Analiza - klasa 4a Zestaw 1. 6.9.2023

Granica ciągu III

Przypomnienie:

Tw. 1. Niech $(a_n)_n$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych, który jest niemalejący i ograniczony z góry lub nierosnący i ograniczony z dołu. Wówczas ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

Tw. 2. (Stała Eulera) Ciąg $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony z góry, więc zbieżny. Jego granicę, czyli liczbę

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

nazywamy *stałą Eulera*. Jest to liczba niewymierna.

Tw. 3. $e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, a dokładniej dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!}$, gdzie $0 < \theta_n < 1$ i $\lim_{n\to\infty} \theta_n = 1$

---

1. Zbadaj zbieżność ciągu (x_n) zadanego przez warunki:

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}x_n^2 + x_n + \frac{3}{2}}.$$

Jeżeli ciąg jest zbieżny, wyznacz jego granicę.

2. Oblicz granicę ciągu $x_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$.

3. Zbadaj zbieżność ciągów

(a) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$, (b) $y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k-1)(n+k)}}$.

4. Ciąg $(a_n)_n$ jest ograniczony z góry i $a_{n+1} - a_n > -\frac{1}{n^2}$ dla każdego n. Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

5. Oblicz granice

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^{n+4}$, (b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{\binom{n}{2}}$, (c) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n+4}$.

6. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} n \sin(2\pi e n!)$.

7. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+1)!}$.

8. Załóżmy, że $a_n \in \mathbb{R}$ i $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

9. Załóżmy, że $a_n \geqslant 0$ i $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

10. Ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny do g. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = g.$$

11. Ciąg $(a_n)_n$ ma wyrazy dodatnie i jest zbieżny do g. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = g.$$

12. Dany jest ciąg liczb dodatnich $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$.

13. Oblicz granice ciągów

(a) $\frac{2023^n}{n!}$, (b) $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$, (c) $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, (d) $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$, (e) $\sqrt[n]{(n-1)^3 7^n - n^8 3^{n+1}}$.

14. Udowodnij, że ciąg $(\sin n)_n$ nie ma granicy.

15. Dana jest liczba naturalna k oraz ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, \ldots, k\}$. Niech

$$b_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n}, \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Załóżmy, że w ciągu (b_n) wystepuje nieskończenie wiele wyrazów całkowitych. Wykaż, że wszystkie wyrazy ciągu (b_n) sa całkowite.

Analiza - klasa 4a   Zestaw 2.   7.9.2023

Granica ciągu IV

Definicja. Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ jest *rozbieżny do* $+\infty$ $(-\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{M>0} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n>N} \ a_n > M \quad (a_n < -M).$$

Piszemy wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ lub $a_n \to +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ lub $a_n \to -\infty$).

Definicja. Mówimy, że ciąg $(a_n)_n$ ma granicę, jeżeli jest on zbieżny (wtedy ma granicę skończoną) lub rozbieżny do $\pm\infty$ (wtedy ma granicę nieskończoną).

Stw. Załóżmy, że $a_n \to +\infty$. Wówczas

- $\dfrac{1}{a_n} \to 0$,
- jeśli ciąg $(b_n)_n$ jest zbieżny lub ograniczony z dołu, to $a_n + b_n \to +\infty$;
- jeśli istnieje stała $c > 0$ taka, że $b_n > c$ dla prawie wszystkich n lub $b_n \to c$, to $a_n b_n \to +\infty$;
- jeśli istnieje stała $c < 0$ taka, że $b_n < c$ dla prawie wszystkich n lub $b_n \to c$, to $a_n b_n \to -\infty$;
- jeśli $b_n \to +\infty$, to $a_n + b_n \to +\infty$ i $a_n b_n \to +\infty$;

Stw. Jeśli $a_n \to 0$ i $a_n > 0$ dla prawie wszystkich n, to $\dfrac{1}{a_n} \to +\infty$.

Stw. Jeżeli $a_n \to +\infty$ i $b_n \geqslant a_n$ dla prawie wszystkich n, to $b_n \to +\infty$.

Wyrażenia nieoznaczone:

- $\infty - \infty$, np. $(n+1) - n$, $n^2 - n$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
- $0 \cdot \infty$, np. $\dfrac{1}{n} \cdot n$, $\dfrac{1}{2^n} \cdot n^4$, $\dfrac{1}{2^n} \cdot n!$,
- $\dfrac{0}{0}$, np. $\dfrac{(\frac{1}{2})^n}{(\frac{1}{3})^n}$, $\dfrac{\frac{1}{n}}{(\frac{1}{2})^n}$,
- $\dfrac{\infty}{\infty}$, np. $\dfrac{n}{n+1}$, $\dfrac{2^n}{n}$, $\dfrac{n}{2^n}$,
- 1^∞, np. $(\sqrt[n]{2})^n$, $(\sqrt[n]{2})^{n^2}$, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$,
- ∞^0, np. $n^{1/n}$, $(2^n)^{1/n}$.

---

1. Oblicz granice lub wykaż, że nie istnieją:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4 - 5n^3 + 17n^2 - 9n - 2}{12n^3 - 5n^2 + 10n - 7}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{2n} - 3^n}{3^n - 2^n}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n + n^3 - 5}{n^4 + 2^n \cdot n}$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$,

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$,

2. **Suma nieskończonego ciągu geometrycznego.** W zależności od $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zbadaj istnienie i wyznacz granice $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot q^{k-1}$.

3. Niech $a_n \to +\infty$, $b_n = \dfrac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)$, $c_n = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$ (gdy $a_k > 0$). Udowodnij, że $b_n \to +\infty$ i $c_n \to +\infty$.

4. Dany jest ciąg $(a_n)_n$ taki, że $a_n > 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$. Udowodnij, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = +\infty$.

5. Znajdź granice ciągów, jeśli istnieją:

(a) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$,

(b) $\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)^{n}$,

(c) $\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)^{3^n}$,

(d) $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2^n}$,

(e) $\sqrt[n!]{n}$,

(f) $\sqrt[n]{n!}$,

(g) $\sqrt[n]{(2n)! - 2n!}$,

6. Wykaż, że poniższe granice istnieją i zbadaj, czy są one równe 0 lub $+\infty$.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{2^k}\right)$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)$,

7. Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1} = +\infty.$$

Analiza - klasa 4a Zestaw 3. 14.9.2023

Granica ciągu V

Twierdzenie Bolzano - Weierstrassa. Z każdego ciągu ograniczonego liczb rzeczywistych można wybrać podciąg zbieżny.

Tw. (Warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu) Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{m,n>N} |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Twierdzenie Stolza. Ciągi liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ spełniają warunki:
(i) ciąg $(b_n)_n$ jest ściśle monotoniczny i $b_n \neq 0$ dla każdego n,
(ii) istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = g$,
(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ lub $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.
Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g$.

---

1. Korzystając z warunku Cauchy'ego, zbadaj zbieżność ciągów:
(a) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, (b) $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k}$, (c) $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, (d) $d_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)^2}$.

2. Dany jest nierosnący ciąg liczb dodatnich $(a_n)_n$ taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Wykaż, że ciąg $b_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$ jest zbieżny.

3. Niech $(a_n)_n$ to ciąg liczb rzeczywistych. Załóżmy, że istnieje stała $\lambda \in (0,1)$ taka, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqslant \lambda |a_{n+1} - a_n|$. Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

4. Niech $k \in \mathbb{N}$ i $k > 1$. Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ spełnia warunki

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0 \quad \text{i} \quad \forall_{\varepsilon>0} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n,m>N} |a_{kn} - a_{km}| < \varepsilon.$$

Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

Podaj przykłady, że z żadnego z tych warunków osobno nie wynika zbieżność ciągu.

5. Wykaż, że każdy ciąg zbieżny zawiera wyraz najmniejszy lub największy.

6. Wykaż, że z każdego ograniczonego ciągu liczb zespolonych można wybrać podciąg zbieżny.

7. Niech $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Wykaż, że istnieje bijekcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że ciąg $a_n = \sum_{k=1}^{n} a_{f(k)}$ jest rozbieżny.

8. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ taki, że ciąg $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ jest zbieżny. Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie bijekcją taką, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $|f(k) - k| \leqslant 2023$. Wykaż, że ciąg $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_{f(k)}$ jest zbieżny.

9. Oblicz granice
(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

10. Niech $p \in \mathbb{N}$. Oblicz granice
(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$,
(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1}\right)$,
(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(p+k)!}{k!}$.

11. Dane są ciągi zbieżne $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$:

$$a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{2^k}\right), \qquad b_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

oraz $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Wykaż, że istnieje skończona granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a - a_n}{b_n - b}.$$

12. Wykaż, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, $b_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, oraz

$$\lim_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = +\infty,$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = g.$$

13. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $(x_n)_n$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty}(x_{2n} + x_{2n+1}) = 2022, \qquad \lim_{n\to\infty}(x_{2n-1} + x_{2n}) = 117.$$

Wykaż, że ciąg $\left(\frac{x_{2n}}{x_{2n+1}}\right)_n$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

14. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1.$$

Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n \sqrt[3]{3n} = 1.$$

Analiza - klasa 4a Zestaw 4. 28.9.2023

Granica ciągu 6 (powtórzenie)

1. Oblicz granice ciągów

(a) $\dfrac{3n^4-10n^3-2n^2+7}{9n^4-5n^2+19n}$

(b) $\dfrac{5^{n+1}\cdot n^2-3^{n+2}\cdot n^3}{3n\cdot 5^{n+2}+2^{n+3}\cdot n^6}$

(c) $\dfrac{2\sqrt{n}-3\sqrt[3]{n+1}}{3\sqrt{n+1}-2\sqrt[3]{n}}$,

(d) $n^3\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-n\sqrt{2}\right)$,

(e) $\sqrt[3]{n^3+2n^2+4}-\sqrt[3]{n^3+1}$,

(f) $\sqrt[n]{7^n-3\cdot 5^n-12}$,

(g) $\dfrac{n!}{2^{n^2}}$,

(h) $\dbinom{2n}{n}^{-1}$

(i) $\dfrac{2^n n!}{n^n}$,

(j) $\left(\dfrac{n(n+1)}{(n+2)^2}\right)^{3n-2}$,

(k) $\left(\dfrac{3n^2}{3n^2-1}\right)^n$,

(l) $\left(\dfrac{3n^2}{3n^2-1}\right)^{n^3}$,

(m) $\sqrt[n]{\dbinom{3n}{n}}$,

(n) $\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n}$,

(o) $\sqrt[n]{\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{n^2+1}}$,

(p) $\dfrac{1}{n!}\dbinom{2n}{n}$,

(q) $\dfrac{\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right)^n}{n!}$

2. Zbadaj zbieżność ciągów zadanych przez warunki

(a) $a_0=3$, $a_{n+1}=\sqrt{3a_n+4}$,

(b) $b_0=2$, $b_{n+1}=\dfrac{2b_n}{1+b_n}$,

(c) $c_0=5$, $c_{n+1}=\dfrac{(c_n-2)^2}{5}$.

3. Niech $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{2a_n+1}{a_n+1}$, $b_1=2$, $b_{n+1}=\dfrac{2b_n+1}{b_n+1}$. Udowodnij, że

$$\sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\}=\inf\{b_n : n\in\mathbb{N}\}.$$

4. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\{(2+\sqrt{3})^n\}$.

5. Wyznacz $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}^{-1}$.

6. Zbadaj zbieżność ciągów

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{\sqrt{k+1}}$,

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$,

(c) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}}$,

(d) $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{2k+1}-\sqrt[3]{2k}\right)$

(e) $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\sqrt[3]{2k+1}-\sqrt[3]{2k}\right)$

(f) $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{2k+1}-\sqrt[3]{2k}\right)^3$

(g) $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{3^k}\right)$,

(h) $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{(-1)^k}{2^k}\right)$.

Wskazówki: (g): $\frac{k}{3^k}<\frac{1}{2^k}$ dla dostatecznie dużych k, (h): zbadaj ciągi $(d_{2n})_n$, $(d_{2n-1})_n$ i $(\frac{d_n}{d_{n+1}})_n$.

7. Dany jest ciąg $(a_n)_n$ taki, że $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a$. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=a.$$

8. Niech $x\in\mathbb{R}$. Wyznacz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor x\rfloor+\lfloor 2x\rfloor+\ldots+\lfloor nx\rfloor}{n^2}.$$

9. Oblicz granice (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!}\sum\limits_{k=1}^{n}k!$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty}n!\cdot\left(e-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}\right)$.

10. Ciąg $(a_n)_n$ jest zadany rekurencyjnie: $a_1=1$, $a_n=n(a_{n-1}+1)$. Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\dfrac{a_k+1}{a_k}$.

11. P jest wielomianem unormowanym stopnia $k>0$. Oblicz granice ciągów $\sqrt[n]{P(n)}$, $\sqrt[2^n]{P(n)}$, $\sqrt[n]{P(2^n)}$.

12. Dany jest ciąg liczb dodatnich (a_n) taki, że $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=2023$. Znajdź granicę $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$.

Analiza - klasa 4a Zestaw 5. 11.10.2023

Funkcje wykładnicza i logarytmiczna I

Przypomnienie: Jeśli $a > 0$ i $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{N}$, to

$$a^x = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p \quad \text{oraz} \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Lemat o ciągach szybko zbieżnych do 0. Jeżeli $(a_n)_n$ jest ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $na_n \to 0$, to $\lim_{n\to\infty}(1 + a_n)^n = 1$.

Tw. 1. (istnienie i własności funkcji wykładniczej). Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ ciąg

$$a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

jest zbieżny do granicy $g(x) \in \mathbb{R}$, którą zapisujemy $\exp x$.

Funkcję $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy *funkcją wykładniczą* lub *eksponentą*. Ma ona następujące własności:

(i) $\exp(x) > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz $\exp(x) \geqslant 1$ dla $x \geqslant 0$ i $\exp(x) \leqslant 1$ dla $x \leqslant 0$;

(ii) $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$;

(iii) jeżeli $x \in \mathbb{Q}$, to $\exp x = e^x$;

(iv) $\exp x \geqslant 1 + x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i $\exp x \leqslant \frac{1}{1-x}$ dla $x < 1$;

(v) funkcja exp jest ściśle rosnąca; jeśli $x_n \to +\infty$ to $\exp x_n \to +\infty$ i $\exp(-x_n) \to 0$.

Ze względu na punkty (ii) i (iii) ma sens zapis $e^x = \exp x$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Tw. 2. Obrazem funkcji exp jest cała półprosta $(0, +\infty)$. Zatem $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ jest bijekcją.

Definicja. *Logarytm naturalny* liczby dodatniej $y > 0$ jest to jedyna liczba $x \in \mathbb{R}$ taka, że $\exp(x) = y$. Piszemy wówczas $\ln y = x$.

Stw. 3. Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\ln(\exp x) = x$; dla każdego $x > 0$ zachodzi $\exp(\ln x) = x$, czyli $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do exp.

Stw. 4. (Własności logarytmu naturalnego)

(i) Funkcja $\ln x$ jest rosnąca;

(ii) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ dla dowolnych $x, y > 0$ i $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$;

(iii) dla każdego $x > 0$ spełnione są nierówności $1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1$;

(iv) jeżeli $t_n > -1$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $t_n \to 0$, to $\lim_{n\to\infty} \ln(1 + t_n) = 0 = \ln 1$;

(v) jeżeli $x_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $x_n \to x > 0$, to $\lim_{n\to\infty} \ln x_n = \ln x$;

(vi) jeżli $x_n > 0$ i $x_n \to +\infty$, to $\ln x_n \to +\infty$;

(vii) jeżli $x_n > 0$ i $x_n \to 0$, to $\ln x_n \to -\infty$.

---

1. Wykaż, że jeśli $(x_n)_n$ jest ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$, to $\lim_{n\to\infty} \exp x_n = \exp x$.

2. Niech $x \in \mathbb{R}$ i $(t_n)_n$ jest ciągiem liczb rzeczywistych różnych od zera i zbieżnym do zera. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} \frac{\exp(x + t_n) - \exp x}{t_n} = \exp x$.

3. Udowodnij, że $\exp x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

4. Wykaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $|e^x - 1 - x| \leqslant |x|^2 \cdot e^{|x|}$.

5. Niech $q \in (0, 1)$, $x, y \in \mathbb{R}$ i $x \neq y$. Udowodnij nierówność

$$(1 - q)\exp x + q \exp y > \exp\big((1 - q)x + qy\big).$$

6. Niech $a > 0$ i $x \in \mathbb{Q}$. Udowodnij, że $a^x = \exp(x \cdot \ln a)$.

7. Niech $a > 0$. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} n \cdot (\sqrt[n]{a} - 1)$.

8. Niech $x_n \to x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = e^x$.

9. Niech $t_n \neq 0$, $t_n \to 0$ i $x > 0$. Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(x + t_n) - \ln x}{t_n} = \frac{1}{x}$.

10. Udowodnij, że ciąg $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ jest zbieżny.

11. Oblicz granice

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$, (b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

12. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_m > 0$. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \ldots + \sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^n$.

13. Dany jest ciąg $(a_n)_n$ taki, że (a) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = a$. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = a.$$

14. Dany jest ciąg liczb dodatnich (a_n) taki, że $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = g$. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \cdot \ln \frac{1}{a_n} = g.$$

Analiza - klasa 4a   Zestaw 6.   19.10.2023

Funkcje wykładnicza i logarytmiczna II

Definicja (Potęga o wykładniku rzeczywistym). Niech $a > 0$. Z 6 zestawu wiemy, że jeśli $x \in \mathbb{Q}$, to $a^x = \exp(x \ln a)$. Ostatnia równość ma sens dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, więc definiujemy potęgę liczby a z wykładnikiem $x \in \mathbb{R}$ wzorem

$$a^x = \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}.$$

Funkcję $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ daną wzorem $f(x) = a^x$ nazywamy *funkcją wykładniczą* o podstawie a.

Tw. 1. Jeżeli $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbb{R}$ to

(i) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ i $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ (ii) $a^{xy} = (a^x)^y$,   (iii) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$,

Tw. 2. Obrazem funkcji wykładniczej o podstawie $a \neq 1$ jest zbiór $(0, +\infty)$. Ponadto

- Jeżeli $a > 1$ to funkcja $x \to a^x$ jest ściśle rosnąca Jeśli $x_n \to +\infty$, to $a^{x_n} \to +\infty$ i $a^{-x_n} \to 0$.
- Jeżeli $a < 1$ to funkcja $x \to a^x$ jest ściśle malejąca Jeśli $x_n \to +\infty$, to $a^{x_n} \to 0$ i $a^{-x_n} \to +\infty$.

Definicja logarytmi. Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Wówczas funkcja $a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ jest bijekcją, ma więc funkcję odwrotną. *Logarytmem* o podstawie a z liczby $y > 0$ nazywamy jedyną liczbę rzeczywistą x taką, że $a^x = y$. Piszemy wówczas

$$\log_a y = x.$$

Logarytm o podstawie $a = 10$ nazywamy *logarytmem dziesiętnym* i zapisujemy $\log y = \log_{10} y$. Oczywiście $\ln y = \log_e y$.

Tw. 3. Jeżeli $a > 0$ i $a \neq 1$, to

(i) $\log_a 1 = 0$ i $\log_a a = 1$;

(ii) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$ dla $x, y > 0$;

(iii) $\log_a (x^y) = y \cdot \log_a x$ dla $x > 0$ i $y \in \mathbb{R}$.

Tw. 4. Funkcja $x \to \log_a x$, gdzie $x \in (0, +\infty)$ jest rosnąca dla $a > 1$ i malejąca dla $a < 1$, a jej obrazem jest cały zbiór liczb rzeczywistych.

Tw. 5. (Zmiana podstawy logarytmu) Niech $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $x > 0$. Wówczas

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

---

1. Czy liczba niewymierna podniesiona do potęgi niewymiernej może dać liczbę wymierną?

2. Wykaż, że dla $a_1, a_2, \ldots, a_k > 0$, $a_i \neq 1$

$$\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \ldots \cdot \log_{a_{k-1}} a_k \cdot \log_{a_k} a_1 = 1.$$

3. Wykaż, że dla $a, b > 0$, $a \neq 1$, oraz $p \neq 0$ zachodzi równość $\log_{a^p} b = \dfrac{1}{p} \log_a b$.

4. Uprość wyrażenia

(a) $\log_{3\sqrt{3}} 27$

(b) $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$

(c) $(\sqrt{2})^{\log_2 9}$

(d) $(\sqrt[3]{9})^{\frac{1}{5 \log_5 3}}$

(e) $\log 5 \cdot \log 20 + (\log 2)^2$

(f) $\log_{\sqrt{2}} 27 \cdot \log_9 16$

(g) $\log_{16} \sqrt{5} \cdot \log_{25} \sqrt[3]{7} \cdot \log_{\frac{1}{49}} 32$

(h) $\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$

5. Znajdź granice ($a > 0$ i $a \neq 1$)

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\log_a (n + 1) - \log_a n)$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n^t}$, $t > 0$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_n x$, $x > 0$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log_a n}$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\log_a n}}$,

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_n (n + 1)$.

6. Wykaż, że jeśli $0 < a < 1 < b$, to $\log_a b + \dfrac{1}{4} \log_b a + 1 \leqslant 0$.

7. Niech $a, b, c, x > 0$ i $a, b, c, abc \neq 1$. Wiedząc, że $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$, $\log_c x = 6$, oblicz $\log_{abc} x$.

8. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n, a > 0$ i $x_1 x_2 \ldots x_n = a$. Udowodnij, że

$$(\log_a x_1)^2 + (\log_a x_2)^2 + \ldots + (\log_a x_n)^2 \geqslant \frac{1}{n}.$$

9. Niech $n \geqslant 2$. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n > 1$

$$\log_{a_1}(a_2) + \log_{a_2}(a_3) + \ldots + \log_{a_{n-1}}(a_n) + \log_{a_n}(a_1) \geqslant n.$$

10. Niech $n \geqslant 2$. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n, x > 1$

$$\log_{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}(x) \leqslant \sqrt[n]{\log_{a_1}(x) \cdot \log_{a_2}(x) \cdot \ldots \cdot \log_{a_n}(x)}.$$

11. Niech $x > 0$. Udowodnij nierówność $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1 + x)$.

12. Dany jest ciąg liczb dodatnich (a_n) taki, że $a_n \neq 1$ i $a_n \to 1$. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{a_n - 1} = 1.$$

13. Oblicz granicę ciągu o wyrazach

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \ldots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

Analiza - klasa 4a Zestaw 7. 26.10.2023

Funkcje wykładnicza i logarytmiczna III

1. Funkcje hiperboliczne. Dla $x \in \mathbb{R}$ niech

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

(a) Udowodnij, że funkcja $\cosh x$ maleje na półprostej $(-\infty, 0]$ i rośnie na $[0, +\infty)$, natomiast funkcja $\sinh x$ jest ściśle rosnąca.

(b) Wyznacz funkcję odwrotną do $\cosh x$ na $[0, +\infty)$ i funkcję odwrotną do $\sinh x$.

(c) Udowodnij tożsamość zwaną *jedynką hiperboliczną*: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

(d) Udowodnij tożsamości:

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

(e) Udowodnij, że funkcja $\mathrm{tgh} x$ jest rosnącą bijekcją $\mathbb{R}$ na przedział $(-1, 1)$ i wyznacz jej funkcję odwrotną.

2. Rozwiąż równania:

(a) $7^{x-5} = 9^{5-x}$,

(b) $7^{x+1} + 7^x = 56$,

(c) $x^{x^2-5x+6} = 1$.

(d) $8^x - 3 \cdot 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$,

(e) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$,

(f) $2^{3x} \cdot 7^{x-2} = 4^{x-1}$,

(g) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$,

(h) $8^x(3x+1) = 4$,

(i) $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$,

(j) $\log_{(x+2)} 16 = 2$,

(k) $\log_x 7 + \log_{x^2} 7 = 6$,

(l) $\sqrt{x^x} = x^{\sqrt{x}}$,

(m) $x^{\ln x} = e$

(n) $\dfrac{1}{5 - 4\log x} + \dfrac{4}{1 + \log x} = 3$,

(o) $\log_4(x+2) \cdot \log_x 2 = 1$,

(p) $x^{\frac{1}{4}(\log x + 7)} = 10^{\log x + 1}$

(q) $x^{1/\log x} = 10^{x^4}$

(r) $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

(s) $\log_4\left(2\log_3\left(1 + \log_2(1 + \log_2 x)\right)\right) = \dfrac{1}{2}$

(t) $x^{\log^2 x + \log(x^3) + 3} = \dfrac{2}{\frac{1}{\sqrt{1+x}-1} - \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}}$

3. Dla danych liczb rzeczywistych $a, b > 0$, $b \neq 1$ rozwiąż równanie

$$1 + \log_b(2\log a - x) \cdot \log_x b = \frac{2}{\log_b x}.$$

4. Dla danej liczby $a > 0$ rozwiąż równanie

$$1 + \log_x \frac{4-x}{10} = \big(\log(\log a) - 1\big) \cdot \log_x 10.$$

5. Rozwiąż nierówności

(a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-1} \leqslant 8$

(b) $\dfrac{1}{3^{x^2}} \cdot 9^{x+1} > \dfrac{1}{729}$

(c) $8^x - 2 \leqslant 18 \cdot 4^{x-1} - 3 \cdot 2^{x+1}$

(d) $x^2 \cdot 2^x + x \cdot 2^{x-1} > 0$

(e) $\dfrac{1}{2^x - 1} > \dfrac{1}{1 - 2^{x-1}}$

(f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x - 2^{x+1} \geqslant 1$

(g) $3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} > 4^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

(h) $x^{\frac{3}{4}x} < (\sqrt{x})^{x^2-x+1}$

(i) $(x^2 + x + 1)^x < 1$

(j) $|x|^{x^2-x-2} < 1$

(k) $\log_3(x^2 - 1) < 1$

(l) $\ln(x+1) - \ln x < 2$

(m) $\log_{(2x-3)} x \leqslant 1$

(n) $\log_x(x-1) \geqslant 2$

(o) $\log_{(x-3)} \dfrac{x-2}{x-4} \geqslant 1$

(p) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x+1} < 1 + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{4 - x^2}$

(q) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 > (\log_{4x} 2)^2$

(r) $\dfrac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} > 3$

6. Niech $a > 1$. Rozwiąż nierówność

$$2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2x} a > 0.$$

7. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji

$$f(x) = 2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Niech $a \in (0, 1)$. Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = a^x + (1-a)^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Rozwiąż nierówności $f(x) < 1$ i $f(x) > 1$.

9. Wykaż, że jeśli $x, y > 1$, to

$$\ln x \cdot \ln y \leqslant \ln \sqrt{xy} \cdot \ln \frac{x+y}{2}.$$

10. Wyznacz największą wartość funkcji $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \ln(x) + \ln(1-x).$$

Analiza - klasa 4a   Zestaw 8.   15.11.2023

Granica funkcji I

Definicja. Niech $A \in \mathbb{R}$. Mówimy, że liczba $b \in \mathbb{R}$ jest *punktem skupienia* zbioru A, jeżeli istnieje ciąg liczb $a_n \in A \setminus \{b\}$ taki, że $a_n \to b$. Przyjmujemy, że $+\infty$ jest punktem skupienia zbioru A niegoraniczonego z góry, a $-\infty$ jest punktem skupienia zbioru A niegoraniczonego z dołu. Umawiamy się, że $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$.

Definicja Heinego (ciągowa) granicy funkcji w punkcie. Niech $A \subset \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A i $f : A \to \mathbb{R}$. Mówimy, że $g \in \overline{\mathbb{R}}$ jest granicą funkcji f w punkcie b, jeżeli dla każdego ciągu $a_n \in A \setminus \{b\}$, takiego że $a_n \to b$ zachodzi $f(a_n) \to g$. Piszemy wówczas $\lim\limits_{x\to b} f(x) = g$ lub $f(x) \xrightarrow{x\to b} g$.

Granice jednostronne. Mówimy, że g jest granicą prawostronną (lewostronną) funkcji f w punkcie $b \in \mathbb{R}$ jeżeli dla każdego ciągu $a_n \in A \cap (b, +\infty)$ ($a_n \in A \cap (-\infty, b)$) takiego, że $a_n \to b$ zachodzi $f(a_n) \to g$. Piszemy wówczas

$$\lim_{x\to b^+} f(x) = g \text{ (granica prawostronna)} \quad \text{i} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = g \text{ (granica lewostronna).}$$

Stw. 1. Niech $A \subset \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A i $f : A \to \mathbb{R}$. Wówczas $\lim\limits_{x\to b} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = g$.

Stw. 2. (Własności arytmetyczne granicy funkcji) Niech $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A i istnieją granice $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$, $\lim\limits_{x\to b} g(x) = d$, gdzie $b, c \in \overline{\mathbb{R}}$. Wówczas

(i) jeśli jest określona suma/różnica $c \pm d$, to $\lim\limits_{x\to b}(f(x) \pm g(x)) = c \pm d$.

(ii) jeśli jest określony iloczyn $c \cdot d$, to $\lim\limits_{x\to b} f(x)g(x) = cd$.

(iii) jeśli jest określony iloraz $\dfrac{c}{d}$, to $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{c}{d}$.

Stw. 3. (Granica złożenia funkcji) Niech $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$. Jeżeli

- $f(A) \subset B$,
- $a \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$ i $f(x) \neq b$ dla x dostatecznie bliskich a,
- b jest punktem skupienia zbioru B i $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c \in \overline{\mathbb{R}}$,

to $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$.

Stw. 4. (Ważne granice)

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ (v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ (iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[k]{x+1} - 1}{x} = \dfrac{1}{k}$ (vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

1. Udowodnij, korzystając z definicji granicy funkcji w punkcie, że

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ (d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$

2. Niech $a > 0$. Udowodnij, że $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^a} = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^a} = 0$.

3. Oblicz granice, o ile istnieją, badając odpowiednie granice jednostronne.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \lceil x \rceil$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \lfloor x \rfloor$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x + \lfloor x \rfloor}$

4. Oblicz granice

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + 2x^5}$

(f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x + x^2 + \ldots + x^{2022} - 2022}{x^2 - 1}$

(g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{257} - 257x + 256}{(x-1)^2}$

(h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[6]{x} + \sqrt[8]{x} + \sqrt[10]{x}}{\sqrt{961x + 1024}}$

(i) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt{x\sqrt{x}} - 8}{\sqrt[4]{x} - 2}$

(j) $\lim\limits_{x\to -32} \dfrac{\sqrt{17 - x} - 7}{2 + \sqrt[5]{x}}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27 + 6x - 14x^7} - 3}{x + x^2 + x^3}$

(l) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{3})\ldots(1-\sqrt[99]{x})}{(1-x)^{99}}$

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}$

(n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \right)$

5. Oblicz granice

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}$, $\alpha, \beta \neq 0$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x)}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x + \sin x} - \sqrt[3]{x - \sin x}}{\sqrt[3]{x}}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} \cdot \sin(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(e^x - 1)}{\ln^2(1 + \sin x)}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos^2 x)}{e^{2x} - 2e^x + 1}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$, $a > 0$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^a - 1}{x}$, $a \in \mathbb{R}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(e^{3x^2} - 1)}{\operatorname{tg}^2(\sin(5x))}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + \sin x)^{\frac{a}{x}}$, $a > 0$

6. Oblicz granice (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$, (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\ln \dfrac{1}{x}\right)^x$ (d) $\lim\limits_{x\to 0^+} (e^x - 1)^x$.

7. Wykaż, że **funkcja Riemanna** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ x = \frac{p}{q},\ \text{gdzie } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ \mathrm{NWD}(p, q) = 1 \\ 0 & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q} \text{ lub } x = 0 \end{cases}$$

ma w każdym punkcie $a \in \mathbb{R}$ granicę równą 0.

Granica funkcji II

1. Wykaż, że **funkcja Dirichleta** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

nie ma granicy w żadnym punkcie.

2. **Definicja Cauchy'ego granicy funkcji.** Niech $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ jest punktem skupienia zbioru A, $f : A \to \mathbb{R}$ i $g \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

(i) Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie a.

(ii) $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in A\setminus\{a\}} \; |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-g| < \varepsilon$.

3. Sformułuj i udowodnij warianty definicji Cauchy'ego granicy funkcji dla przypadków gdy $b = \pm\infty$ lub $g = \pm\infty$.

4. Funkcja $f : (-a,a) \setminus \{0\} \to (0,+\infty)$ spełnia warunek

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) = 2.$$

Udowodnij, że $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

5. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest monotoniczna i $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$. Udowodnij, że $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1$ dla każdego $c > 0$.

6. Niech $f : [0,1] \to [-M, M]$, $a, b > 1$ i $f(ax) = bf(x)$ dla $x \in [0, \frac{1}{a}]$. Udowodnij, że $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

Powtórzenie

7. Rozwiąż równania

(a) $16^x + 1 = 2^8 + 8^4$,

(b) $\log(x+5) + \log(x-4) = \log(x-3) + \log(x-2)$,

(c) $\log(\frac{1}{2} + x) = \log\frac{1}{2} - \log x$,

(d) $x + \log(1+2^x) = x\log 5 + \log 6$,

(e) $(2x+1)^{\ln(2x+1)-3} = \frac{1}{e^2}$.

8. Rozwiąż nierówności

(a) $5^{2x+1} > 5^x + 4$,

(b) $2^{x^2-6x+3} \geqslant \frac{1}{4}$

(c) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x < 2$,

(d) $\log_x \frac{x+3}{x-1} > 1$.

9. Oblicz wartość wyrażenia $\dfrac{\log_6^2 3 + \log_6 16}{\log_6^3 \cdot \log_6 48 + \log_6^2 4}$.

10. Niech $a, b > 0$, $ab \neq 1$ i $\log_{ab} a = 4$. Oblicz $\log_{ab} \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$.

11. Niech $a, b, c > 0$ i $a, b, ab \neq 1$. Oblicz wartość wyrażeń
(a) $(\log_{ab} a)(\log_{ab}(ab^2)) + (\log_{ab} b)^2$, (b) $a^{\sqrt{\log_a b}} + b^{\sqrt{\log_b a}}$.

12. Oblicz granice ciągów

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+e^n)}{n}$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \sinh\dfrac{1}{n}$, (c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\cosh\dfrac{1}{n} - 1\right)$.

13. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\frac{\cosh x + \cosh y}{2} \geqslant \cosh\frac{x+y}{2},$$

natomiast dla $x, y \geqslant 0$ zachodzi także nierówność

$$\frac{\sinh x + \sinh y}{2} \geqslant \sinh\frac{x+y}{2}.$$

14. Udowodnij, że jeśli $x \in \mathbb{R}$, to $\cosh x \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$.

15. Oblicz granice

(a) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^4+3x^2-4}{x+1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$

(d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\sin x - \cos x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh x}{x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\big(1+\ln(1+x)\big)\cdot \operatorname{tg}(e^x-1)}{\cos(\sin x)-1}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} x$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[7]{x^2+1}-1}{\ln(\cosh x)}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x \cdot \sin\left(\frac{x-\sin x}{\sin x}\right)}{x - \sin x}$

(k) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x \ln\left(1+e^{-x}\right)$

(l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2+1} + \sqrt[3]{x^3-x+2}$

(m) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x(x+1)^2} - \sqrt[3]{x(x-1)^2}$

(n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\sqrt{x+2}\cdot(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x})$

Analiza - klasa 4a Zestaw 10. 30.1.2023

Funkcje ciągłe I

Wszędzie I, J to przedziały (skończone lub nie) zawarte w $\mathbb{R}$.

Definicja. Funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $c \in I$, jeżeli $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Funkcja f jest ciągła (na I) jeżeli jest ciągła w każdym punkcie $c \in I$.

Ciągłość funkcji f w punkcie c jest równoważna warunkowi:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in(c-\delta,c+\delta)} |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Stw. 1. Jeżeli funkcje $f, g : I \to \mathbb{R}$ są ciągłe w punkcie $c \in I$, to funkcje $f + g$ i $f \cdot g$ też są ciągłe w punkcie c. Ponadto, jeżeli $f(c) \neq 0$ to funkcja $1/f$ jest określona na pewnym przedziale otwartym zawierającym punkt c i jest ciągła w c.

Wniosek. Każdy wielomian jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$. Każda funkcja wymierna jest ciągła na całej swojej dziedzinie.

Stw. 2. Jeżeli $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$, funkcja f jest ciągła w punkcie $c \in I$ i funkcja g jest ciągła w punkcie $f(c)$, to funkcja $g \circ f$ jest ciągła w punkcie c.

Stw. 3. Każda z funkcji $\sqrt[k]{x}$, x^a $(x > 0)$, x^k $(k \in \mathbb{Z})$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, a^x $(a > 0)$, $\log_a x$ są jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

Definicja. *Kresy górny i dolny funkcji* $f : A \to \mathbb{R}$ definiujemy odpowiednio jako kres górny i dolny zbioru $f(A) \subset \mathbb{R}$. Kresy to zapisujemy jako $\sup_{x\in A} f(x)$ i $\inf_{x\in A} f(x)$ lub $\sup_A f$ i $\inf_A f$.

Tw. Weierstrassa o kresach Jeżeli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieją $c, d \in [a, b]$ takie, że $f(c) = \sup_{[a,b]} f$ i $f(d) = \inf_{[a,b]} f$.

Wniosek. Każdy wielomian parzystego stopnia o dodatnim (ujemnym) współczynniku wiodącym przyjmuje wartość najmniejszą (największą).

Wniosek. Jeżeli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i okresowa, to f przyjmuje wartość nawiększą i najmniejszą.

---

1. Dla jakich $a, b, c \in \mathbb{R}$ ciągłe są funkcje

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos ax}{x^2} & \text{gdy } x \neq 0 \\ b & \text{gdy } x = 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x)}{\sin(\sin(ax))} & \text{gdy } x < 0 \\ b & \text{gdy } x = 0 \\ x + c & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$$

2. Funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Udowodnij, że funkcja $|f|$ też jest ciągła. Czy prawdziwa jest implikacja odwrotna?

3. Funkcje $f, g : I \to \mathbb{R}$ są ciągłe i $f(x) = g(x)$ dla każdego $x \in I \cap \mathbb{Q}$. Udowodnij, żde $f = g$.

4. Funkcje $f, g : I \to \mathbb{R}$ są ciągłe. Czy funkcja $h(x) = \max(f(x), g(x))$ jest ciągła?

5. Wyznacz zbiory punktów ciągłości funkcji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \sin|x| & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}(\pi x) & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

6. Znajdź zbiory punktów ciągłości funkcji $f(x) = \lfloor x \rfloor \sin(\pi x)$ i $g(x) = \lfloor x^2 \rfloor \sin(\pi x)$, $x \in [0, +\infty)$.

7. Udowodnij, że funkcja Riemanna jest ciągła w każdym punkcie niewymiernym i nie jest ciągła w każdym punkcie wymiernym.

8. Udowodnij, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ okresowa, ciągła i różna od stałej ma okres podstawowy (czyli minimalny okres dodatni).

9. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągłe w 0 i takie, że $f(x+y) = f(x)+f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$.

10. Wykaż, że jedyną funkcją ciągłą $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taką, że $f(x + y) = f(x)f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $f(1) = e$, jest funkcja $f(x) = e^x$.

11. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i okresowa. Udowodnij, że funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) \cdot x \cdot e^{-|x|}$ przyjmuje wartość największą i najmniejszą.

12. Funkcja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągła, funkcja $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$g(x) = \sup\{f(t) : 0 \leqslant t \leqslant x\}.$$

Udowodnij, że funkcja g jest ciągła i niemalejąca.

13. Podaj przykład funkcji ograniczonej na przedziale $[0, 1]$, która
(a) nie przyjmuje swego kresu górnego i dolnego,
(b) nie przyjmuje kresu górnego i dolnego na żadnym przedziale $[a, b] \subset (0, 1)$.

14. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ przyjmuje wartość największą i najmniejszą. Udowodnij, że funkcja $g(x) = \dfrac{f(x)}{1 + |f(x)|}$ też przyjmuje wartość największą i najmniejszą.

Analiza - klasa 4a Zestaw 11. 13.12.2023

Funkcje ciągłe II

Tw. 1. Funkcja ciągła $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ma własność Darboux.

Przykład. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & \text{dla } x\neq 0\\ 0 & \text{dla} x=0\end{cases}$$

ma własność Darboux, ale nie jest ciągła w 0.

Wniosek. Jeżeli funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest ciągła, to dla każdego przedziału domkniętego $[c,d]\subset(a,b)$ jego obraz $f([c,d])\subset\mathbb{R}$ również jest przedziałem domkniętym.

Wniosek. Każdy wielomian nieparzystego stopnia ma pierwiastek rzeczywisty.

Wniosek. Funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ciągła i różnowartościowa jest ściśle monotoniczna.

Tw. 2. Niech $I\subset\mathbb{R}$ będzie przedziałem. Jeżeli funkcja $f:I\to\mathbb{R}$ jest ciągła i różnowartościowa, to funkcja $f^{-1}:f(I)\to I$ jest ciągła.

Definicja (funkcje cyklometryczne).

(i) $\arcsin:[-1,1]\to\mathbb{R}$ to funkcja odwrotna do $\sin x$, $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,

(ii) $\arccos:[-1,1]\to\mathbb{R}$ to funkcja odwrotna do $\cos x$, $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,

(iii) $\operatorname{arctg}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ to funkcja odwrotna do $\operatorname{tg} x$, $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,

(iv) $\operatorname{arc\,ctg}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ to funkcja odwrotna do $\operatorname{ctg} x$, $x\in(0,\pi)$.

Stw. 3. Funkcje cyklometryczne są ciągłe.

---

1. Funkcja $f:[0,1]\to[0,1]$ jest ciągła. Udowodnij, że istnieje $c\in[0,1]$ takie, że $f(c)=c$.
2. Funkcje $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ są ciągłe, $f(a)<g(a)$ i $f(b)>g(b)$. Udowodnij, że istnieje $c\in(a,b)$ takie, że $f(c)=g(c)$.
3. (a) Udowodnij, że równanie $2x=\sin x+1$ ma rozwiązanie w przedziale $(0,1)$.
   (b) Udowodnij, że równanie $e^x=3x$ ma co najmniej dwa rozwiązania.
   (c) Udowodnij, że równanie $2^x=\frac{1}{x}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
4. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest ciągła i malejąca. Udowodnij, że istnieje $c\in\mathbb{R}$ takie, że $f(c)=c$.
5. Funkcja $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ jest ciągła i $f(0)=f(2)$. Udowodnij, ze istnieją punkty $a,b\in[0,2]$ takie, że $b-a=1$ i $f(a)=f(b)$.
6. Funkcja $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest ciągłą i nieograniczona z góry i z dołu. Udowodnij, że f przyjmuje każdą wartość nieskończenie wiele razy.
7. Podaj przykład funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, która przyjmuje każdą wartość dokładnie trzy razy. Czy istnieje funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, która przyjmuje każdą wartość dokładnie dwa razy?
8. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest ciągła i różnowartościowa i istnieje $n\in\mathbb{N}$ takie, że n-ta iteracja funkcji f jest identycznością, czyli $f^n(x)=x$ dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$. Udowodnij, że
   (a) jeśli f jest rosnąca, to $f(x)=x$ dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$,
   (b) jeśli f jest malejąca, to $f^2(x)=x$ dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$.
9. Dana jest funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniająca warunki
   $$f(1000)=999,\qquad f(x)\cdot f(f(x))=1\quad\text{dla } x\in\mathbb{R}.$$
   Oblicz $f(500)$.
10. Dana jest funkcja $f(x)=x^3+x$, $x\in\mathbb{R}$. Udowodnij, że f ma funkcję odwrotną i wyznacz granice
    $$\lim_{x\to 0}f^{-1}(x),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{f^{-1}(x)}{x}.$$
11. Dana jest funkcja $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2+x^6}}$, $x\in\mathbb{R}$. Udowodnij, że f ma funkcję odwrotną i oblicz granicę
    $$\lim_{y\to 0}\frac{f^{-1}(y)}{\sqrt[3]{y}}.$$
12. Które z funkcji cyklometrycznych są rosnące, malejące, parzyste, nieparzyste?
13. Udowodnij, że jeśli $x>0$, to $\operatorname{arctg} x<x<\arcsin x$.
14. Oblicz granice funkcji $\operatorname{arctg} x$ i $\operatorname{arc\,ctg} x$ w $\pm\infty$.
15. Oblicz granice
    (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$.
16. Udowodnij tożsamości
    (a) $\cos(\arcsin x)=\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$
    (b) $\arccos x=\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)$, $x\in[0,1]$
    (c) $\arccos x=\dfrac{\arccos(2x^2-1)}{2}$, $\arcsin x=\dfrac{\arccos(1-2x^2)}{2}$, $x\in[0,1]$
    (d) $\sin(\operatorname{arctg} x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos(\operatorname{arctg} x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\in\mathbb{R}$
    (e) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arc\,ctg} x=\dfrac{\pi}{2}$, $x\in\mathbb{R}$
    (f) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$, $x>0$
17. Zbadaj istnienie granicy
    $$\lim_{x\to 1}\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}.$$

Dowód zasadniczego twierdzenia algebry

Definicja. Ciąg liczb zespolonych (z_n) jest zbieżny do liczby zespolonej a wtedy i tylko wtedy, gdy $|z_n - a| \to 0$.

- $z_n \to a \iff \mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(a)$ i $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(a)$.
- Jeżeli $z_n \to a$, to $|z_n| \to |a|$.
- Z własności arytmetycznych granic ciągów liczb rzeczywistych wynikają identyczne własności arytmetyczne granic ciągów liczb zespolonych.

Stw. Z każdego ograniczonego ciągu liczb zespolonych można wybrać podciąg zbieżny.

Definicja. . Funkcja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest ciągła w punkcie $a \in \mathbb{C}$, jeżeli dla dowolnego ciągu $z_n \to a$, $z_n \neq a$, zachodzi $f(z_n) \to f(a)$. Funkcja f jest ciągła, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie a.

Przykłady: Funkcja $f(z) = |z|$ jest ciągła. Jeżeli P jest wielomianem o zespolonych współczynnikach, to P jest funkcją ciągłą. Wówczas funkcja $g(z) = |P(z)|$ też jest ciągła.

Definicja. Zbiór $E \subset \mathbb{C}$ (lub $E \subset \mathbb{R}^2$ lub $E \subset \mathbb{R}$) jest *domknięty*, jeżeli dla każdego ciągu punktów $a_n \in E$ takiego, że $a_n \to a$ zachodzi $a \in E$.

Przykład: Koło $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}$ jest zbiorem domkniętym.

Tw. Weierstrassa o kresach (wersja nad $\mathbb{C}$). Funkcja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, $E \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem domkniętym i ograniczonym. Wówczas istnieją $a, b \in E$ takie, że

$$f(a) = \inf_E f \qquad \text{i} \qquad f(b) = \sup_E f.$$

Lemat. Niech $n \geqslant 1$, $P(z)$ jest wielomianem o zespolonych współczynnikach stopnia n. Wówczas istnieje $z_0 \in \mathbb{C}$ takie, że

$$P(z_0) = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|.$$

Zasadnicze tw. algebry. Każdy wielomian dodatniego stopnia o współczynnikach zespolonych ma pierwiastek zespolony.

Dowód: Za pomocą Lematu pokazujemy, że $\inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| = 0$.

Pochodna funkcji I

Definicja. Mówimy, że funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest rózniczkowalna w puncie $x_0\in(a,b)$, jeżeli istnieje skończona granica

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Liczbę $f'(x_0)$ nazywamy *pochodną* funkcji f w punkcie x_0. Wyrażenie $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ nazywamy *ilorazem róznicowym.*

Stosuje się także oznaczenie $f'(x_0)=\dfrac{df}{dx}(x_0)$.

Stw. Jeżeli funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0\in(a,b)$, to jest ona ciągła w tym punkcie.

Tw. (Arytmetyczne własności pochodnych) Jeżeli funkcje $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie $x_0\in(a,b)$, to

(i) funkcja $f+g$ jest różniczkowalna w x_0 i $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$;

(ii) funkcja $f\cdot g$ jest różniczkowalna w x_0 i $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$;

(iii) gdy $g(x)\neq 0$ na pewnym otoczeniu x_0, to funkcja $\dfrac{f}{g}$ jest różniczkowalna w x_0 i $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Lemat o przybliżaniu funkcją liniową. Funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0\in(a,b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $k\in\mathbb{R}$ i funkcja $\phi:(a,b)\to\mathbb{R}$ takie, że

$$f(x)=f(x_0)+k\cdot(x-x_0)+\phi(x)\cdot(x-x_0)\qquad \text{dla } x\in(a,b)$$

oraz $\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=0$. Wówczas $k=f'(x_0)$.

Tw. (Pochodna złożenia funkcji) Jeżeli funkcja $g:(a,b)\to(c,d)$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0\in(a,b)$ oraz funkcja $f:(c,d)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $g(x_0)=y_0\in(c,d)$, to funkcja $F=f\circ g:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalne w x_0 i

$$F'(x_0)=f'(y_0)\cdot g'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0).$$

Definicja. Pochodne jednostronne funkcji f w punkcie x_0 definiujemy jako

$$f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\qquad \text{pochodna prawostronna}$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\qquad \text{pochodna lewostronna}$$

Jeżeli $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ i istnieje $f'_+(a)$ to mówimy, że f jest różniczkowalna w punkcie a i $f'(a)=f'_+(a)$. Podobnie definujemy różniczkowalność i pochodną funkcji $g:(a,b]$ w punkcie b.

Stw. Funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0\in(a,b)$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieją obie pochodne jednostronne funkcji f w punkcie x_0, są skończone i są sobie równe.

Definicja. Niech $I\subset\mathbb{R}$ oznacza przedział, Mówimy, że funkcja $f:I\to\mathbb{R}$ jest *różniczkowalna*, jeżeli jest ona różniczkowalna w każdym punkcie $x_0\in I$. Funkcję $x\to f'(x)$, $x\in(a,b)$, nazywamy *pochodną* funkcji f.

Stw. (Pochodne funkcji elementarnych)

(i) $(x^a)'=ax^{a-1}$ dla $x\in\mathbb{R}$ i $a\in\mathbb{N}$ lub $x>0$ i $a>0$ lub $x\neq 0$ i $a\in\mathbb{Z}$ lub $x\neq 0$ i $a=\frac{1}{2n+1}$, $n\in\mathbb{N}$;

(ii) $(a^x)'=\ln a\cdot a^x$ dla $a>0$ i $x\in\mathbb{R}$;

(iii) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ dla $x>0$;

(iv) $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$ dla $x\in\mathbb{R}$;

(v) $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$ dla $x\neq\frac{(2k+1)\pi}{2}$, $(\operatorname{ctg} x)'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}$ dla $x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

---

1. Oblicz z definicji pochodną funkcji $f(x)=\sqrt{4x+1}$ w punkcie $x_0=2$.

2. Zbadaj różniczkowalność fukcji $f(x)=|x|$ i $g(x)=\sqrt[3]{x}$ w punkcie $x_0=0$.

3. Wyznacz dziedzinę funkcji, oblicz jej pochodnę i wyznacz dziedzinę pochodnej:

(a) $f(x)=\sqrt[4]{2x-x^2}$

(b) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{x^4-9}$

(c) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x^3}}$

(d) $f(x)=\operatorname{tg}^4(\sin x)$

(e) $f(x)=\left(\sqrt{x^2+\sin^2 x}+1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}}-1\right)$

(f) $f(x)=\dfrac{\log_2(x^2-1)}{\operatorname{arctg} x}$

(g) $f(x)=xe^{x^2}-3\cdot 2^{\cos x}$

(h) $f(x)=x^x$

(i) $f(x)=x^{x^x}$

(j) $f(x)=(\sin\sqrt{x})^{\cos x}$

(k) $f(x)=\log_x e$

(l) $f(x)=\log_{x^2-1}(\cos x+1)$

4. Niech $a>0$ i

$$f(x)=\begin{cases}|x|^a\cdot\sin\dfrac{1}{x} & \text{gdy } x\neq 0\\ 0 & \text{gdy } x=0\end{cases}$$

Dla jakich wartości a funkcja f jest różniczkowalna w 0?

Analiza - klasa 4a Zestaw 14. 31.1.2024

Pochodna funkcji II

Tw. (Pochodna funkcji odwrotnej) Jeżeli funkcja $f : (a, b) \to (c, d)$ jest bijekcją, jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$, $f'(x_0) \neq 0$ i funkcja odwrotna $f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$ jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$, to funkcja f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ i

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Pochodne funkcji cyklometrycznych:

- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$
- $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$
- $(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Lemat Fermata. Jeżeli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $c \in (a, b)$ i ma w tym punkcie ekstremum lokalne, to $f'(c) = 0$.

Tw. Rolle'a. Funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna na (a, b). Jeżeli $f(a) = f(b)$, to istnieje $\xi \in (a, b)$ takie, że $f'(\xi) = 0$.

---

1. Określ parametry a, b, c, d tak, aby funkcja f miała pochodną na całym zbiorze liczb rzeczywistych:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla } x \leqslant 1, \\ ax^2 + c & \text{dla } 1 < x \leqslant 2, \\ \dfrac{dx^2+1}{x} & \text{dla } x \geqslant 2. \end{cases}$$

2. Podaj przykład funkcji różniczkowalnej, której pochodna nie jest ciągła.

3. Liczba x_0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu P i $k > 1$. Wykaż, że x_0 jest $(k-1)$-krotnym pierwiastkiem wielomianu P'.

4. Funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest rózniczkowalna w $x_0 \in (a, b)$. Wykaż, że

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0).$$

Czy z istnienia powyższej granicy wynika różniczkowalność funkcji f w x_0?

5. Znajdź wzory dla sum (a) $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$, (b) $\sum_{k=1}^{n} ke^{kx}$.

6. Funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie a. Oblicz granice

(a) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$, (b) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a}$,

7. Funkcje $f_1, f_2, \ldots, f_k : (a, b) \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie $x_0 \in (a, b)$. Znajdź wzór na $(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k)'(x_0)$.

8. Wyznacz pochodne funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x}$ i $g(x) = \ln x$ korzystając z tw. o pochodnej funkcji odwrotnej.

9. Oblicz pochodne

(a) $f(x) = \sin(\arccos x)$

(b) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$

(c) $f(x) = \operatorname{arctg}(e^{5x})$

(d) $f(x) = \ln^3(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2})$

10. Wielomian W o współczynnikach rzeczywistych ma n różnych pierwiastków rzeczywistych. Wykaż, że wielomian W' ma co najmniej $n - 1$ różnych pierwiastków rzeczywistych.

11. Funkcja $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, +\infty)$ i różniczkowalna na $(a, +\infty)$ oraz $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$. Wykaż, że istnieje $\xi \in (a, +\infty)$ takie, że $f'(\xi) = 0$.

12. Wielomian P stopnia n ma n różnych pierwiastków rzeczywistych. Wykaż, że dla dowolnej liczby $a \neq 0$ wielomian $P'(x) + aP(x)$ ma n różnych pierwiastków rzeczywistych.

Analiza - klasa 4a Zestaw 15. 7.2.2024

Pochodna funkcji III

Tw. 1 (Cauchy'ego o wartości średniej). Funkcje $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe na $[a,b]$ i różniczkowalne na (a,b) oraz $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a,b)$. Wówczas istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Tw. 2 (Lagrange'a o wartości średniej). Funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b). Wówczas istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

Wniosek 3. Funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b) oraz $f'(x) = 0$ dla każdego $x \in (a,b)$. Wówczas funkcja f jest stała.

Tw. 4. Załóżmy, że funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b).

(i) Jeżeli $f'(x) \geqslant 0$ dla $x \in (a,b)$, to funkcja f jest niemalejąca.

(ii) Jeżeli $f'(x) > 0$ dla $x \in (a,b)$, to funkcja f jest rosnąca.

(iii) Jeżeli $f'(x) \leqslant 0$ dla $x \in (a,b)$, to funkcja f jest nierosnąca.

(iv) Jeżeli $f'(x) < 0$ dla $x \in (a,b)$, to funkcja f jest malejąca.

Tw. 5. Załóżmy, że funkcja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalne, $c \in (a,b)$ oraz $f'(c) = 0$

(i) Jeżeli istnieje $\delta > 0$ takie, że $f'(x) \leqslant 0$ dla $x \in (c-\delta, c)$ i $f'(x) \geqslant 0$ dla $x \in (c, c+\delta)$, to f ma w c minimum lokalne.

(ii) Jeżeli istnieje $\delta > 0$ takie, że $f'(x) \geqslant 0$ dla $x \in (c-\delta, c)$ i $f'(x) \leqslant 0$ dla $x \in (c, c+\delta)$, to f ma w c maksimum lokalne.

Jeżeli nierówności są ostre, to odp. ekstrema są właściwe.

---

1. Funkcje $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe na $[a,b]$ i różniczkowalne na (a,b) oraz $f(a) = f(b) = 0$. Udowodnij, że istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że

$$g'(\xi)f(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

2. Liczby rzeczywiste $a_0, a_1, \ldots, a_n$ spełniają równość $a_0 + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = 0$. Udowodnij, że wielomian $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ma pierwiastek w przedziale $(0,1)$.

3. Udowodnij, że $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$ jeśli $x > -1$.

4. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ oraz $b_j \neq b_j$ dla $i \neq j$. Udowodnij, że równanie

$$a_1 x^{b_1} + a_2 x^{b_2} + \ldots + a_n x^{b_n} = 0$$

ma co najwyżej $n-1$ pierwiastków dodatnich.

5. Funkcja $: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna oraz $\inf f' > 0$. Udowodnij, że $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

6. Udowodnij nierówności:

(a) $|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \geqslant |x-y|$ dla $x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;

(b) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leqslant |x-y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$;

(c) $\dfrac{a-b}{a} < \ln \dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$ dla $0 < b < a$.

7. Stosując tw. Cauchy'ego o wartości średniej udowodnij nierówności:

(a) $1 - \dfrac{x^2}{2!} < \cos x$ dla $x \neq 0$,

(b) $x - \dfrac{x^3}{3!} < \sin x$ dla $x > 0$,

(c) $\cos x < 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$ dla $x \neq 0$,

(d) $\sin x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$ dla $x > 0$.

8. Funkcja $f : (a, +\infty)$ jest różniczkowalna i $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = c$. Udowodnij, że $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = c$.

9. Udowodnij, że dla $x \geqslant -1$ zachodzą *nierówności Bernoulliego*:

(a) $(1+x)^r \geqslant 1 + rx$ dla $r \geqslant 1$;

(b) $(1+x)^r \leqslant 1 + rx$ dla $0 \leqslant r \leqslant 1$.

10. Udowodnij nierówności:

(a) $2x \operatorname{arctg} x \geqslant \ln(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$;

(b) $\ln(1+x) > \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x}$, $x > 0$;

(c) $\ln x \leqslant \dfrac{x}{e}$, $x > 0$;

(d) $\cos x < \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$;

(e) $xe^{x/2} < e^x - 1$, $x > 0$;

(f) $e^x < (1+x)^{1+x}$, $x > 0$;

(g) $\ln(1+x) < \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, $x > 0$;

(h) $\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{x+1} \leqslant x^x$, $x > 0$;

11. Wyznacz przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne i kresy funkcji

(a) $f(x) = xe^{-x^2}$, (b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$, (c) $f(x) = \sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[5]{x^2-2x+1}$.

12. Która z liczb jest większa: e^π czy π^e?

13. Wykaż, że jeśli $x, y \geqslant 0$ i $\alpha \geqslant 1$, to $(x+y)^\alpha \geqslant x^\alpha + y^\alpha$.

14. Wykaż, że dla dowolych liczb dodatnich a, b takich, że $a \neq b$ zachodzą nierówności

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}.$$

Liczbę $\frac{b-a}{\ln b - \ln a}$ nazywamy *średnią logarytmiczną* liczb a i b.

Analiza - klasa 4a Zestaw 16. 14.2.2024

Pochodna funkcji IV

Tw. 1. Funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Wówczas funkcja f' ma własność Darboux.

Tw. 2. (Reguła de l'Hospitala) Niech $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Funkcje $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne, $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$,

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0 \quad \text{lub} \quad \lim_{x\to b} g(x) = +\infty$$

oraz istnieje granica

$$\lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = C \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Wówczas

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = C.$$

Lemat. Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, gdzie $b \in \mathbb{R} \cup +\infty$ i dla każdego ciągu rosnącego $(x_n)_n$ takiego, że $x_n \to b$ zachodzi $f(x_n) \to c$. Wówczas $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$.

---

1. Okno na poddaszu ma mieć kształt trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa i ramiona mają długość po 40 cm. Jaką długość powinna mieć dłuższa podstawa tego trapezu, aby okno miało największe pole powierzchni?
2. Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa.
3. Parabola o równaniu $y = 2 - \frac{x^2}{2}$ przecina oś OX w punktach A i B. Rozpatrujemy wszystkie trapezy $ABCD$ takie, że punkty C i D leżą na tej paraboli w górnej połowie układu współrzędnych. Znajdź współrzędne punktów C i D, dla których pole trapezu $ABCD$ jest największe.
4. Trójkąty prostokątne o obwodzie 1 obracamy wokół przeciwprostokątnej. Czy dla któregoś z nich objętość otrzymanej bryły będzie największa? Jeśli tak, to znajdź tę największą objętość.
5. Udowodnij, że funkcja $f(x) = e^x + x$ ma różniczkowalną funkcję odwrotną. Wyznacz $f^{-1}(1)$ i $(f^{-1})'(1)$.
6. Udowodnij, że funkcja $f(x) = x + \sin x$ ma funkcję odwrotną. Wyznacz wszystkie punkty, w których funkcja f^{-1} jest różniczkowalna.
7. Udowodnij, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = e^x + \log_{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right)$ ma różniczkowalną funkcję odwrotną i oblicz $f^{-1}(2)$ i $(f^{-1})'(2)$.
8. Korzystając z reguły de l'Hospitala (lub nie), oblicz granice:
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - x}{\sin x - 2x}$,
   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin x - x}$,
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$,
   (d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(1 + x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$,
   (e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x$,
   (f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{2x - 1}$,
   (g) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\pi - 2\operatorname{arctg} x) \ln x$,
   (h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin x - \cos x}$,
   (i) $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 - 1)\operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$,
   (j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{2 \sin^2 x - 1}$,
   (k) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$,
   (l) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,
   (m) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)$,
   (n) $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^{2x} + x\right)^{\frac{1}{x}}$,
   (o) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{\sin^3 x}\right)$,
   (p) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$,
   (q) $\lim\limits_{x\to 1} (2 - x)\operatorname{tg} (\pi x/2)$,
   (r) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(e^x + x) \left(\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x - e\right)$
9. Niech $f(x) = x - \sin x$, $g(x) = 2x + \sin x$. Znajdź granicę $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ i wykaż, że granica $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ nie istnieje.
10. Wyznacz granice w zależności od $a > 0$.
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^a}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^a}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^a}$.
11. Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \sin(x^4)} - \cos(x^2)}{(\operatorname{tg} x - \sin x)(\ln(1 + \arcsin x))}$.
12. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, granica $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ istnieje i jest skończona oraz istnieje granica $\lim\limits_{x\to +\infty} x f'(x)$. Udowodnij, że $\lim\limits_{x\to +\infty} x f'(x) = 0$.
13. Funkcja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, $a > 0$ oraz
$$\lim_{x\to +\infty} (af(x) + f'(x)) = b \in \mathbb{R}.$$
   Udowodnij, że $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \dfrac{b}{a}$.
14. Dla danej liczby $\lambda \geqslant 1$ niech $f(\lambda)$ oznacza (jedyne) rozwiązanie równania $x(1 + \ln x) = \lambda$. Udowodnij, że
$$\lim_{\lambda\to \infty} \frac{\ln \lambda \cdot f(\lambda)}{\lambda} = 1.$$

Analiza - klasa 4a   Zestaw 17.   7.3.2024

Funkcje wypukłe

Niech $I \subset \mathbb{R}$ bedzie przedziałem, półprostą lub prostą. Mówimy, że funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest *wypukła*, jeżeli dla wszystkich $x, y \in I$ i dowolnego $\lambda \in (0,1)$ zachodzi nierówność

$$f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y),$$

zwana *nierównością Jensena.* Jeżeli ta nierówność jest ostra dla dowolnych x, y, t j.w. to mówimy, że f jest *ściśle wypukła.* Jeżeli nierówność Jensena zachodzi w przeciwną stronę, to mówimy, że f jest *wklęsła.*

Uwaga: Funkcja f jest (ściśle) wypukła wtw. gdy $-f$ jest (sciśle) wklęsła.

Interpretacja geometryczna. Funkcja f jest ściśle wypukła wtw. gdy każda cięciwa łącząca dwa punkty należące do wykresu f leży nad tym wykresem.

Stw. 1. Funkcja wypukła $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest ciągła.

Lemat. Funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest wypukła wtw. gdy dla dowolnych $x, c, y \in I$, $x < c < y$ zachodzi nierówność

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant \frac{f(y) - f(c)}{y - c}.$$

W przypadku funkcji ściśle wypukłych nierówność jest ostra.

Tw.2. (Nierówność Jensena) Jeżeli $f : I \to \mathbb{R}$ jest wypukła, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, 1]$ i $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1$, to

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k).$$

Tw. 3. Funkcja różniczkowalna $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest wypukła (ściśle wypukła) wtw. gdy funkcja f' jest niemalejąca (ściśle rosnąca). Funkcja f jest wklęsła (ściśle wklęsła) wtw. gdy f' jest nierosnąca (ściśle malejąca)

Wniosek. Funkcja 2-krotnie różniczkowalna $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest wypukła (ściśle wypukła) wtw. gdy funkcja f" jest nieujmena (dodatnia); f jest wklęsła (ściśle wklęsła) wtw. gdy f" jest niedodatnia (ujemna).

---

1. Zbadaj, na jakich przedziałach są wklęsłe / wypukłe funkcje (a) $f(x) = xe^x$, (b) $\sin x$, (c) $\operatorname{tg} x$, (d) $f(x) = x^4 - 7x^2 + 6x$ (e) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

2. Jak jest maksymalna liczba przedziałów wklęsłości / wypukłości wielomianu stopnia n?

3. Wykaż, że funkcja $f(x) = \sqrt{1 + x^2} - \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$ jest rosnąca i wklęsła na $(0, +\infty)$

4. **Uogólniona nierówność Cauchy'ego:** Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$ i $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \geqslant x^{\alpha_1} \cdot x^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x^{\alpha_n}.$$

5. Niech $a > 1$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$. Wykaż, że

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^a \leqslant \frac{x_1^a + x_2^a + \ldots + x_n^a}{n}.$$

6. Udowodnij **Nierówność Younga:** Jeśli $p, q > 1$ i $p^{-1} + q^{-1} = 1$, to dla dowolnych $x, y \geqslant 0$

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

7. Udowodnij **Nierówność Höldera:** Jeśli $n \in \mathbb{N}$, $p, q > 1$ i $p^{-1} + q^{-1} = 1$, to dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ spełniona jest nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Oblicz granicę prawej strony, gdy $p \to +\infty$.

8. Stosując nierówność Höldera udowodnij, **nierówność Minkowskiego**: Jeśli $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ i $p \geqslant 1$, to

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

9. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \pi)$ i $x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$. Udowodnij nierówności

$$\text{(a)} \prod_{k=1}^{n} \sin x_k \leqslant (\sin x)^n, \qquad \text{(b)} \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin x_k}{x_k} \leqslant \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n.$$

10. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Wykaż, że

$$1 + \sqrt[4]{e^a e^b e^c e^d} \leqslant \sqrt[4]{(1 + e^a)(1 + e^b)(1 + e^c)(1 + e^d)}.$$

11. Niech $x, y, z \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Wykaż, że

$$\left(1 - \operatorname{tg}\left(\frac{x + y + z}{3}\right)\right)^3 \geqslant (1 - \operatorname{tg} x)(1 - \operatorname{tg} y)(1 - \operatorname{tg} z).$$

12. Funkcja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest wypukła i $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$. Udowodnij, że funkcja $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ jest rosnąca na $(0, +\infty)$.

Analiza - klasa 4a   Zestaw 18.   20.3.2024

Pochodne wyższych rzędów

Definicja. Załóżmy, że $I \subset R$ jest przedziałem i $f : I \to R$. Pochodną rzędu 0 funkcji f nazywamy samą funkcję f. Możemy pisać $f^{(0)} = f$.

Pochodną rzędu n funkcji f w punkcie $a \in I$ definiujemy jako pochodnę funkcji $f^{(n-1)}$ w punkcie a, czyli

$$f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a).$$

Jeżeli ta pochodna (jako odp. granica) istnieje, to mówimy, że funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w punkcie a. Jeżeli funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w każdym punkcie $x \in I$, to mówimy, że jest ona n-krotnie różniczkowalna (na przedziale I). Funkcję $x \mapsto f^{(n)}(x)$, $(x \in I)$ nazywamy wówczas n-tą pochodną funkcji f lub pochodną rzędu n funkcji f.

Stw. 1. (Wzór Leibniza) Załóżmy, że funkcje $f, g : I \to \mathbb{R}$ są n-krotnie różniczkowalne w punkcie $a \in I$. Wówczas

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

Tw. 2. (Wzór Taylora z resztą Lagrange'a) Załóżmy, że funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ma w przedziale (a, b) pochodne do rzędu $n + 1$ włącznie. Niech $c \in (a, b)$ Wówczas dla dowolnego $x \in (a, b)$, istnieje punkt ξ leżący pomiędzy c i x, że

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

Uwaga: Występujący w powyższym wzorze wielomian $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$ nazywamy *n-tym wielomianem Taylora* funkcji f w punkcie c, funkcję $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ nazywamy *n-tą resztą Taylora* funkcji f w punkcie c.

---

1. Wyznacz funkcję $f^{(n)}(x)$ dla (a) $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$, (b) $f(x) = \ln(a + x)$, $a > 0$, (c) $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$, (d) $f(x) = \sin(ax)$, $a \neq 0$, (e) $f(x) = \log_a(x)$, $a > 0$, (f) $f(x) = a^x$, $a > 0$.

2. Oblicz n-tą pochodną funkcji (a) $f(x) = xe^x$, (b) $g(x) = x^3 \sin(5x)$.

3. Niech

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Wykaż, że $f^{(n)}(0) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} P_n(1/x)$ dla $x \neq 0$, gdzie P_n jest wielomianem o współczynnikach całkowitych.

4. Wielomiany Hermite'a. Niech $f(x) = e^{-x^2}$ i dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \cdot f^{(n)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

(a) Wykaż, że dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ funkcja H_n jest wielomianem stopnia n.

(b) Udowodnij zależność rekurencyjną $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$.

5. Załóżmy, że P jest wielomianem stopnia n. Udowodnij, że dla dowolnych $c, x \in \mathbb{R}$

$$P(x) = P(c) + \frac{P'(c)}{1!}(x-c) + \frac{P''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Wyznacz k-ty wielomian Taylora wielomianu P w punkcie c.

6. Udowodnij, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ prawdziwe są wzory:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

7. Wyznacz n-ty wielomian i resztę Taylora w zerze funkcji z zadania 4.

8. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej $x > 0$ zachodzą nierówności

(a) $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$.

(b) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

9. Znajdź przybliżenie wymierne liczby $\sqrt{e}$ z dokładnością 10^{-3}.

10. Udowodnij, że

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

11. Wykaż, że dla $n \in \mathbb{N}$ i $x \geqslant 0$

$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant \frac{xe^x}{n}.$$

12. Funkcja f jest różniczkowalna na przedziale $[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$ i funkcja f'' istnieje na przedziale $(0, 1)$ i $|f''(x)| \leqslant A$ dla każdego $x \in (0, 1)$. Udowodnij, że

$$|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2} \qquad \text{dla } x \in [0, 1].$$

Analiza - klasa 4a Zestaw 19. 10.4.2024

Całka nieoznaczona I

Operacja odwrotna do różniczkowania funkcji nazywana jest *całkowaniem*: mając daną funkcję f szukamy funkcji F takiej, że $F' = f$. Niestety, w odróżnieniu od różniczkowania, które w zasadzie jest czynnością mechaniczną, całkowanie funkcji bywa trudne, wymaga pomysłowości i nie zawsze jest wykonalne.

Definicja. Załóżmy, że zbiór $D \subset \mathbb{R}$ jest sumą rozłącznych przedziałów i dana jest funkcja $f : D \to \mathbb{R}$. Każdą funkcję $F : D \to \mathbb{R}$ taką, że dla każdego $x \in D$ zachodzi $F'(x) = f(x)$ nazywamy *całką nieoznaczoną* lub *funkcją pierwotną* funkcji f. Piszemy

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Najważniejsze funkcje pierwotne:

$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+a}x^{a+1} + C$ dla $a \neq -1$ i każdego x, dla którego określona jest funkcja x^a,
$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$, $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$, $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$, $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$,
$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C$, $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C$,
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} x + C$.

Występująca w powyższych wzorach stała C jest nazywana *stałą całkowania*. Jeżeli dziedzina funkcji składa się z kilku przedziałów rozłącznych, na każdym przedziale wartość stałej całkowania może być inna.

Tw. 1. Jeżeli $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem i funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to funkcja f ma funkcję pierwotną. (dowód pomijamy)

Stw. 2. Jeżeli $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, $f : I \to \mathbb{R}$ i F jest funkcją pierwotną funkcji f, to F jest funkcją ciągłą.

Stw. 3. (liniowość całki). Jeżeli funkcje $f, g : D \to \mathbb{R}$ mają funkcje pierwotne i $a, b \in \mathbb{R}$, to

$$\int \big(af(x) + bg(x)\big)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Stw. 4. (podstawienie liniowe). Jeżeli $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ oraz $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, to

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Tw. 5. (Wzór na całkowanie przez części). Jeżeli funkcje $f, g : A \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne, to

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Oblicz całki nieoznaczone:

1. $\int (x^4 + 2x^3 - x^2 - 7)\,\mathrm{d}x$,

2. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$,

3. $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$, $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

4. $\int (4\sin(5x) - 5\cos(4x))\,\mathrm{d}x$,

5. $\int |x|\,\mathrm{d}x$,

6. $\int \sqrt{|x|}\,\mathrm{d}x$,

7. $\int a^x\,\mathrm{d}x$, $a > 0$,

8. $\int \frac{1}{3-2x}\,\mathrm{d}x$,

9. $\int \frac{1}{4+9x^2}\,\mathrm{d}x$,

10. $\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

11. $\int \ln_a x\,\mathrm{d}x$, $a > 0$,

12. $\int xe^x\,\mathrm{d}x$,

13. $\int \sin x \cdot e^x dx$,

14. $\int x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$,

15. $\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x$,

16. $\int x^3 \sin x\,\mathrm{d}x$,

17. $\int x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$,

18. $\int x^2\cos^2 x\,\mathrm{d}x$,

19. $\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$,

20. $\int x\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$,

21. $\int x\sin xe^x\,\mathrm{d}x$,

22. $\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$,

23. Załóżmy, że $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem i funkcja $f : I \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ jest różniczkowalna. Udowodnij, że

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C.$$

Oblicz całki nieoznaczone:

24. $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$

25. $\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$,

26. $\int \frac{x^2}{1-x^3}\,\mathrm{d}x$,

27. $\int \frac{e^x}{3+e^x}\,\mathrm{d}x$,

28. $\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$,

29. $\int \frac{1}{\arccos x \cdot \sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Analiza - klasa 4a Zestaw 20. 11.4.2024

Całka nieoznaczona II

Funkcje hiperboliczne. Przypomnijmy:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Łatwo wyprowadzić tożsamości

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \qquad \text{(tzw. jedynka hiperboliczna)},\\ \cosh(2x) &= 2\sinh^2 x - 1,\\ \sinh(2x) &= 2\cosh x \cdot \sinh x. \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że $\int \sinh x \,\mathrm{d}x = \cosh x + C$ i $\int \cosh x \,\mathrm{d}x = \sinh x + C$.
Sinus i cosinus hiperboliczny mają funkcje odwrotne:

$$\operatorname{arsinh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right),\ y \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{arcosh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right),\ y \geqslant 1$$

oraz

$$(\operatorname{arsinh} y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}, \qquad (\operatorname{arcosh} y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}},\ y > 1.$$

Mamy więc kolejne ważne funkcje pierwotne:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh} x + C, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x + C.$$

Tw. o całkowaniu przez podstawienie. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła, funkcja g jest różniczkowalna i g' jest ciągła, oraz F jest funkcją pierwotną funkcji f. Wówczas

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x = F(g(x)) + C.$$

Do całkowania funkcji wymiernych przydatne jest twierdzenie:

Tw. o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste. Każda funkcja wymierna F jest sumą pewnego wielomianu i pewnej liczby ułamków prostych, czyli funkcji wymiernych postaci

$$\frac{A}{(x-a)^k},\ A, a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}, \qquad \frac{Ax+B}{((x-a)^2+b^2)^k},\ A, B, a \in \mathbb{R}, b > 0, k \in \mathbb{N}.$$

Mianowniki tych ułamków prostych są dzielnikami mianownika F.

1. Oblicz całki, stosując tw. o całkowaniu przez podstawienie:

(a) $\int x e^{-x^2} \,\mathrm{d}x$

(b) $\int x\sqrt{4-x^2} \,\mathrm{d}x$

(c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$

(d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$

(e) $\int e^{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$

(f) $\int \frac{\ln^5 x}{x} \,\mathrm{d}x$

(g) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

(h) $\int \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x$

(i) $\int \sqrt{x^2-1} \,\mathrm{d}x$

(j) $\int \sqrt{1+x^2} \,\mathrm{d}x$

(k) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}$,

(l) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$,

(m) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}}$

(n) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{3/2}}$,

(o) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}$.

2. Oblicz całki

$$\int \arcsin x \,\mathrm{d}x, \qquad \int \operatorname{arsinh} x \,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x}.$$

3. Oblicz całki z funkcji wymiernych:

(a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$

(b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+x^3}$

(c) $\int \frac{x}{1+x^3} \,\mathrm{d}x$

(d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+4}$

(e) $\int \frac{x^3}{x^4+1} \,\mathrm{d}x$

(f) $\int \frac{x^2}{1-x^4} \,\mathrm{d}x$

4. Udowodnij istnienie funkcji pierwotnej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ \sin\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \end{cases}$$

Całka Newtona

Definicja. Niech $a < b$ i $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. *Całka Newtona (całka oznaczona)* funkcji f na przedziale $[a, b]$ jest to liczba

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji f. Ten sam wzór uznajemy za definicję całki oznaczonej w przypadku $a > b$.

Stw. 1. (Liniowość całki Newtona) Jeżeli funkcje $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to $\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Stw. 2. (Wzór na całkowanie przez części) Jeżeli funkcje $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne i funkcje f', g' są ciągłe, to

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Stw. 3. (Wzór na całkowanie przez podstawienie) Niech $g : [a, b] \to I \subset \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną taką, że funkcja g' jest ciągła i $f : I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(g(b)) - F(g(a)),$$

gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji f.

Stw. 4. (Monotoniczność całki) Jeżeli funkcje $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe i $f \geqslant g$ na $[a, b]$, to $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Stw. 5. (Tw. o wartości średniej dla całek) Jeżeli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to dla pewnego $\xi \in (a, b)$ zachodzi $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)$.

Tw. 6. (Przybliżanie całki sumami całkowymi) Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $\delta > 0$, że dla dowolnych punktów $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ takich, że $x_i - x_{i-1} < \delta$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ zachodzi

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon.$$

Interpretacja geometryczna całki Newtona: Jeżeli $f : [a, b] \to [0, +\infty)$ jest funkcją ciągłą, to całka $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jest równa polu pod wykresem funkcji f.

---

1. Oblicz całki

(a) $\displaystyle\int_{1/e}^{e} \ln x\,\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$, (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$, (d) $\displaystyle\int_{-1}^{2} xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

2. Funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Udowodnij nierówności

(i) $\displaystyle(b-a)\inf_{[a,b]} f \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\sup_{[a,b]} f$

(ii) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

3. Funkcja $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Wykaż, że

(a) jeśli f jest parzysta, to $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$,

(b) jeśli f jest nieparzysta, to $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

4. Funkcja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Udowodnij równości

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

5. Oblicz całkę $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

6. Udowodnij nierówność $\displaystyle\frac{17}{18} < \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x < \frac{17}{18} + \frac{1}{600}$.

7. Funkcja f jest ciągła na pewnym przedziale zawierającym liczbę a. Udowodnij, że $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)$.

8. Oblicz granice (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\int_1^x \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{\cos^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$,

9. Wyprowadź wzór na pole elipsy o równaniu $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

10. Oblicz granice (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$, (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$.