Powtórzenie

1. Rozwiąż równania

(a) $|x-1|+|x|+|x+1|=x+2$,

(b) $|x-1|+|x-4|=2$,

(c) $\big||x-3|-2\big|=1$.

2. Dla jakich wartości $a\in\mathbb{R}$ równanie $(x-1)^2=|x-a|$ ma dokładnie 3 rozwiązania?

3. Rozwiąż nierówności

(a) $|x-2|+|x+1|\geqslant 3x-3$,

(b) $\big||x-3|-5\big|\leqslant 2$,

(c) $|2x+6|+|3x-12|+|x|<20$.

4. Liczby x,y,z spełaniają warunek $x+y+z=2$. Udowodnij, że

$$|1-x|+|1-y|+|1-z|\geqslant 1.$$

5. Załóżmy, że $-1\leqslant x,y,z\leqslant 1$. Udowodnij, że

$$2|xy+yz+zx|\leqslant |x+y|+|y+z|+|z+x|.$$

6. Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x,y,z prawdziwa jest nierówność

$$\frac{|x+2y|}{|y-z|}+\frac{|y+2z|}{|z-x|}+\frac{|z+2x|}{|x-y|}\geqslant 1.$$

7. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba $\lfloor\sqrt[n]{111}\rfloor$ dzieli liczbę 111.

8. Rozwiąż równania

(a) $\dfrac{19x+6}{10}=\left\lfloor\dfrac{4x+7}{3}\right\rfloor$,

(b) $\left\lfloor\dfrac{8x+19}{7}\right\rfloor=\dfrac{16(x+1)}{11}$,

(c) $\lfloor x+1\rfloor=\left\lfloor\dfrac{x-2}{2}\right\rfloor$,

(d) $x-\sqrt{\lfloor x\rfloor}=\frac{1}{2}$,

(e) $\lfloor x\rfloor+\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 4x\rfloor+\lfloor 6x\rfloor+\lfloor 8x\rfloor=2006$.

9. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\left\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right\rfloor=\left\lfloor\sqrt{9n+8}\right\rfloor.$$

10. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n istnieją liczby całkowite a i b takie, że

$$n=\left\lfloor a\sqrt{2}\right\rfloor+\left\lfloor b\sqrt{3}\right\rfloor.$$

11. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba zapisana w systemie dziesiętnym przy pomocy zer i jedynek, która dzieli się przez n.

12. Udowodnij, że każdy wielościan wypukły ma co najmniej 2 ściany o tej samej liczbie boków.

13. Wybrano 16 liczb ze zbioru $\{1,2,\ldots,30\}$. Wykaż, że pewne dwie różnią się o 3.

14. Udowodnij, że ze zbioru 102 różnych liczb całkowitych można wybrać dwie, których suma lub różnica dzieli się przez 200.