Analiza - klasa 2a   Zestaw 1.   3.9.2024

Kombinatoryka II

1. Zbiory $|A|$ i $|B|$ są skończone, $|A| = k$, $|B| = n$. Ile jest
(a) funkcji $f : A \to B$? (b) injekcji $f : A \to B$? (c) bijekcji $f : A \to B$?

2. Ile jest surjekcji (a) ze zbioru 4 elementowego na zbiór 3 elementowy,
(b) ze zbioru $n \geqslant 3$ elementowego na 3 elementowy,
(c) ze zbioru $n \geqslant 4$ elementowego na 4 elementowy?

3. Ile jest różnych podzbiorów zbioru n-elementowego? (Zbiór pusty i cały zbiór też są podzbiorami).

4. Zbiór A jest niepusty i skończony. Udowodnij, że

(a) A ma tyle samo podzbiorów o parzystej i o nieparzystej liczbie elementów.

(b) Dla dowolnego elementu $a \in A$, zbiór A ma tyle samo podzbiorów zawierających a i nie zawierających a.

5. Udowodnij, że spośród dowolnych $2^{n-1} + 1$ różnych podzbiorów zbioru n-elementowego zawsze można wybrać dwa podzbiory rozłączne.

6. Niech $n \in \mathbb{N}$. Jakich podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ jest więcej: tych, których suma elementów jest parzysta, czy tych, których suma elementów jest nieparzysta?

7. Na ile sposobów można wybrać 2 rozłączne podzbiory zbioru n-elementowego?

8. Ile podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ nie zawiera dwóch kolejnych liczb?

9. Zbiór A ma n elementów, $B_j \subset A$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$, to różne podzbiory zbioru A, przy czym każde trzy z tych podzbiorów mają niepustą część wspólną. Udowodnij, że istnieje element należący do każdego ze zbiorów B_j.

Wariacją k-wyrazową z powtórzeniami zbioru A nazywamy każdą funkcję odwozorowującą zbiór $\{1, 2, \ldots, k\}$ w zbiór A. Każdą taką funkcję można wzajemnie jednoznacznie utożsamić z ciągiem długości k o wyrazach ze zbioru A.

Tw. 1. Liczba k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego wynosi n^k.

Wariacją k-wyrazową bez powtórzeń zbioru A nazywamy każdą injekcję (funkcję różnowartościową) odwzorowującą zbiór $\{1, 2, \ldots, k\}$ w zbiór A. Każdą taką funkcję można wzajemnie jednoznacznie utożsamić z ciągiem długości k o różnych wyrazach ze zbioru A.

Tw. 2. Liczba wariacji k-wyrazowych bez powtórzeń zbioru n-elementowego wynosi $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ jeśli $n \geqslant k$ i 0 jeśli $n > k$.

Permutacją zbioru n-elementowego A nazywamy każdą bijekcję odwzorowującą zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$ na zbiór A. Każdą taką bijekcję można wzajemnie jednoznacznie utożsamić z pewnynm ustawieniem wszystkich elementów zbioru A w ciąg długości n.

Tw. 3. Liczba permutacji zbioru n-elementowego wynosi $n!$.

Niech $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $k \leqslant n$. *Kombinacją k-elementową zbioru n-elementowego A* nazywamy każdy k-elementowy podzbiór zbioru A.

Tw. 4. Niech $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $k \leqslant n$. Liczba k-elementowych kombinacji (czyli k-elementowych podzbiorów) zbioru n-elementowego jest równa $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.

$\binom{n}{k}$ nazywamy *symbolem Newtona* i odczytujemy „n po k” lub „n nad k”.

---

10. Ile jest różnych ustawień 9 osób w szereg takich, że wybrane 3 osoby stoją jedna po drugiej?

11. Ile jest różnych sposobów posadzenia n osób przy okrągłym stole? Dwa usadzenia uznajemy za takie same, jeżeli w obu każda osoba ma tych samych sąsiadów.

12. Spośród uczniów klasy 2a należy wybrać czteroosobowy samorząd. Na ile sposobów można to zrobić? Na ile sposobów można wybrać czteroosobowy samorząd tak, aby należała do niego co najmniej jedna dziewczyna i co najmniej jeden chłopak?

13. Wyznacz liczbę ciągów (a_1, a_2, a_3, a_4) takich, że $a_i \in \mathbb{N}$ oraz $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10$.

14. Na płaszczyźnie danych jest 14 prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Ile jest trójkątów, których boki należą do tych prostych?

15. Ile różnych prostokątów można utworzyć z pól szachownicy 8×8?

16. Ile jest permutacji zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 31\}$ takich, że iloczyn każdych dwóch sąsiednich liczb jest parzysty?

17. Na ile sposobów można wypełnić kupon totolotka (zakreślamy 6 liczb od 1 do 49) tak, że zakreślone zostaną co najmniej 2 kolejne liczby?

18. Na ile sposobów można posadzić na 25 miejscowej ławie 10 panów i 15 pań tak, aby między każdymi dwoma panami siedziała co najmniej jedna pani?

19. Na ile sposobów można podzielić zbiór 12 elementowy na 6 rozłącznych podzbiorów 2-elementowych?

20. Na ile sposobów można rozmieścić 9 studentów w 3 pokojach trzyosobowych, gdy
(a) każdy może dzielić pokój z każdym,
(b) pewnych dwóch studentów nie chce mieszkać razem,
(c) pewnych dwóch studentów chce mieszkać razem?

21. Podaj kombinatoryczne dowody tożsamości (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
(b) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ (c) $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$ (d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

22. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij tożsamości: (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}$, $n, m \in \mathbb{N}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} 2^{n-k} = 2^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.