Analiza - klasa 1a Zestaw 19. 15.5.2024

Zasada szufladkowa

Tw. 1. Niech $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $n+1$ przedmiotów rozmieszczamy w n szufladach, to w jednej z szuflad znajdą się co najmniej 2 przedmioty.

Tw. 2. Niech $k, n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $kn+1$ przedmiotów rozmieszczamy w n szufladach, to w jednej z szuflad znajdzie się co najmniej $k+1$ przedmiotów.

---

1. Na przyjęciu jest $n \geqslant 2$ gości. Udowodnij, że pewne dwie osoby mają taką samą liczbę znajomych wśród osób będących na przyjęciu.

2. W każde pole tabeli $n \times n$ wpisano jedną z liczb $-1, 0, 1$, a następnie dodano do siebie liczby z każdego wiersza, z każdej kolumny i z każdej z przekątnych. Udowodnij, że pewne 2 z otrzymanych sum są równe.

3. Na płaszczyźnie z układem współrzędnych wybrano 5 punktów kratowych (czyli o obydwu współrzędnych całkowitych). Wykaż, że 2 z nich są końcami odcinka, którego środek też jest punktem kratowym.

4. Udowodnij, że każdy zbiór składający się z n różnych liczb całkowitych zawiera niepusty podzbiór, którego suma elementów jest podzielna przez n.

5. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ wybrano $n+1$ róznych liczb. Wykaż, że z tych $n+1$ liczb można wybrać trzy liczby a, b, c (nie muszą być parami różne) takie, że $a = b + c$.

6. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ wybrano $n+1$ liczb. Udowodnij, że jedna z wybranych liczb jest dzielnikiem innej.

7. Liczba naturalna n nie jest podzielna przez 2 i 5. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele wielokrotności liczby n, których zapis dziesiętny składa się z samych cyfr 1.

8. Wybrano 20 różnych liczb naturalnych mniejszych od 70. Wykaż, że wśród wszystkich różnic par tych liczb są co najmniej 4 równe.

9. W trójkącie równobocznym o boku 4 rozmieszczono 17 punktów. Udowodnij, że odległość pewnych dwóch z nich nie przekracza 1.

10. Każdy punkt na okręgu pomalowano jednym z dwóch kolorów. Udowodnij, że pewien trójkąt równoramienny wpisany w ten okrąg ma wszystkie wierzchołki tego samego koloru.

11. Wewnątrz kwadratu o polu 1 obrano 51 punktów. Wykaż, że pewne 3 z nich leżą w kole o promieniu $\frac{1}{7}$.

12. Każde dwa wiercholki sześciokąta foremnego połączono odcinkiem zielonym lub czerwonym. Wykaż, że pewne trzy wierzchołki tego sześciokąta są wierzchołkami trójkąta o bokach tego samego koloru.

13. Każde dwa wierzchołki 17-kąta foremnego połączono odcinkiem pomalowanym na jeden z trzech kolorów. Wykaż, że pewne trzy odcinki tego samego koloru są bokami trójkąta.

14. Zapis dziesiętny liczby wymiernej $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{N}$ są liczbami względnie pierwszymi, jest ułamkiem okresowym. Wykaż, że okres tego ułamka wynosi co najwyżej $q-1$.

15. Adam ma 77 dni, aby przygotować się do olimpiady matematycznej. Codziennie chce rozwiązać co najmniej jedno zadanie, ale łącznie nie więcej niż 132. Udowodnij, że w ciągu kilku kolejnych dni rozwiąże dokładnie 21 zadań.

16. **Tw. Dirichleta.** Liczba x jest niewymierna. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją liczby całkowite p, q takie, że $1 \leqslant q \leqslant n$ oraz

$$|xq - p| \leqslant \frac{1}{n}.$$

17. Liczby od 1 do 101 zapisano w dowolnej kolejności. Wykaż, że można skreślić 90 z nich tak, że pozostałe 11 będzie ustawione w porządku rosnącym lub malejącym.