Analiza - klasa 1a Zestaw 6. 24.10.2023

Nierówności

Poniżej a, b, c, d oznaczają liczby rzeczywiste.

(1) jeśli $a < b$ i $b < c$, to $a < c$;

(2) jeśli $a < b$, to $a + c < b + c$ i $a - c < b - c$;

(3) jeśli $a < b$ i $c > 0$, to $ac < bc$ i $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$;

(4) jeśli $a < b$ i $c < 0$, to $ac > bc$ i $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$;

(5) jeśli $a < b$ i $c < d$, to $a + c < b + d$

UWAGA: Nie jest prawdą, że jeśli $a < b$ **i** $c < d$**, to** $a - c < b - d$ **!!!**

(6) jeśli $0 < a < b$ i $0 < c < d$, to $ac < bd$;

(7) jeśli $0 < a < b$ i $c < d < 0$, to $ad > bc$;

UWAGA: Nie jest prawdą, że jeśli $a < b$ **i** $c < d$**, to** $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$ **!!!**

(8) jeśli $a > b > 0$, to $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;

(9) jeśli $a \neq 0$, to $a^2 > 0$;

(10) jeśli $a > 0, b > 0$ i $a^2 > b^2$, to $a > b$;

(11) jeśli $a > 0, b > 0$ i $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, to $a > b$.

---

1. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie i ich iloczyn jest równy 1. Wykaż, że

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

2. Wykaż, że dla liczb nieujemnych a, b, c spełniona jest nierówność

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc.$$

3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb $a, b \geqslant 0$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} \geqslant \frac{a + b}{2}.$$

4. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności.

(a) $x^2 > 2x$,

(b) $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) > 0$,

(c) $(x^2 - 4)(x + 1)^2 \leqslant 0$,

(d) $(x^4 - 1)(x^3 + 1) \geqslant 0$

(e) $\frac{4}{1 + x^2} - \frac{3}{1 - x + x^2} < 0$.

5. Wykaż, że jeśli $0 \leqslant x \leqslant 1$ i $0 \leqslant y \leqslant 1$, to

$$\frac{x}{1 + y} + \frac{y}{1 + x} < 1.$$

6. Niech n będzie liczbą naturalną. Która z liczb jest większa: $\sqrt{n} + \sqrt{n + 2}$ czy $2\sqrt{n + 1}$?

7. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają nierówności

$$a + b + c \leqslant 3d, \quad b + c + d \leqslant 3a, \quad c + d + a \leqslant 3b, \quad d + a + b \leqslant 3c.$$

Wykaż, że $a = b = c = d$.

8. Liczby a, b, c są rzeczywiste. Udowodnij, że wśród trzech liczb $a - b^2$, $b - c^2$, $c - a^2$ przynajmniej jedna jest mniejsza lub równa $\frac{1}{4}$.

9. Załóżmy, że $0 < a_1, a_2, \ldots, a_n < 1$. Udowodnij, że

$$a_1 a_2 \ldots a_n \leqslant \frac{1}{2^n} \quad \text{lub} \quad (1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_n) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

10. Która z pięciu liczb a, b, c, d, e jest najmniejsza, a która największa, jeśli spełniają one nierówności

$$a + b < c + d, \quad b + c < d + e, \quad c + d < e + a, \quad d + e < a + b.$$

11. Wykaż, że dla liczb dodatnich a, b prawdziwe są nierówności

(a) $\left(\frac{1}{a} + 3b\right)\left(\frac{1}{b} + 3a\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geqslant 24$,

(b) $(a+b) \cdot \sqrt{\frac{a + b}{2}} \geqslant a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$.

12. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{ab + ad + bc + cd}{a + b + c + d} \geqslant \frac{ab}{a + b} + \frac{cd}{c + d}.$$

13. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równości

$$a + b + c = 1 \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Udowodnij, że $a \cdot b \cdot c \leqslant 0$.

14. Agent Tajny pływa w środku kwadratowego basenu, Wrogi Agent stoi w jednym z rogów. Wrogi Agent nie umie pływać, ale biega 4 razy szybciej niż Agent Tajny pływa. Agent Tajny biega szybciej niż Wrogi Agent. Czy Agent Tajny może uciec Wrogiemu Agentowi?