Analiza - klasa 1a Zestaw 13. 10.1.2024

Nierówności

1. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

(a) $\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2-n} \geqslant 2n-1,$

(b) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+2n} < \frac{1}{n+3}$

(c) $\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n-1} < \frac{1}{\sqrt[n]{2n-1}}.$

2. Dla danej liczby naturalnej n rozstrzygnij, która z liczb jest większa: n^n czy $(n+1)^{n-1}$

3. Dla danej liczby naturalnej n rozstrzygnij, która z liczb jest większa: $\sqrt[n+1]{n+1}$ czy $\sqrt[n]{n}$.

4. Niech $x, y, z \geqslant 0$. Udowodnij nierówność

$$\frac{(x+y+z)^2}{3} \geqslant x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}.$$

5. Liczy dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają warunek $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1$. Udowodnij, że

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{x_n}\right) \geqslant (n+1)^n.$$

6. Wyznacz maksymalną wartość wyrażenia $(2+x)^3 \cdot \sqrt[4]{2-x}$, gdzie $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Wskaż liczbę x, dla której ta wartość jest przyjmowana.

7. Niech $m, n \in \mathbb{N}$ i $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Wyznacz maksymalną wartość iloczynu

$$(x-a)^m \cdot (b-x)^n,$$

gdzie $a \leqslant x \leqslant b$.

8. Niech $n \in \mathbb{N}$. Znajdź najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)^n + \left(1+\frac{a-b}{a+b}\right)^n,$$

gdzie $a, b > 0$.

9. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie oraz $a_{n+1} = a_1$ i $a_{n+2} = a_2$. Udowodnij nierówność

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 a_{k+1}^2 a_{k+2}^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^3 a_{k+1}^3}\right) \geqslant n^2.$$

10. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność

$$n \cdot \sqrt[n]{n+1} < n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

11. Niech $a > 1$ i $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij nierówność

$$a^n - 1 > n\left(\sqrt{a^{n+1}} - \sqrt{a^{n-1}}\right).$$

12. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij nierówność

$$\prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{\frac{k}{k+1}} \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

13. Liczby a, b, c są dodatnie. Udowodnij nierówności

$$a+b+c \leqslant \frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b} \leqslant \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

14. Liczby a, b, c, d są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$a^3+b^3+c^3+d^3 \geqslant a^2b + b^2c + c^2d + d^2a.$$

15. (*) Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}{3} \leqslant \sqrt[3]{a \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b+c}{3}}.$$

16. (*) Udowodnij, że każdą liczbę naturalną n można jednoznacznie zapisać jako sumę

$$n = \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot j!,$$

gdzie k jest liczbą naturalną i a_j to liczby całkowite takie, ża $0 \leqslant a_j \leqslant j$ dla $j = 1, 2, \ldots, k$.