Analiza - klasa 1a Zestaw 10. 5.12.2023

Indukcja matematyczna III

Silna indukcja: Dla każdej liczby naturalnej n dane jest pewne zdanie T_n. Jeżeli
(i) zdanie T_1 jest prawdziwe,
(ii) dla każdej liczby naturalnej k z prawdziwości zdań $T_1, T_2, \ldots, T_k$ wynika prawdziwość zdania T_{k+1}
to każde ze zdań T_n jest prawdziwe.

Indukcja Cauchy'ego: Dla każdej liczby naturalnej n dane jest pewne zdanie T_n. Jeżeli
(i) zdanie T_1 jest prawdziwe,
(ii) dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi implikacja $T_{2^{k-1}} \quad\Rightarrow\quad T_{2^k}$,
(ii) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi implikacja $T_{n+1} \quad\Rightarrow\quad T_n$,
to każde ze zdań T_n jest prawdziwe.

---

1. Wskaż błąd w poniższym rozumowaniu:

Udowodnimy, że wszystkie koty są tego samego koloru, tzn. dla każdej liczby naturalnej n wykażemy zadanie T_n : każde n kotów jest tego samego koloru.

T_1 jest zdaniem prawdziwym, bo jest tylko jeden kot.

Załóżmy, że prawdziwe jest zdanie T_k. Rozważmy dowolną grupę $k+1$ kotów i ponumerujmy koty liczbami $1, 2, \ldots, k, k+1$. Koty o numerach $1, 2, \ldots, k$ są tego samego koloru, bo jest ich k, tak samo koty o numerach $2, 3, \ldots, k+1$ są tego samewgo koloru, bo jest ich k. Zatem dla dowolnego $j = 1, 2, \ldots, k$ koty o numerach j i $j+1$ są tego samego koloru, więc wszystkie $k+1$ kotów jest tego samego koloru. Na mocy zasady indukcji zdanie T_n jest prawdziwe dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

2. Udowodnij, że jeśli n jest liczbą całkowitą większą od 3, to kwotę n złotych można wypłacić monetami 2 i 5 złotowymi.

3. Dana jest liczba rzeczywista x taka, że liczba $x + \dfrac{1}{x}$ jest całkowita. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $x^n + \frac{1}{x^n}$ też jest całkowita.

4. Załóżmy, że $a_1 = 5$, $a_2 = 13$ oraz $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

$$a_n = 2^n + 3^n \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

5. W każde pole tabeli o 3 wierszach i n kolumnach wpisano literę α, β lub γ, przy czym każdą z liter wpisano w dokładnie n pól. Udowodnij, że można tak poprzestawiać litery w każdym wierszu, aby w każdej kolumnie znalazły się trzy różne litery.

6. Wierzchołki n-kata wypukłego pomalowano trzema różnymi kolorami, przy czym każdy kolor został użyty do pomalowania co najmnieje jednego wierzchołka oraz każde dwa kolejne wierzchołki pomalowano różnymi kolorami. Udowodnij, że wielokąt można podzielić przekątnymi na trójkąty w taki sposób, że wierzchołki każdego trójkąta będą pomalowane na różne kolory.

7. Udowodnij, że każdą liczbę naturalną można zapisać jako sumę różnych potęg całkowitych nieujemnych liczby 2.

8. Znajdź wszystkie liczby naturalne n o własności, że grupę składającą się z n osób można podzielić na zespoły cztero- i pięcioosobowe.

9. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ istnieje n różnych dzielników liczby $n!$, których suma jest równa $n!$.

10. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i $y_1, y_2, \ldots, y_m$ to liczby naturalne takie, że

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_m < nm.$$

Udowodnij, że z każdej z sum $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ i $y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ można usunąć część wyrazów (ale nie wszystkie) tak, że sumy pozostałych wyrazów też będą równe.

11. Stosując indukcję Cauchy'ego udowodnij **nierówność Cauchy'ego:** Dla liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Ponadto, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

12. Stosując indukcję Cauchy'ego udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant \left(1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\right)^n.$$