Analiza - klasa 1a Zestaw 9. 22.10.2023

Powtórzenie - nierówności, zasada indukcji

1. Zaznacz zbiór rozwiązań nierówności na osi liczbowej i zapisz go jako sumę rozłącznych przedziałów lub półprostych:

(a) $(2x+1)^2 - 4 < 0$,

(b) $(x+1)(x-2)(x-5) \geqslant 0$,

(c) $(x^2-9)(x^2+9)(x+2) < 0$,

(d) $(x^2+2x+2)(4x-5)(4-5x)(6x+5) \leqslant 0$.

2. Dane są liczby dodatnie a, b, c, d takie, że

$$a+b < c+d \quad \text{i} \quad a+c < b+d.$$

Udowodnij, że

$$a \cdot (a+b+c) < d \cdot (b+c+d).$$

3. Liczby x, y, z są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$(x+y)(y+z) \leqslant x^2 + 2y^2 + z^2.$$

4. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \sqrt{abc}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right).$$

5. Załóżmy, że $x, y, z > 0$. Udowodnij, że

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geqslant 9.$$

6. Udowodnij wzory:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-k-1}{k!} = 1 - \frac{n+1}{n!}$.

7. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij przez indukcję, że

(a) $9 \mid 5^{2n} + 3n - 1$,

(b) $25 \mid 2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$,

(c) $19 \mid 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$.

8. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność

$$2 \cdot \prod_{k=1}^{n}\frac{3^k}{3^k+1} > 1 + \frac{1}{3^n}.$$

9. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

(a) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n+1} > 1$

(b) $1 + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{n\sqrt{n}} < 3$

10. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n takie, że spełniona jest nierówność

(a) $3^n > n \cdot 2^n$,

(b) $2^n + n^2 < 3^n$,

(c) $n \cdot 5^n > 3^{n+1} + (n+1)^2 \cdot 2^n$.