

Wprowadzenie

1. Liczby a i b są naturalne. Która z liczb jest większa, $a^a \cdot b^b$ czy $a^b \cdot b^a$?
2. Liczbę naturalną n zapisano w pozycyjnym systemie liczbowym o podstawie a jako 111. Udowodnij, że n nie jest kwadratem liczby naturalnej.
3. Każda osoba na świecie uściśnęła dłoń pewnej liczbie innych osób. Udowodnij, że liczba osób, które uściśnęły dłoń nieparzystej liczbie osób, jest parzysta.
4. W pewnej grupie dziewcząt i chłopców każda dziewczynka zna n chłopców i każdy chłopiec zna n dziewcząt, liczba n jest naturalna. Udowodnij, że w grupie jest ta sama liczba chłopców i dziewcząt.
5. 200 osób posadzono w 10 rzędach, po 20 w każdym rzędzie. Z każdej z tak utworzonych 20 kolumn wybrano najniższą osobę i z tych wybranych 20 osób wybrano najwyższą i dano jej do potrzymania niebieski balonik.

Następnie, wybrano najwyższą osobę z każdego rzędu i z tych 10 osób wybrano najniższą i dano jej do potrzymania czerwony balonik.

Okazało się, że te dwie wybrane osoby są różnego wzrostu. Która z nich jest wyższa?

6. Dane są liczby x, y, z takie, że $xyz = 1$. Znajdź wartość sumy

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}.$$

7. Udowodnij, że jeżeli

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1,$$

to

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0.$$

8. Liczby a, b, c są dodatnie i $a < b + c$. Udowodnij, że

$$\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

9. Udowodnij, że

$$\frac{9}{100} < \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{10}.$$