Analiza - klasa 1a Zestaw 15. 14.2.2024

Funkcje liczbowe

Definicja. *Funkcja liczbowa* jest to dowolna funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}$.

Funkcje liczbowe $f, g : D \to \mathbb{R}$ (określone na tym samym zbiorze D) można dodawać, odejmować i mnożyć. Tak otrzymane funkcje oznaczamy $f+g$, $f-g$, fg. Jeśli $f(x) \neq 0$ dla każdego $x \in D$, to można rozważać iloraz funkcji $\frac{g}{f}$.

Definicja. Niech $D \subset \mathbb{R}$ i $x \in D \iff -x \in D$. Funkcję $f : D \to \mathbb{R}$ nazywamy *parzystą*, jeśli $f(x) = f(-x)$ dla każdego $x \in D$ i *nieparzystą*, jeśli $f(x) = -f(-x)$ dla dowolnego $x \in D$.

Monotoniczność funkcji. Mówimy, że funkcja f jest

- *rosnąca*, jeśli $f(x) < f(y)$, gdy $x < y$,
- *malejąca*, jeśli $f(x) > f(y)$, gdy $x < y$,
- *niemalejąca*, jeśli $f(x) \leqslant f(y)$, gdy $x < y$,
- *nierosnąca*, jeśli $f(x) \geqslant f(y)$, gdy $x < y$,
- *monotoniczna*, jeśli jest niemalejąca lub nierosnąca,
- *ściśle monotoniczna*, jeśli jest rosnąca lub malejąca

Przedział monotoniczności funkcji f jest to przedział, na którym funkcja f jest monotoniczna, który nie jest zawarty w większym przedziale o tej własności.

Przykład: funkcja $f(x) = x^2$ ma dwa przedziały monotoniczności: $(-\infty, 0]$, na którym maleje i $[0, +\infty)$, na którym rośnie.

Mówimy, że funkcja f jest ograniczona, jeśli istnieją stałe $A, B \in \mathbb{R}$ takie, że $A < f(x) < B$ dla dla każdego x.

Ekstrema funkcji. Powiemy, że funkcja f ma w punkcie $a \in D$

- *minimum (minimum globalne)*, jeżeli $f(x) \geqslant f(a)$ dla każdego $x \in D$. Wówczas piszemy $\min f = f(a)$ lub $\min\limits_D f = f(a)$;
- *maksimum (maksimum globalne)*, jeżeli $f(x) \leqslant f(a)$ dla każdego $x \in D$. Wówczas piszemy $\max f = f(a)$ lub $\max\limits_D f = f(a)$;
- *minimum lokalne*, jeżeli istnieje przedział $(b, c) \subset D$ taki, że $a \in (b, c)$ i $f(x) \geqslant f(a)$ dla każdego $x \in (b, c)$;
- *maksiumum lokalne*, jeżeli istnieje przedział $(b, c) \subset D$ taki, że $a \in (b, c)$ i $f(x) \leqslant f(a)$ dla każdego $x \in (b, c)$.

Minumum globalne lub maksimum globalne nazywamy *ekstremum globalnym*
Minumum lokalne lub maksimum lokalne nazywamy *ekstremum lokalnym.*

---

1. Wyznacz dziedziny funkcji

(a) $f(x) = \dfrac{3x^2+2x-7}{(x^2-2)(x+1)(x^2+2)}$,

(b) $f(x) = \sqrt{x(x-1)(x-2)(x-3)}$,

(c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$,

(d) $f(x) = \sqrt{\sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{2x+1}}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{(x^2+2x)\sqrt[4]{x^4-13x^2+36}}$,

(f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x} - \sqrt[4]{4+x}}$.

2. Opisz, jak z wykresu funkcji $f(x)$ otrzymać wykres funkcji $f(x)+a$, $f(x+a)$, $af(x)$, $f(ax)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

3. Korzystając z poprzedniego zadania naszkicuj wykresy funkcji i wyznacz ich zbiory wartości:

(a) $f(x) = x^2 + 2x - 2$, (b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$, (c) $f(x) = \big||x-2|-2\big| - 2$.

4. Udowodnij, że każda funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest sumą funkcji parzystej i funkcji nieparzystej. Czy takie przedstawienie funkcji f jest tylko jedno?

5. Co można powiedzieć o (nie)parzystości funkcji $f+g$, fg, $f \circ g$ w zależności od (nie)parzystości funkcji f i g?

6. Udowodnij, że funkcja $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ jest rosnąca. Wyznacz funkcję f^{-1}.

7. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji, zbadaj czy funkcja jest ograniczona z góry lub z dołu, wyznacz jej ekstrema globalne (jeśli istnieją).

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = |x+1| + |x-1|$, $x \in \mathbb{R}$

(d) $f(x) = \big||x-2|-2\big|$, $x \in \mathbb{R}$

(e) $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

(f) $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$, $x \in \mathbb{R}$

8. Funkcje $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$ są niemalejące. Czy funkcje $g(x) = \min(f_1(x), f_2(x))$ i $h(x) = \max(f_1(x), f_2(x))$ również są niemalejące?

9. Funkcja $f : D \to E$ jest bijekcją i jest ściśle monotoniczna. Wykaż, że funkcja f^{-1} też jest monotoniczna.

10. Funkcje f i g są ściśle monotoniczne. Co można powiedzieć o monotoniczności funkcji $f \cdot g$ i $f \circ g$?

11. Punkt P jest środkiem symetrii wykresu funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Udowodnij, że P należy do tego wykresu.

12. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}$ spełniona jest równość $f(x) + f(y) = f(x+y)$.

13. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takie, że $f(m+n) = f(m)f(n)$ dla wszystkich $m, n \in \mathbb{N}$ oraz $f(f(k)) = f(k)^2$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$

14. Funkcja $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ spełnia równość $f(xf(y)) + f(yf(x)) = 2xy$ dla dowolnych $x, y \in (0, +\infty)$. Udowodnij, że f jest injekcją. Wyznacz wszystkie takie funkcje f.

15. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełania równość $f(f(x)+y) = 2x + f(f(y)-x)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że f jest surjekcją. Wyznacz wszystkie takie funkcje f.

16. Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełnia dla każdego $n \in \mathbb{N}$ nierówność $f(n+1) > f \circ f(n)$. Udowodnij, że $f(n) = n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

17. Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest rosnąca i spełnia dla każdej liczby naturalnej n równość $f\big(f(n)\big) = 3n$ Oblicz $f(999)$.