Analiza - klasa 2a Zestaw 3. 17.10.2024

Kombinatoryka IV

Wzór włączeń i wyłączeń. Zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mają skończenie wiele elementów. Wówczas

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{1\leqslant i<j<k<l\leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| + \ldots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

---

1. Ile jest liczb naturalnych mniejszych niż 10 000 i podzielnych przez 2 lub 3 lub 5?

2. Ile liczb czterocyfrowych jest podzielnych przez 5 lub 9 lub 15?

3. Ile jest liczb 6-cyfrowych, których zapis dziesiętny wykorzystuje dokładnie 3 cyfry?

4. Wyznacz liczbę surjekcji ze zbioru n-elementowego na zbiór p-elementowy.

5. Permutację $p = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ nazywamy *nieporządkiem* (ang. *derangement*) jeżeli $a_k \neq k$ dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$. Wykaż, że liczba wszystkich nieporządków zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ jest równa

$$n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

6. Znajdź wzór na liczbę ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, w których każda liczba wystąpi dokładnie 2 razy i każde dwa sąsiednie wyrazy są różne.

7. Na ile sposobów można wypełnić tabelę o m wierszach i n kolumnach liczbami 0 i 1 tak, aby w żadnym wierszu i żadnej kolumnie nie było samych zer?

8. Powiemy, że permutacja $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ jest *miła*, jeżeli dla co najmniej jednego i zachodzi $|x_i - x_{i+1}| = n$. Udowodnij, że dla każdego n więcej niż połowa wszystkich permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ jest miła.

9. Zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mają skończenie wiele elementów. Udowodnij wzór

$$|A_1 \triangle A_2 \triangle A_3 \triangle \ldots \triangle A_n| = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |A_i| - 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |A_i \cap A_j| + 4 \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - 8 \sum_{1\leqslant i<j<k<l\leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| + \ldots + (-1)^{n+1} 2^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$