Analiza - klasa 2a Zestaw 2. 10.9.2024

Kombinatoryka III

Trójkąt Pascala. Wartości symbolu Newtona $\binom{n}{k}$ można dla niezbyt dużych n łatwo wyznaczyć za pomocą tzw. trójkąta Pascala. Jest to trójkątna tabela, której wiersze odpowiadają kolejnym wartościom n, tworzona w następujący sposób:

$$\begin{array}{l|ccccccccccc}
n=0 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
n=1 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
n=2 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
n=3 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
n=4 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
n=5 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Liczby w kolejnym wierszu uzyskujemy z poprzedniego za pomocą **tożsamości Pascala** $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

Wzór dwumianowy Newtona. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i liczby naturalnej n prawdziwy jest wzór

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}.\end{aligned}$$

Jeśli zamiast b weźmiemy $-b$, to otrzymamy wzór $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}(-1)^{n-k}$.

---

1. Rozwiń wyrażenia:

(a) $(a+b)^5$, (b) $\left(2a - \frac{1}{2}b\right)^6$, (c) $(a+b+c)^4$.

2. Wyznacz liczby całkowite a i b takie, że $\left(3-2\sqrt{2}\right)^5 = a + b\sqrt{2}$. Ile rozwiązań ma to zadanie?

3. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

jest całkowita i parzysta.

4. Uprość sumy:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$, (b) $\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$, (c) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$, (d) $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}4^{n-k}$.

5. Udowodnij tożsamości za pomocą wzoru dwumianowego:

(a) $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}ka^k b^{n-k} = na(a+b)^{n-1}$

(b) $\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)a^k b^{n-k} = n(n-1)a^2(a+b)^{n-2}$

6. „Uprość” sumy

(a) $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2 a^k b^{n-k}$, (b) $\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)(k-2)a^k b^{n-k}$.

7. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

$$\binom{2n}{0} < \binom{2n}{1} < \ldots < \binom{2n}{n} \quad \text{i} \quad \binom{2n+1}{0} < \binom{2n+1}{1} < \ldots < \binom{2n+1}{n}.$$

8. Udowodnij wzór dwumianowy Newtona za pomocą zasady indukcji.

9. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $a, b, c \in \mathbb{R}$. Udowodnij „wzór trójmianowy Newtona”:

$$(a+b+c)^n = \sum_{k,l,m}\frac{n!}{k!\cdot l!\cdot m!}a^k b^l c^m,$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich trójkach liczb całkowitych nieujemnych (k, l, m) takich, że $k + l + m = n$. Ile wyrazów jest w tej sumie?

10. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że każdy z symboli Newtona $\binom{2^n}{k}$, $k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$, jest liczbą parzystą.

11. Dla danej liczby naturalnej n wyznacz liczbę ciągów o wyrazach równych 1 lub 2, których suma wynosi n.

12. Niech $k, m \in \mathbb{N}$. Ile jest ciągów $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ takich, że liczby $a_1, a_2, \ldots, a_k$ są całkowite i $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k \leqslant m$?

13. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij tożsamość

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}.$$

14. Niech $n, k \in \mathbb{N}$. Filemon i Bonifacy zapisują ciągi liczb całkowitych:

- Filemon zapisuje wszystkie ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ takie, że
$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \leqslant k.$$
- Bonifacy zapisuje wszystkie ciągi $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ takie, że
$$|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_k| \leqslant n.$$

Udowodnij, że obaj zapiszą tyle samo ciągów.