Analiza - klasa 1a   Zestaw 17.   27.3.2024

Wartość bezwględna

Najważniejsze własności wartości bezwzględnej:

(i) $|x| \geqslant x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Jeśli $a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$ to nierówność $|x| \leqslant a$ jest równoważna **koniunkcji** nierówności $-a \leqslant x \leqslant a$.

(iii) Jeśli $a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$ to nierówność $|x| \geqslant a$ jest równoważna **alternatywie** nierówności $x \geqslant a$ lub $x \leqslant -a$.

(iv) Jeśli $x, y \in \mathbb{R}$ to $|xy| = |x| \cdot |y|$ oraz, gdy $y \neq 0$, to $\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|$.

(v) Jeśli $x, y \in \mathbb{R}$, to $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ oraz $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y| \leqslant |x| + |y|$.

---

1. Rozwiąż równania:

(a) $|x+2| = 2(3-x)$ (c) $|x-3| + |x+4| = 9$ (e) $\big||x+1| - 2\big| = 1$

(b) $|x| - |x-2| = 2$ (d) $|2x| + 3x - 5 = |x-1|$ (f) $\big||x+2| - |x|\big| = 2$

(g) $2|x| + |x-1| + |x+1| = 4$ (h) $\big||x+1| - |x-1|\big| = 3$

2. Rozwiąż nierówności:

(a) $|5-2x| < 1$ (d) $|x-2| \leqslant |x+4|$ (g) $\big||x+3| - 2\big| > 3$

(b) $|2-x| < 1-2x$ (e) $|x+2| - |x| > 1$ (h) $\dfrac{|x-2|}{x+1} > \dfrac{x-1}{|x+2|}$

(c) $|3x-4| \geqslant 7$ (f) $\big||x+3| - 2\big| \leqslant 1$

3. Dla danje wartości $a > 0$ narysuj na płaszczyźnie z układem współrzędnych zbiory punktów (x, y) takich, że

(a) $|x| + |y| = a$ (b) $|x+y| = a$ (c) $\max(|x|, |y|) = a$ (d) $\big||x| - |y|\big| = a$

4. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} |x-y| = z \\ |y-z| = x \\ |z-x| = y \end{cases}.$$

5. Wyznacz liczbę rozwiązań równania w zależności od wartości parametru $m \in \mathbb{R}$:

(a) $\big||x| - 3\big| = m$ (b) $\big||x| - m\big| = 1$ (c) $\big||x-m| - 3\big| = 1$

6. Rozwiąż równanie

$$2\Big|x - \big|x + |x-1|\big|\Big| = \Big|x + \big|x - |x+1|\big|\Big|.$$

7. Zapisz $\min(a, b)$ i $\max(a, b)$ za pomocą wartości bezwględnej, dodawania, odejmowania, mnożenia i/lub dzielenia.

8. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji

$$f(x) = |x-1| + |x-2| + \ldots + |x-100|, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

9. Załóżmy, że $-1 < x, y < 1$. Wykaż, że $|x-y| < |1-xy|$.

10. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$|x| + |y| + |z| \leqslant |y+z-x| + |z+x-y| + |x+y-z|.$$

11. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$|x| + |y| + |z| + |x+y+z| \geqslant |x+y| + |y+z| + |z+x|.$$

12. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność

$$\left|\frac{x}{1+x^2} - \frac{y}{1+y^2}\right| \leqslant |x-y|.$$

13. Dla $x, y \in \mathbb{R}$ niech $d(x, y) = \dfrac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$. Udowodnij, że jeśli $x, y, z \in \mathbb{R}$, to

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$$

14. Udowodnij, że dla dowlnych liczb rzeczywistych x, y, z spełniona jest nierówność

$$\frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} + \frac{|z|}{1+|z|}.$$

15. Wykaż, że jeśli $a, b, c \in \mathbb{R}$, to

$$\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right| \leqslant |b-c|.$$

16. Wyznacz wszystkie funkcje $f : [0,1] \to [0,1]$ takie, że dla dowolnych $x, y \in [0,1]$

$$|f(x) - f(y)| = |x-y|.$$

17. Wykaż, że dla dowolnych funkcji $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ istnieją $x, y \in [0,1]$ takie, że

$$|f(x) + g(y) - xy| \geqslant \frac{1}{4}.$$

18. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \big(|a_i - a_j| + |b_i - b_j|\big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_i - b_j|.$$