Analiza - klasa 1a Zestaw 11. 6.12.2023

Nierówność Cauchy'ego

Definicja. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

- liczbę $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ nazywamy *średnią arytmetyczną* liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- dla $a_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, liczbę $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ nazywamy *średnią geometryczną* liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- dla $a_k \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, liczbę $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$ nazywamy *średnią harmoniczną* liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Twierdzenie (nierówność Cauchy'ego). Dla liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Ponadto, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Wniosek (nierówność między średnią geometryczną i harmoniczną). Dla liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Ponadto, rówość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

---

1. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n.$$

2. Dana jest liczba naturalna n. Udowodnij, że

$$n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

3. Korzystając z nierówności Cauchy'ego, udowodnij nierówność Bernoulliego.

4. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}.$$

5. Liczby a, b, c są dodatnie i $abc = 1$. Wykaż, że

$$a^4 + 2b^2 + 4c \geqslant 7.$$

6. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z prawdziwa jest nierówność

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 8\sqrt{xyz} - 16.$$

Kiedy ta nierówność staje się równością?

7. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

8. Liczby a, b, c, d są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a+b+c+d}.$$

9. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie. Udowodnij, że

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

10. Niech $0 \leqslant x \leqslant 3$. Wyznacz maksymalną wartość wyrażenia $x^2 \cdot \sqrt{3-x}$ i wskaż liczbę x, dla której ta wartość jest przyjmowana.

11. Wyznacz maksymalną wartość wyrażenia $(1+x)^4 \cdot \sqrt[3]{1-x}$, gdzie $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Wskaż liczbę x, dla której ta wartość jest przyjmowana.

12. Dane są liczby dodatnie $a_1, \ldots, a_n$, takie że $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$ oraz $k \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

$$\frac{1}{a_1^k} + \frac{1}{a_2^k} + \ldots + \frac{1}{a_n^k} \geqslant n^{k+1}.$$

13. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ spełniona jest nierówność

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} \leqslant \sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)}.$$

14. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunek $abcd = 1$. Udowodnij, że

$$\frac{a}{b+c+d+1} + \frac{b}{c+d+a+1} + \frac{c}{d+a+b+1} + \frac{d}{a+b+c+1} \geqslant 1.$$

15. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i b_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \geqslant 4n^2.$$

16. Niech $n \in \mathbb{N}$. Za pomocą nierówności Cauchy'ego udowodnij nierówności

(a) $\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, (b) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}$.

17. Udowodnij nierówność Cauchy'ego, korzystając z nierówności Bernoulliego.