Analiza - klasa 1a Zestaw 16. 13.3.2023

Funkcje – powtórzenie

Funkcja *signum*:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ -1 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

1. Wyznacz dziedzinę funkcji:

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x+5}}{\sqrt[3]{\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-2}}}$

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{(x-2)(x+3)}}$

(c) $f(x) = \sqrt{x + \dfrac{1}{x} - 2}$

(d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{4x-1}{2x+3}}$

2. Zbadaj, czy poniższe funkcje są parzyste lub nieparzyste:

(a) $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|$,

(b) $f(x) = \dfrac{x \cdot |x|}{x^3 + x}$,

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{\sqrt{|x| - 16}}$,

(d) $f(x) = \dfrac{|x-10|}{x+5} + \dfrac{|x+10|}{x-5}$

3. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ równanie $f(x)f(y) = f(xy)$. Udowodnij, że f jest funkcją parzystą lub nieparzystą.

4. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji, zbadaj czy funkcja jest ograniczona z góry lub z dołu, wyznacz jej ekstrema globalne (jeśli istnieją). Naszkicuj wykres każdej funkcji.

(a) $f(x) = |3x+1| - |3x-1|$, $x \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \big||2x-1| + 2\big|$, $x \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(d) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

5. Wykaż, że funkcja $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ jest ściśle monotoniczna, wyznacz jej obraz i wyznacz funkcję $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

6. Udowodnij, że funkcja $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}$$

jest różnowartościowa, wyznacz jej obraz i funkcję odwrotną $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

7. Wykaż, że funkcja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1}$$

jest różnowartościowa, jej obrazem jest przedział $[0, \frac{1}{2})$ i wyznacz jej funkcję odwrotną $f^{-1} : [0, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}$.

Wskazówka: Jeżeli funkcja ma funkcję odwrotną, to jest bijekcją.

8. Znajdź wszystkie funkcje $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ takie, że dla każdego $x \neq 1$ spełniona jest równość $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$.

9. Wyznacz wszystkie (a) injekcje, (b) surjekcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f(f(x) + y) = f(x+y) + 1$.

10. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest równość

(a) $f(x) \cdot f(y) - xy = f(x) + f(y) - 1$,

(b) $f(x+y)^2 = f(x)^2 + f(y)^2$,

(c) $f(x+y) - f(x-y) = 4xy$

(d) $f(x+y) + xy = f(x)f(y)$.

11. Dla jakich liczb naturalnych n istnieje permutacja f zbioru $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ taka, że dla każdej liczby $k \in A_n$

$$f(k) \neq k \qquad \text{i} \qquad f(f(k)) = k?$$

12. S_n oznacza zbiór wszystkich permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ i $p \in S_n$ jest ustaloną permutacją. Udowodnij, że funkcja $H : S_n \to S_n$ dana wzorem

$$H(g) = p \circ g$$

jest bijekcją.