Analiza - klasa 1a Zestaw 12. 20.12.2023

Ciągi jednomonotoniczne

Definicja. Mówimy, że dwa ciągi liczb rzeczywistych $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ są *jednomonotoniczne*, jeżeli $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ i $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ lub $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ i $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$.

Umawiamy się, że dla dwóch ciągów liczb rzeczywistych $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.$$

Mówimy, że ciąg $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n)$ jest *permutacją* ciągu $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, jeżeli zmieniając kolejność wyrazów w jednym ciągu możemy otrzymać drugi.

Twierdzenie. Jeżeli ciągi liczb rzeczywistych $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ są jednomonotoniczne, to to dla dowlonej permutacji $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n)$ ciągu $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ zachodzą nierówności

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b'_1 & b'_2 & \ldots & b'_n \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_n & b_{n-1} & \ldots & b_1 \end{bmatrix}.$$

---

1. Liczby a, b są dodatnie. Udowodnij nierówności

(a) $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$,

(b) $a^2 + b^2 \leqslant \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a}$,

(c) $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \leqslant \frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{b^3}\sqrt{\frac{a}{b}}$,

(d) $\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$

2. Liczby x, y są dodatnie, $m, n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $a^{m+n} + b^{m+n} \geqslant a^mb^n + a^nb^m$.

3. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzą nierówności

(a) $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2b + b^2c + c^2a$

(b) $a^3b + b^3c + c^3a \geqslant a^2bc + b^2ca + c^2ab$

(c) $\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

4. Udowodnij, że dla liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1}{a_2^2} + \frac{a_2}{a_3^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n^2} + \frac{a_n}{a_1^2} \geqslant \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}.$$

5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^3b}{c} + \frac{a^3c}{b} + \frac{b^3a}{c} + \frac{b^3c}{a} + \frac{c^3a}{b} + \frac{c^3b}{a} \geqslant 6abc.$$

6. Wykaż, że dla dowolnej permutacji $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\frac{a_1}{a'_1} + \frac{a_2}{a'_2} + \ldots + \frac{a_n}{a'_n} \geqslant n.$$

Następnie za pomocą tej nierówności udowodnij nierówność Cauchy'ego.

7. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c są dodatnie, to

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

8. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

9. Dane są liczby $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ i $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n$ i permutacja $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ciągu $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)^2.$$

10. **Nierówność Czebyszewa.** Niech $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots a_n$ i $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Udowodnij, że wówczas

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

11. Niech $k \in \mathbb{N}$ i $a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 0$. Udowodnij, że wówczas zachodzi nierówność

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

12. Niech a, b, c to długości boków pewnego trójkąta. Udowodnij nierówności

$$\frac{a(b+c-a)}{bc} + \frac{b(c+a-b)}{ca} + \frac{c(a+b-c)}{ab} \leqslant 3 \leqslant \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c}.$$

13. Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb naturalnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \ldots + \frac{x_n}{n^2} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

14. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie i $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Udowodnij, że wówczas prawdziwe są nierówności

(a) $\frac{a_1}{S - a_1} + \frac{a_2}{S - a_2} + \ldots + \frac{a_n}{S - a_n} \geqslant \frac{n}{n-1}$,

(b) $\frac{S}{S - a_1} + \frac{S}{S - a_2} + \ldots + \frac{S}{S - a_n} \geqslant \frac{n^2}{n-1}$.