Analiza - klasa 2a Zestaw 4. 24.9.2024

Układy równań liniowych

Tw. 1 Układ równań liniowych

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $ad - bc \neq 0$.

Definicja. Liczbę $ad - bc$ nazywamy *wyznacznikiem* macierzy kwadrtowej $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ i zapisujemy $\det A$.

Tw. 2 (Wzory Cramera) Jeżeli $ad - bc \neq 0$, to jedynym rozwiązaniem powyższego układu równań są liczby

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} e & b \\ f & d \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \qquad y = \frac{\det \begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

Definicja. Wyznacznikiem macierzy 3×3 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ nazywamy liczbę

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Stw. 3. (Własności wyznacznika) Niech $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}, \vec{b}$ to wektory w przestrzeni, t_1, t_2, t_3 to liczby. Wówczas

(i) $\det[t_1\vec{a}_1, t_2\vec{a}_2, t_3\vec{a}_3] = t_1t_2t_3 \cdot \det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$,

(ii) $\det[\vec{a}_1 + \vec{b}, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = \det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] + \det[\vec{b}, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$ (i analogicznie dla pozostałych kolumn macierzy)

(iii) $\det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{0}] = \det[\vec{a}_1, \vec{0}, \vec{a}_3] = \det[\vec{0}, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = 0$,

(iv) $\det[\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}] = \det[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}] = \det[\vec{b}, \vec{a}, \vec{a}] = 0$.

Stw. 4. Wektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ w przestrzeni leżą w jednej płaszczyźnie (są współpłaszczyznowe) wtw. gdy $\det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = 0$.

Tw. 5. (Wzory Cramera). Układ 3 równań z 3 niewiadomymi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$ i wówczas

$$x = \frac{\det[\vec{b}, \vec{a}_2, \vec{a}_3]}{\det A}, \quad y = \frac{\det[\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{a}_3]}{\det A}, \quad z = \frac{\det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}]}{\det A}.$$

1. Rozwiąż układ równań

(a) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2x} + \dfrac{y+1}{3y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} = 7 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dfrac{3}{2x+3y} + \dfrac{7}{x-y} = 2 \\ \dfrac{5}{x-y} + \dfrac{2}{2x+3y} = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 0 \\ 5x - 6y = 3 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} |x| + y = 5 \\ x + 4y = 3 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} |x-2| + |y-5| = 1 \\ y - |x-2| = 5 \end{cases}$

2. Obwód prostokąta wynosi 54 cm. Jeżeli dłuższy bok powiększymy o 1 cm, a krótszy zmniejszymy o 1 cm, to pole zmniejszy się o 4 cm^2. Oblicz długości boków prostokąta.

3. W ciągu 20 dni cena akcji spółki wzrosła z 5 zł do 15 zł. Każdego dnia cena rosła 1,20 zł lub malała 0,80 zł. Przez ile dni cena rosła, a przez ile malała?

4. Samochody A i B jadą po okrężnej trasie, której $1/4$ długości przebiega w mieście. Szybkość A w mieście wynosi $2v$, a poza miastem $9v/4$. Szybkość B w mieście wynosi v a poza miastem $3v$. Samochody razem wjeżdżają do miasta. Który z nich i po jakim czasie minie drugi, jeżeli długość miejskiej drogi wynosi s?

5. Określ ilość rozwiązań układu równań w zależności od wartości parametrów a i b:

(a) $\begin{cases} x - y = a \\ bx - 2y = 12 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} ax + 2y = b + 4 \\ 2x + (a+3)y = 10 \end{cases}$

6. Boki trójkąta zawierają się w prostych $4x+3y-21 = 0$, $x+2y-4 = 0$, $3x+y-7 = 0$.
(a) Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta.
(b) Napisz równania prostych zawierających środkowe trójkąta.
(c) Napisz równania prostych symetralnych boków trójkąta i wyznacz środek okręgu opisanego na tym trójkącie.

7. Wykaż, że układ równań ma jednoznaczne rozwiązanie i znajdź y:

(a) $\begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + 4y + z = 1 \\ 5x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases}$

8. Znajdź taki trójmian kwadratowy f, że $f(1) = 8$, $f(-1) = 2$, $f(2) = 14$.

9. Wyznacz w zależności od $a \in \mathbb{R}$ wszystkie rozwiązania układu równań

(a) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x + ay - 3z = 1 \\ x + 10y - z = a \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$

10. Korzystając z twierdzeń na tej kartce udowodnij, że na każdym czworościanie można opisać sferę.