.

W dowodzie tw. o dzieleniu z resztą, jak i w dowodach innych twierdzeń z teorii liczb, można skorzystać z następującego twierdzenia:

Zasada minimum. Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb naturalnych zawiera element najmniejszy.

Przypomnienie: **Najważniejsza tożsamość arytmetyki:**

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

---

1. Znajdź wszystkie liczby $n \in \mathbb{Z}$ takie, że

(a) $n+1 \mid n^2+1$,

(b) $n-1 \mid n^5+5$.

2. Udowodnij, że $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$.

3. Udowodnij (korzystając tylko z zawartości tej kartki), że jeśli liczba nieparzysta d jest dzielnikiem liczby $2^k n$, gdzie $k, n \in \mathbb{N}$, to d jest dzielnikiem n.

4. Znajdź wszystkie liczby $n \in \mathbb{Z}$ takie, że $2n+1 \mid n^3 - 3n + 2$.

5. Liczba n jest nieparzysta. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $3n^3 + 2n^2 + n - 1$ przez 8.

6. Liczba k jest parzysta. Czy istnieje k liczb naturalnych nieparzystych $n_1, n_2, \ldots, n_k$ takich, że

$$1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_k}?$$

7. Niech $n \in \mathbb{Z}$. Jakie są możliwe reszty z dzielenia n^2 przez $3, 4, 7$?

8. Liczby a i b są nieparzyste. Wykaż, że liczba $a^2 + b^2$ nie jest kwadratem.

9. Suma reszt z dzielenia liczb całkowitych a, b przez d wynosi d. Udowodnij, że

(a) $d \mid a^k - b^k$ dla dowolnej liczby naturalnej parzystej k,

(b) $d \mid a^k + b^k$ dla dowolnej liczby naturalnej nieprarzystej k.

10. Udowodnij, że iloczyn n kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez $n!$.

11. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ i $a - c \mid ab + cd$. Wykaż, że $a - c \mid ad + bc$.

12. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba otrzymana z n poprzez usunięcie cyfry jedności w zapisie dziesiętnym jest dzielnikiem n.

13. Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{Z}$ oraz $a + b \mid a^2 + ab + b^2$. Udowodnij, że

$$(a+b)^2 \mid a^4 + b^4.$$

14. Niech $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Wykaż, że $6 \mid a+b+c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $6 \mid a^3 + b^3 + c^3$.

15. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ i

$$d \mid a+b+c \qquad \text{oraz} \qquad d \mid a^2+b^2+c^2.$$

Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$d \mid a^{(2^n)} + b^{(2^n)} + c^{(2^n)}.$$

16. Liczby $p, q > 2$ są nieparzyste. Udowodnij, że

$$p \mid 1^q + 2^q + \ldots + (p-1)^q.$$