Analiza - klasa 2a Zestaw 5. 3.10.2024

Powtórzenie

1. Każde pole tabeli o 2 wierszach i 10 kolumnach kolorujemy jednym z 10 kolorów. Ile jest pokolorowań tabeli takich, że pola w każdym wierszu są różnych kolorów?

2. Oblicz, na ile sposobów można zapisać w jednym rzędzie cyfry 0, 1, 2, ..., 9 tak, aby

(a) 0 i 1 występowały obok siebie,

(b) 0 i 1 nie występowały obok siebie,

(c) 0, 1 i 2 nie występowały obok siebie,

(d) ani 0 i 1, ani 8 i 9 nie występowały obok siebie.

3. Na ile sposobów można wybrać 4 uczniów z 2 klas liczących 29 osób tak, aby z każdej klasy został wybrany przynajmniej jeden uczeń?

4. Na ile sposobów można 28 osobową klasę podzielić na 7 - osobowe drużyny oznaczone kolorami niebieskim, zielonym, czerwonym i żółtym?

5. Ile jest ciągów składających się z

(a) m zer i n jedynek,

(b) k zer, l jedynek i m dwójek.

6. W turnieju tenisowym bierze udział $2n$ tenisistów. W 1. rundzie ma być rozgranych jednocześnie n pojedynków. Na ile sposobów można podzielić wszystkich tenisistów na n par przeciwników?

7. Z talii 52 kart wyjęto 10 kart. W ilu przypadkach wśród tych kart znajdą się

(a) co najmniej jeden as,

(b) dokładnie jeden as,

(c) co najmniej dwa asy,

(d) dokładnie dwa asy.

8. Na ile sposobów można przestawić litery w słowie

L O K O M O T Y W A

tak, aby żadne dwie litery „O" nie stały obok siebie?

9. Wyznacz liczbę ciągów (a, b, c, d) takich, że $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ oraz

$$3a + 3b + 3c + d = 300.$$

10. Wyznacz liczbę ciągów liczb $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ takich, że

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 100$$

oraz
(a) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ to liczby naturalne,
(b) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ to liczby naturalne większe od 1.

11. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz liczbę ciągów długości n o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$, w których liczba 0 występuje (a) parzystą, (b) nieprarzystą ilość razy.

12. Ile jest n-cyfrowych liczb naturalnych, których cyfry w systemie dziesiętnym tworzą ciąg niemalejący?

13. Niech $n \in \mathbb{N}$. Oblicz sumę

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!(n+k)!}$$

14. Niech $n \in \mathbb{N}$. Oblicz sumę

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} 2^k.$$

15. Niech $m, r \in \mathbb{N}$, $m > r$. Udowodnij tożsamość

$$\sum_{k=r}^{m} \binom{m}{k} \binom{k}{r} (-1)^k = 0.$$

16. Wyznacz współrzędne środka okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach w punktach $(0, 0), (3, 3), (-2, 5)$.

17. Rozstrzygnij, dla jakich wartości parametru a układ równań

$$\begin{cases} a^2x - 9y = 0 \\ (a+2)x + 2z = 10 \\ 5y + (a-1)z = -15 \end{cases}$$

(a) nie ma rozwiązań,
(b) ma dokładnie jedno rozwiązanie,
(c) ma wiele rozwiązań.