Analiza - klasa 1a Zestaw 4. 3.10.2023

Wzory skróconego mnożenia I

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2, \quad a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \qquad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$

1. Za pomocą wzorów na kwadrat sumy lub różnicy oblicz 19^2, 52^2, 195^2, 107^2, 999^2.

2. Za pomocą wzoru na różnicę kwadratów oblicz iloczyny $18\cdot 22$, $53\cdot 47$, $495\cdot 505$.

3. Przedstaw wyrażenia jak kwadraty lub sześciany:

(a) p^2+6p+9,
(b) $a^2-10a+25$,
(c) $9x^2-12xy+4y^2$,
(d) $x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6$,
(e) $\frac{1}{27}a^3-\frac{1}{3}a^2b+ab^2+b^3$,
(f) $27p^3+9p^2q+pq^2+\frac{1}{27}q^3$,
(g) $x^6-3x^3+3-\frac{1}{x^3}$.

4. Rozwiąż równania

(a) $x^2-2x=3$, (b) $x^2+x=2$, (c) $x^2+1=x$, (d) $4x^2-2x=\frac{3}{4}$

5. Zapisz jako iloczyny:

(a) $4x^2-y^2$,
(b) x^5-16x,
(c) $a^2+4ab+3b^2$,
(d) $2x^2+2xy-y^2$,
(e) a^6-b^6,
(f) $8a^3+b^3c^3$
(g) $a^3+6a^2+12a+9$,
(h) $a^6-3a^4b^2+3a^2b-2b^3$
(i) $x^3-xy^2+x^2y-y^3$,
(j) $x^3+xy^2-x^2y-y^3$,
(k) $a^3+b^3+3ab-1$,
(l) a^4+4b^4,
(m) a^8-16b^8,
(n) $a^{12}-4b^{12}+4a^8b^4-a^4b^8$,
(o) $x^3+y^3+z^3-3xyz$,
(p) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$,

6. (a) Każda z liczb całkowitych a, b jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych. Wykaż, że liczba $a\cdot b$ też jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.

(b) Każda z liczb całkowitych a, b jest różnicą kwadratów liczb całkowitych. Czy liczba $a\cdot b$ też jest różnicą kwadratów liczb całkowitych?

7. Uprość sumy

(a) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$,
(b) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}$,
(c) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$,
(d) $\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{4k^4+1}$,
(e) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-\frac{1}{2}}{k^4+\frac{1}{4}}$

8. Rozwiąż układy równań

(a) $\begin{cases} xy+xz=8-x^2 \\ xy+yz=12-y^2 \\ yz+zx=-4-z^2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x^2+2y^2-2yz=100 \\ 2xy-z^2=100 \end{cases}$

9. Rozwiąż równania
(a) $(x-y+z)^2=x^2-y^2+z^2$,
(b) $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{x+y+z}{2}$.

10. Udowodnij, że każda liczba naturalna postaci a^4+3, gdzie $a\in\mathbb{N}$ i $a>1$, jest sumą trzech kwadratów liczb naturalnych.

11. Załóżmy, że $x+y=a$ i $xy=b\neq 0$. Wyraź za pomocą a i b wartości wyrażeń:
(a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, (b) x^2+y^2, (c) x^3+y^3, (d) $|x-y|$, (e) $|x^3-y^3|$, (f) x^4+y^4.

12. Załóżmy, że $x+y+z=a$, $xy+yz+zx=b$, $xyz=c$. Wyraź poprzez a,b,c wartości wyrażeń

(a) $x^2+y^2+z^2$,
(b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$,
(c) $x^3+y^3+z^3$,
(d) $(x+y)(y+z)(z+x)$,
(e) $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$,
(f) $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$.

13. Niech $a,b,c\in\mathbb{R}$. Wykaż, że $\sqrt[3]{a-b}+\sqrt[3]{b-c}+\sqrt[3]{c-a}\neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a,b,c są parami różne.

14. Liczby całkowite k,l,m spełniają równość
$$(k-l)^2+(l-m)^2+(m-k)^2=klm.$$
Wykaż, że liczba $k^3+l^3+m^3$ jest podzielna przez $k+l+m+6$.