
Kombinatoryka I

Tw. (Zasada szufladkowa) Niech $k, n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $kn + 1$ przedmiotów rozmieszczamy w n szufladach, to w jednej z szuflad znajdzie się co najmniej $k + 1$ przedmiotów.

1. W każde pole tabeli $n \times n$ wpisano jedną z liczb $-1, 0, 1$, a następnie dodano do siebie liczby z każdego wiersza, z każdej kolumny i z każdej z przekątnych. Udowodnij, że pewne 2 z otrzymanych sum są równe.
2. Na przyjęciu jest $n \geq 2$ gości. Udowodnij, że pewne dwie osoby mają taką samą liczbę znajomych wśród osób będących na przyjęciu.
3. Udowodnij, że każdy zbiór składający się z n różnych liczb całkowitych zawiera niepusty podzbiór, którego suma elementów jest podzielna przez n .
4. Na płaszczyźnie z układem współrzędnych wybrano 5 punktów kratowych. Wykaż, że 2 z nich są końcami odcinka, którego środek jest punktem kratowym.
Uwaga: Punkt kratowy to taki, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi.
5. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ wybrano $n + 1$ liczb. Udowodnij, że jedna z wybranych liczb jest dzielnikiem innej.
6. W trójkącie równobocznym o boku 4 rozmieszczono 17 punktów. Udowodnij, że odległość pewnych dwóch z nich nie przekracza 1.
7. Każdy punkt na okręgu pomalowano jednym z dwóch kolorów. Udowodnij, że pewien trójkąt równoramienny wpisany w ten okrąg ma wszystkie wierzchołki tego samego koloru.
8. Zapis dziesiętny liczby wymiernej $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{N}$, $\text{NWD}(p, q) = 1$, jest ułamkiem okresowym. Wykaż, że okres tego ułamka wynosi co najwyżej $q - 1$.
9. Liczby od 1 do 101 zapisano w dowolnej kolejności. Wykaż, że można skreślić 90 z nich tak, że pozostałe 11 będzie ustawione w porządku rosnącym lub malejącym.

ZADANIA DODATKOWE

10. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ wybrano $n + 1$ różnych liczb. Wykaż, że z tych $n + 1$ liczb można wybrać trzy liczby a, b, c (nie muszą być parami różne) takie, że $a = b + c$.
11. Liczba naturalna n nie jest podzielna przez 2 i 5. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele wielokrotności liczby n , których zapis dziesiętny składa się z samych cyfr 1.
12. Udowodnij, że każdy wielościan wypukły ma co najmniej 2 ściany o tej samej liczbie boków.
13. Wybrano 20 różnych liczb naturalnych mniejszych od 70. Wykaż, że wśród wszystkich różnic par tych liczb są co najmniej 4 równe.

14. Wewnątrz kwadratu o polu 1 znajduje się 9 punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Udowodnij, że pewne 3 z tych punktów są wierzchołkami trójkąta o polu nie większym niż $\frac{1}{8}$.
15. Wewnątrz kwadratu o polu 1 obrano 51 punktów. Wykaż, że pewne 3 z nich leżą w kole o promieniu $\frac{1}{7}$.
16. Każde dwa wierzchołki sześciokąta foremnego połączono odcinkiem zielonym lub czerwonym. Wykaż, że pewne trzy wierzchołki tego sześciokąta są wierzchołkami trójkąta o bokach tego samego koloru.
17. Każde dwa wierzchołki 17-kąta foremnego połączono odcinkiem pomalowanym na jeden z trzech kolorów. Wykaż, że pewne trzy odcinki tego samego koloru są bokami trójkąta.