Analiza - klasa 1a Zestaw 5. 11.10.2023

Wzory skróconego mnożenia II

1. Załóżmy, że $x + \frac{1}{x} = 3$. Oblicz $x^3 + \frac{1}{x^3}$, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ i $x^9 + \frac{1}{x^9}$.
2. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b spełnione są nierówności:
$$\max(a,b) \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \geqslant \min(a,b).$$
Kiedy każda z tych nierówności staje się równością?
3. Niech $x > 0$. Wykaż, że $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$. Kiedy zachodzi równość?
4. Udowodnij nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną dla trzech i czterech liczb dodatnich:
$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}, \qquad \frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}.$$
5. **Nierówność między średnią kwadratową i arytmetyczną.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi
$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Powtórzenie

1. Czy poniższe zdanie logiczne jest tautologią?
$$\big((p \vee q) \;\Rightarrow\; (q \wedge r)\big) \iff \big((\sim p \wedge \sim q) \vee q \wedge r\big).$$
2. W trakcie kolejnej misji Agent Tajny (A.T.) ma 3 informatorów. Każdy informator albo zawsze kłamie, albo zawsze mówi prawdę. Informatorzy wiedzą, który z nich kłamie, a który mówi prawdę. Każdemu informatorowi A.T. zadał dwa pytania:
   1. *Czy któryś z pozostałych informatorów kłamie wtedy i tylko wtedy, gdy ty mówisz prawdę?*
   2. *Czy, jeśli kłamiesz, to któryś z pozostałych informatorów mówi prawdę?*

   Czy na podstawie otrzymanych odpowiedzi A.T. może stwierdzić, który informator mówi prawdę, a który kłamie?
3. Zapisz zaprzeczenie poniższego zdania i rozstrzygnij, czy prawdziwe jest zdanie, czy jego zaprzeczenie.
$$\exists_{x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}} \forall_{y \in \mathbb{R}} \exists_{z \in \mathbb{R}} (xy \leqslant 0) \vee (x + z > y).$$
4. Dane są zbiory A, B, C, D. Udowodnij, że zbiór
$$X = \big(A \triangle (B \cup C \cup D)\big) \cap \big(B \triangle (C \cup D \cup A)\big) \cap \big(C \triangle (D \cup A \cup B)\big)$$
składa się z tych elementów, które należą do dokładnie jednego ze zbiorów A, B, C, D.
5. Załóżmy, że $x - \frac{1}{x} = -2$. Oblicz $x^3 - \frac{1}{x^3}$ i $x^6 + \frac{1}{x^6}$.
6. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie i ich iloczyn jest równy 1. Wykaż, że
$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n.$$
7. Wykaż, że dla liczb nieujemnych a, b, c spełniona jest nierówność
$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$
8. Udowodni, że dla dowolnych liczb a, b, c zachodzi nierówność
$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca.$$
9. Udowodnij, że dla dowolnych liczb $a, b \geqslant 0$ zachodzi nierówność
$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}.$$
10. Dane są liczby rzeczywiste x, y, z takie, że
$$x + y + z = -5, \quad xy + yz + zx = 2, \quad xyz = 12.$$
Wyznacz wartości wyrażeń: $x^3 + y^3 + z^3$ oraz $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$.
11. Rozwiąż układy równań
$$\text{(a)} \begin{cases} (x+y)\cdot z + x^2 = -3 \\ (y+z)\cdot x + y^2 = 0 \\ (z+x)\cdot y + z^2 = 3 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} 2y^2 + 4z^2 - 4yz + 2y + 1 = 0 \\ 3z^2 - 6z + 3 = x^2 \end{cases}$$