Analiza - klasa 1a Zestaw 7. 7.11.2023

Indukcja matematyczna I

Zasada indukcji matematycznej. Dla $n \in \mathbb{N}$ niech T_n oznacza zdanie, które, w zależności od n, może być prawdziwe lub fałszywe.

Jeżeli spełnione są oba warunki:

(i) *baza indukcji*: prawdziwe jest zdanie T_1 ,

(ii) *krok indukcyjny*:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad T_n \ \Rightarrow \ T_{n+1},$$

czyli dla każdej liczby naturalnej n ze zdania T_n wynika zdanie T_{n+1},

to dla każdej liczby naturalnej n zdanie T_n jest prawdziwe.

Uwaga: Bazą indukcji może być także zdanie T_k, gdzie k jest pewną liczbą całkowitą. Wówczas krok indukcyjny polega na udowodnieniu dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant k$ implikacji $T_n \ \Rightarrow \ T_{n+1}$. Wówczas zdanie T_n jest prawdziwe dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant k$.

---

1. Za pomocą zasady indukcji wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są równości:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$,

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k = (n+1)! - 1$,

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{n+1} - 1$

(h) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ $(n \geqslant 2)$,

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$,

2. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

(a) $6 \mid n^3 + 5n$,

(b) $9 \mid 4^n + 15n - 1$,

(c) $3 \mid 10^n + 4^n - 2$,

(d) $11 \mid 2^{6n+1} + 3^{2n+2}$,

(e) $37 \mid 1000^n - 1$,

(f) $13 \mid 1000^n + (-1)^{n+1}$,

(g) $41 \mid 5 \cdot 7^{2(n+1)} + 2^{3n}$,

(h) $10 \mid 2^{(2^{n+1})} - 6$.

3. Znajdź i udowodnij wzór na sumę pierwszych n liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1.

4. Znajdź i udowodnij wzory na sumy

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$.

5. **(WAŻNE!!)** Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n i liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest tożsamość

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Natomiast jeśeli liczba n jest nieparzysta, to prawdziwa jest tożsamość

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

6. Na płaszczyżnie narysowano n prostych w taki sposób, że żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Udowodnij, że proste te dzielą płaszczyznę na $(n^2 + n + 2)/2$ obszarów.

7. Na ile obszarów dzieli płaszczyznę n okręgów narysowanych tak, że każde dwa mają 2 punkty wspólne i żadne trzy nie mają puktu wspólnego?

8. Udowodnij, że wśród obszarów na jakie dzieli płaszczyznę n prostych, jest co najwyżej $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ obszarów ograniczonych.

9. Z tablicy o wymiarach 2^n na 2^n usunięto jedno pole o wymiarach 1 na 1. Udowodnij, że pozostałą część tablicy można pokryć nie zachodzącymi na siebie płytkami w kształcie litery L, składającymi się z 3 kwadratów.

10. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to zbiory. Udowodnij, że zbiór $A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n$ składa się z tych elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, które należą do nieparzystej liczby zbiorów A_k.

11. Agent Tajny dostał zadanie rozpracowania mafii handlującej dowodami fałszywych twierdzeń matematycznych. W tym celu organizuje on siatkę n informatorów stosując następującą zasadę: dla dowolnych dwóch różnych informatorów pierwszy przekazuje informacje drugiemu albo drugi pierwszemu. Udowodnij, że pewien informator będzie mógł otrzymywać informacje od pozostałych bezpośrednio lub z udziałem tylko jednego pośrednika. (Nie wymagamy, aby pośrednik był zawsze ten sam!)

12. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $2^{(2^n)} - 1$ ma co najmniej n różnych dzielników pierwszych.