Analiza - klasa 1a Zestaw 14. 31.1.2024

Wprowadzenie do funkcji

Definicje. Jeżeli każdemu elementowi x zbioru X został przyporządkowany dokładnie jeden element y zbioru Y, to mówimy, że została określona *funkcja* przekształcająca zbiór X w zbiór Y. Jeśli taką funkcję oznaczymy przez f, to piszemy $f : X \to Y$.

- Jeżeli $y \in Y$ jest elementem przyporządkowanym elementowi $x \in X$, to piszemy $y = f(x)$ i mówimy, że y jest *wartością* funkcji f dla *argumentu* x
- Zbiór X nazywamy *dziedziną* funkcji f, a zbiór Y *przeciwdziedziną* funkcji f.
- Dla podzbioru $U \subset X$ *obrazem* zbioru U względem funkcji f nazywamy zbiór

  $$f(U) = \{f(x) \in Y : x \in U\}.$$

  Zbiór $f(X)$ nazywamy *obrazem funkcji* f.
- Funkcję f taką, że dla dowolnych $u, v \in X$ zachodzi $f(u) = f(v)$ nazywamy funkcją *stałą*.
- Funkcję $f : X \to X$ taką, że dla każdego $x \in X$ zachodzi $f(x) = x$ nazywamy *identycznością* na zbiorze X.
- Dwie funkcje $f, g : X \to Y$ są równe, jeżeli dla każdego $x \in X$ zachodzi $f(x) = g(x)$. Możemy wówczas napisać $f = g$.
- Powiemy, że funkcja f jest *różnowartościowa* (1 - 1), jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ z równości $f(x_1) = f(x_2)$ wynika, że $x_1 = x_2$ czyli

  $$\forall_{x_1,x_2\in X}\ f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

  Piszemy wówczas $f : X \overset{1-1}{\to} Y$. Funkcje różnowartościowe są też nazywane *injekcjami.*
- Powiemy, że funkcja f jest *na*, jeżeli każdy element Y jest wartością funkcji f, czyli

  $$\forall_{y\in Y} \exists_{x\in X}\ y = f(x).$$

  Piszemy wówczas $f : X \overset{\text{na}}{\to} Y$. Funkcje „na” są nazywane są *surjekcjami.*
- Funkcję, która jest jednocześnie różnowartościowa i „na” nazywamy *bijekcją* lub funkcją *wzajemnie jednoznaczną* i piszemy $f : X \underset{\text{na}}{\overset{1-1}{\to}} Y$.

Złożenie funkcji $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ jest to funkcja $g \circ f : X \to Z$, której wartość dla elementu $x \in X$ jest zdefiniowana jako

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Składanie funkcji jest łączne, tzn. jeśli $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to U$, to $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Definicja. Funkcja $g : Y \to X$ jest *funkcją odwrotną* do funkcji $f : X \to Y$, jeżeli $g \circ f$ jest identycznością na zbiorze X i $f \circ g$ jest identycznością na zbiorze Y. Funkcję g oznaczamy wówczas f^{-1}.

Twierdzenie. Funkcja $f : X \to Y$ posiada funkcję odwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy f jest bijekcją.

Wniosek. Jeżeli funkcja f ma funkcję odwrotną, to tylko jedną.

1. Naszkicuj wykresy i wyznacz obrazy funkcji:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$,
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$,
(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$,
(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$,
(e) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$,
(g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x + 2| - 2$.
(h) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$,

Która z tych funkcji jest injekcją, surjekcją czy bijekcją?

2. Niech $k \in \mathbb{N}$. Czy funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n}$, jest różnowartościowa?

3. Podaj przykłady funkcji (a) $f : \mathbb{Z} \overset{1-1}{\to} \mathbb{N}$, (b) $g : \mathbb{N} \overset{\text{na}}{\to} \mathbb{Z}$.

4. Podaj przykład funkcji przekształcającej zbiór $\mathbb{N}$ **na** zbiór liczb wymiernych dodatnich.

5. Podaj przykład funkcji $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takich, że $f \circ g \neq g \circ f$.

6. Rozstrzygnij, czy istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest równość $f(f(n)) = f(n) + 1$ oraz $1 \in f(\mathbb{N})$.

7. Zbiór A ma skończenie wiele elementów i $f : A \to A$. Udowodnij równoważność warunków: (i) f jest injekcją (ii) f jest surjekcją (iii) f jest bijekcją.

8. Niech $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

- Każdą funkcję wzajemnie jednoznaczną $f : A_n \to A_n$ nazywamy *permutacją* zbioru n-elementowego A_n.
- Permutację f taką, że dla pewnych różnych elementów $a_1, a_2, \dots, a_k \in A_n$ zachodzi $f(a_i) = a_{i+1}$ $(i = 1, 2, \dots, k - 1)$, $f(a_k) = f(a_1)$ i $f(x) = x$ dla $x \neq a_1, \dots, a_k$, nazywamy *cyklem* długości k i zapisujemy $(a_1, a_2, \dots, a_k)$. Cykl długości 2 nazywamy *transpozycją*.
- Mówimy, że cykle $(a_1, \dots, a_k)$ i $(b_1, \dots, b_l)$ są rozłączne, jeśli $\{a_1, \dots, a_k\} \cap \{b_1, \dots, b_l\} = \emptyset$.

(a) Udowodnij, że każdą permutację można przedstawić jako złożenie pewnej liczby parami rozłącznych cykli.

(b) Udowodnij, że każdą permutację można przedstawić jako złożenie pewnej liczby transpozycji.

9. Permutację f zapisano na dwa sposoby jako złożenie p transpozycji i jako złożenie q transpozycji. Udowodnij, że $2 \mid p - q$.