Analiza - klasa 1a   Zestaw 18.   24.4.2024

Część całkowita

Część całkowitą (podłogę) liczby rzeczywistej x (ozn. $\lfloor x \rfloor$) definiujemy jako największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą x. Można także spotkać oznaczenie $[x]$.

Stw. Jeżeli x jest liczbą rzeczywistą i k jest liczbą całkowitą, to $\lfloor x \rfloor = k$ wtw. gdy $k \leqslant x < k+1$.

Najważniejsze własności części całkowitej:

(i) Jeśli $x < y$, to $\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$ (czyli funkcja $f(x) = \lfloor x \rfloor$ jest niemalejąca).

(ii) $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Jeśli $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$ to $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.

(iv) Jeśli $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$, to $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$.

(v) Jeśli $x, y \in \mathbb{R}$ to $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

(vi) Jeśli $x, y \geqslant 0$, to $\lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor xy \rfloor$.

Sufit liczby rzeczywistej x (ozn. $\lceil x \rceil$) definiujemy jako najmniejszą liczbę całkowitą większą lub równą x. Zachodzi równość $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.

Część ułamkowa liczby rzeczywistej x jest to liczba $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

---

1. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor .$$

2. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.

3. Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest dana wzorem $f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$. Wykaż, że f jest surjekcją i znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że $f(n) = 2023$.

4. Rozwiąż równania

(a) $\lfloor x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor = 17$,

(b) $\left\lfloor \frac{5+6x}{8} \right\rfloor = \frac{15x-7}{5}$,

(c) $\left\lfloor \frac{12x-5}{7} \right\rfloor = \frac{7x-6}{4}$,

(d) $\lfloor x - 1 \rfloor = \left\lfloor \frac{x+2}{2} \right\rfloor$,

(e) $\lfloor x \cdot \lfloor x \rfloor \rfloor = 1$,

(f) $\lfloor (x+1)^2 \rfloor = \lfloor x^2 \rfloor + 1$.

5. Wyznacz liczbę rozwiązań równania

$$x = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor .$$

6. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + \lfloor y \rfloor + \{z\} = 1,1 \\ \lfloor x \rfloor + \{y\} + z = 2,2 \\ \{x\} + y + \lfloor z \rfloor = 3,3 \end{cases}$$

7. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor .$$

8. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\lfloor 3x \rfloor + \lfloor 3y \rfloor + \lfloor 3z \rfloor \geqslant 2\left(\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor z \rfloor\right) + \lfloor x + y + z \rfloor .$$

9. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor .$$

10. Niech $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij *tożsamość Hermite'a*:

$$\lfloor nx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor .$$

11. Niech $x \in \mathbb{R}$. Oblicz sumę $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k < l \leqslant n} \left\lfloor \frac{x+k}{l} \right\rfloor$.

12. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste $x > 1$ takie, że liczba $\sqrt[n]{\lfloor x^n \rfloor}$ jest całkowita dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

13. Niech $x \geqslant 0$. Udowodnij równość $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

14. Wykaż, że jest nieskończenie wiele liczb wymiernych dodatnich q takich, że $\{q^2\} + \{q\} = 0,99$ i nie istnieje liczba wymierna dodatnia q taka, że $\{q^2\} + \{q\} = 1$.

15. Udowodnij, że $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \left\{ \sqrt{k} \right\} \leqslant \frac{n^2-1}{2}$ dla każdej liczby naturalnej n

16. Liczby a, b są dodatnie, niewymierne i $a + b = 1$. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\lfloor na \rfloor + \lfloor nb \rfloor = n - 1.$$

17. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$ i dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\lfloor na \rfloor + \lfloor nb \rfloor = \lfloor nc \rfloor .$$

Udowodnij, że $a + b = c$.