Analiza - klasa 1a Zestaw 9. 21.11.2023

Indukcja matematyczna II

1. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

$$\sqrt{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}.$$

2. Wykaż, że dla $n \in \mathbb{N}$ i $a, b > 0$ zachodzi nierówność

$$(a+b)^n \leqslant 2^{n-1}(a^n + b^n).$$

3. Znajdź wszystkie liczby naturalne n spełniające nierówność

(a) $2^n > n^2$

(b) $n! > n^3$

(c) $3^n > (n+1) \cdot 2^n$

(d) $2^{n+1}(n!)^2 < (2n)!$

(e) $(n!)^2 > n^n$

(f) $(2n)! > 3^{n-1} \cdot (n!)^2 + 4^n$

4. Dane są liczby dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takie, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$. Udowodnij, że $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \leqslant 1$.

5. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{3n}{2n+1} \leqslant 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

6. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

(a) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} \geqslant \dfrac{1}{2}$

(b) $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{2n} \geqslant \dfrac{7}{12}$

7. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

8. Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą (czyli $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, itd.) Udowodnij, że $p_n > 3n$ dla $n \geqslant 12$.

9. Udowodnij **nierówność Bernoulliego:**

Dla każdej liczby naturalnej n i liczby rzeczywistej $x \geqslant -1$ prawdziwa jest nierówność

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

10. Kiedy nierówność Bernoulliego staje się równością?

11. Udowodnij **nierówność Weierstrassa**:

Dla liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n > -1$, które wszystkie są tego samego znaku, prawdziwa jest nierówność

$$(1+x_1) \cdot (1+x_2) \cdot \ldots \cdot (1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

12. Niech $x \geqslant 0$ i $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij nierówność

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$