Analiza - klasa 3a   Zestaw 1.   6.9.2022

Liczby zespolone I

Liczba zespolona jest to para uporządkowana liczb rzeczywistych (a,b). Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy symbolem $\mathbb{C}$.

Na zbiorze $\mathbb{C}$ są określone działania

- *dodawanie:* $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$, z elementem neutralnym $0=(0,0)$;
- *mnożenie:* $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$, z elementem neutralnym $1=(1,0)$.

Stw. 1. Działania dodawania i mnożenia liczb zespolonych są przemienne i łączne, oraz mnożenie jest rozdzielne względem dodawania. Z tego wynika, że dla liczb zespolonych zachodzą wzory skróconego mnożenia i wzór dwumianowy Newtona.

Liczbę zespoloną $(0,1)$ nazywamy *jednostką urojoną* i oznaczamy symbolem i. Liczba i spełnia równość $i^2=(-1,0)$. Wykorzystując jednostkę urojoną i każdą liczbę zespoloną możemy zapisać w tzw. *postaci algebraicznej:*

$$z=(a,b)=a+bi.$$

Zachodzi $i^2=-1+0i=-1$ (czyli i to pierwiastek kwadratowy z -1).

Stosując postać algebraiczną, każdą liczbę rzeczywistą można traktować jako liczbę zespoloną: $a=a+0i$ dla $a\in\mathbb{R}$. Liczby zespolone postaci $(0,b)=bi$ nazywane są *liczbami czysto urojonymi.*

Jeżeli $z=(a,b)=a+bi$ jest liczbą zespoloną, to

- liczbę rzeczywistą a nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby zespolonej z i oznaczamy $\mathrm{Re}z=a$ (lub $\mathrm{re}z=a$)
- liczbę rzeczywistą b nazywamy *częścią urojoną* liczby zespolonej z i oznaczamy $\mathrm{Im}z=b$ (lub $\mathrm{im}z=b$)
- *moduł* liczby zespolonej z jest to liczba nieujemna $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.
- *sprzężeniem* liczby zespolonej z nazywamy liczbę zespoloną $\overline{z}=(a,-b)=a-bi$

Odwrotnością liczby zespolonej $z=(a,b)\neq 0$ jest liczba

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}\cdot i=\frac{1}{|z|^2}\cdot\overline{z}.$$

Stw. 2. Niech $z\in\mathbb{C}$. Wówczas
(i) $z+\overline{z}=2\cdot\mathrm{Re}z$,   (ii) $z-\overline{z}=2i\cdot\mathrm{Im}z$,   (iii) $z\cdot\overline{z}=|z|^2$.

Stw. 3. Niech $z,w\in\mathbb{C}$. Wówczas

(i) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$,
(ii) $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$,
(iii) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ (dla $w\neq 0$)
(iv) $|zw|=|z|\cdot|w|$,
(v) $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$ (dla $w\neq 0$).
(vi) $|z+w|\leqslant|z|+|w|$,
(vii) $\big||z|-|w|\big|\leqslant|z-w|$,

---

1. Sprowadź wyrażenia do postaci algebraicznej:

(a) $(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)$,
(b) $\frac{(5+i)(3+i)}{2i}$,
(c) $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$,
(d) $\frac{(1+3i)(8-i)}{2+i}$,
(e) $(3+i)^3+(3-i)^3$,
(f) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$,

2. Niech $n\in\mathbb{N}$. Jakie wartości może przyjmować suma $\sum_{k=0}^{n} i^k$?

3. Udowodnij, że

- liczba zespolona z jest liczbą rzeczywistą wtedy i tylko wtedy, gdy $z=\overline{z}$;
- liczba zespolona z jest liczbą czysto urojoną wtedy i tylko wtedy, gdy $z=-\overline{z}$;

4. Niech $u=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Oblicz u^n dla $n\in\mathbb{Z}$ oraz $1+u+u^2$, $1+\overline{u}+\overline{u}^2$.

5. Niech $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Udowodnij równoważność warunków:
(i) $|z|=1$,   (ii) $\mathrm{Re}z=\frac{z^2+1}{2z}$,   (iii) $\mathrm{Im}z=\frac{z^2-1}{2iz}$.

6. Niech $a,b\in\mathbb{C}$. Udowodnij, że $|a+b|=|a|+|b|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a\bar{b}$ jest nieujemną liczbą rzeczywistą.

7. Rozwiąż w liczbach zespolonych równania:

(a) $|z|-z=1+2i$,
(b) $z^2=i$,
(c) $z^2=3-4i$,
(d) $z^2=\overline{z}$,
(e) $z^3=\overline{z}$,
(f) $z^2+2|z|^2=2$,
(g) $z^3+|z|^2+z=0$,

8. (i) Udowodnij, że dla każdej liczby zespolonej $a\neq 0$ istnieją dokładnie dwie różne liczby zespolone v,w takie, że $u^2=v^2=a$.

(ii) Udowodnij, że dla dowolnych liczb zespolonych a,b,c takich, że $a\neq 0$ i $b^2\neq 4ac$ równanie kwadratowe $az^2+bz+c=0$ ma dwa różne rozwiązania zespolone.

(iii) Udowodnij, że jeśli $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ i $b^2<4ac$, to rozwiązania zespolone z_1,z_2 równania $az^2+bz+c=0$ spełniają zależność $z_2=\overline{z_1}$.

9. Rozwiąż równania

(a) $z^2-4z-5=0$
(b) $z^2-(1+i)z+6+3i=0$
(c) $z^2+(2i-7)z+13-i=0$
(d) $z^3=1$
(e) $z^4=-1$

10. Dane są liczby zespolone p, q, przy czym $q \neq 0$. Niech z_1 i z_2 to pierwiastki równania $z^2 + pz + q^2 = 0$. Udowodnij, że jeśli $|z_1| = |z_2|$ to liczba $\frac{p}{q}$ jest rzeczywista.

11. Naszkicuj na płaszczyźnie zespolonej poniższe zbiory:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$;

(b) $\{z \in \mathbb{C} : |z + i| \leqslant 1\}$;

(c) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}z + \mathrm{Im}z = 2\}$;

(d) $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| + |z + i| = a\}$ dla $a = 1, 2, 3$;

(e) $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leqslant |\mathrm{Re}z| < 2\}$;

(f) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(iz) < 1\}$;

(g) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \mathrm{Im}z + 1\}$;

(h) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z^2) = 1\}$.

12. Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Udowodnij tożsamości

(a) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\big(|z|^2 + |w|^2\big)$,

(b) $|1 + z\overline{w}|^2 + |z - w|^2 = (1 + |z|^2)(1 + |w|^2)$,

(c) $|1 - z\overline{w}|^2 - |z - w|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2)$.

Podaj interpretację geometryczną pierwszej tożsamości.

13. Niech $z, w \in \mathbb{C}$, $|z| = |w| = 1$ i $zw \neq -1$. Udowodnij, że liczba $\dfrac{z + w}{1 + zw}$ jest rzeczywista.

14. Niech $z \in \mathbb{C}$ i załóżmy, że liczba $\dfrac{1 + z + z^2}{1 - z + z^2}$ jest rzeczywista. Udowodnij, że $z \in \mathbb{R}$ lub $|z| = 1$.

15. Niech $x, y, z \in \mathbb{C}$. Udowodnij, że

(i) $|x + y|^2 + |y + z|^2 + |z + x|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + |x + y + z|^2$;

(ii) $|x + y| + |y + z| + |z + x| \leqslant |x| + |y| + |z| + |x + y + z|$.

16. Rozwiąż w liczbach zespolonych równania

(a) $|z| + |z - 1| + |z - 2| + |z - 3| = 4$,

(b) $\big|z - |z + 1|\big| = \big|z + |z - 1|\big|$.

Liczby zespolone II

Postać trygonometryczna liczby zespolonej: Każdą liczbę zespoloną z można zapisać w postaci
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad \text{gdzie } r = |z| \geqslant 0, \theta \in \mathbb{R}.$$

Liczbę θ nazywamy argumentem liczby zespolonej z. Dla $z \neq 0$, jeżeli $\theta \in [0, 2\pi)$, to mówimy, że θ jest *argumentem głównym* liczby z.

Stosowana jest również notacja $\operatorname{cis}\theta = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Pełny sens matematyczny zapisu $e^{i\theta}$ stanie się jasny kiedy indziej.

Stw. 1 Jeżeli $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ i $w = s(\cos\phi + i\sin\phi)$, gdzie $r, s > 0$, $\theta, \phi \in \mathbb{R}$, to

(i) $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$, jeśli $z \neq 0$;

(ii) $z \cdot w = rs \cdot (\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi))$;

(iii) $\frac{z}{w} = \frac{r}{s}(\cos(\theta-\phi) + i\sin(\theta-\phi))$;

(iv) (**Wzóre de Moivre'a**) dla $n \in \mathbb{Z}$, $z \neq 0$
$$z^n = r^n \cdot \big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big).$$

Tw. 2 (pierwiastki z liczby zespolonej). Niech $a = |a| \cdot \operatorname{cis}\phi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $n \in \mathbb{N}$. Wszystkie liczby zespolone w spełniające równanie $w^n = a$ są postaci
$$w_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\left(\frac{2k\pi+\phi}{n}\right) + +i\sin\left(\frac{2k\pi+\phi}{n}\right)\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Liczby te nazywamy *zespolonymi pierwiastkami stopnia n z liczby zespolonej a.*

Uwaga 1. Liczby w_k są wszystkie różne, więc każda liczba zespolona $a \neq 0$ ma dokładnie n różnych pierwiastków stopnia n.

Uwaga 2. Ze względu na niejednoznaczność pierwiastków zespolonych, dla $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ **nie będziemy** stosować zapisu $\sqrt[n]{a}$ na oznaczenie którejkolwiek z liczb w_k.

Pierwiastki z jedności. Dla $a = 1$ otrzymujemy n różnych zespolonych pierwiastków z jedności stopnia n:
$$\varepsilon_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

---

1. Zapisz liczby zespolone w postaci trygonometrycznej: (a) i, (b) $2+2i$, (c) $-1+\sqrt{3}i$, (d) $\frac{3+2i}{-2+3i}$, (e) $(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i$, (f) $2+\sqrt{3}+i$.

2. Niech $z = r \cdot \operatorname{cis}\alpha$ i $n, m \in \mathbb{Z}$. Wyznacz postać trygonometryczną liczby $z^m \cdot \overline{z}^n$.

3. Wyznacz postać trygonometryczną liczb: (a) $\sin\alpha + i\cos\alpha$, (b) $1 + i\operatorname{tg}\alpha$, (c) $1+\cos\alpha + i\sin\alpha$, dla $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, (d) $\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$.

4. Znajdź postać algebraiczną liczb (dla $n \in \mathbb{Z}$): (a) $(1+i)^{2022}$, (b) $(1+i\sqrt{3})^{1000}$, (c) $\left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{-100}$, (d) $\left(\frac{9+5i}{7-2i}\right)^8$, (e) $\frac{(\sqrt{3}+3i)^{40}}{(\sqrt{3}+i)^{20}}$.

5. Znajdź postać algebraiczną liczb (dla $n \in \mathbb{Z}$): (a) $(1-\cos\phi + i\sin\phi)^n$ (b) $(\operatorname{tg}\phi + i)^n$.

6. Dla jakich liczb całkowitych n liczba $\left(2+i\sqrt{3}\right)^n$ jest (a) liczbą rzeczywistą ujemną, (b) liczbą urojoną?

7. Wyraź $\cos(5x)$ i $\sin(5x)$ poprzez $\cos x$ i $\sin x$ oraz $\operatorname{tg}(5x)$ przez $\operatorname{tg} x$

8. Wyznacz w postaci algebraicznej pierwiastki zespolone (a) stopnia 3 z liczb 1, i, -1, (b) stopnia 4 z liczb i i -1.

9. Oblicz sumę i iloczyn wszystkich pierwiastków z jedności stopnia n.

10. Rozwiąż równania

(a) $81(z+i)^4 = |z|^8$,

(b) $(z+2)^6 = (z-2)^6$,

(c) $(z+i)(\overline{z}-i)^2(iz-1)^3 = 64$

11. Wykaż, że liczba $\xi = (2+i)/(2-i)$ nie jest pierwiastkiem z jedności jakiegokolwiek stopnia mimo, że $|\zeta| = 1$.

12. Pokaż, że $\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n = \frac{1+i\operatorname{tg}(n\alpha)}{1-i\operatorname{tg}(n\alpha)}$.

13. Oblicz $\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11}$.

14. Udowodnij tożsamości:

(a) $\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ (b) $\sum_{k=1}^{n}\sin(kx) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

15. Oblicz sumy:

(a) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos(kx)$,

(c) $\sum_{k=1}^{n}k\cos(kx)$,

(b) $\sum_{k=1}^{n}\sin^2(kx)$,

(d) $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$.

16. Dla liczby całkowitej dodatniej n niech $u_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Rozstrzygnij, dla jakich wartości n liczba $\frac{u_n - 1}{|u_n - 1|}$ jest zespolonym pierwiastkiem z jedności stopnia n.

Analiza - klasa 3a Zestaw 3. 11.10.2022

Liczby zespolone III – powtórzenie

1. Niech $z = \mathrm{cis}\theta$. Pokaż, że $\cos(n\theta) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$ oraz $\sin(n\theta) = \frac{1}{2i}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$.

2. Dane są liczy zespolone u, v, w takie, że $u+v+w = 0$ i $|u| = |v| = |w|$. Udowodnij, że $u^2 + v^2 + w^2 = 0$.

3. Niech $x, y, z \in \mathbb{C}$, $|x| = |y| = |z| = a > 0$ oraz $x + y + z \neq 0$. Udowodnij, że

$$\left|\frac{xy + yz + zx}{x + y + z}\right| = a.$$

4. Liczby z_1 i z_2 są różnymi zespolonymi rozwiązaniami równania

$$z^2 - (1 + 2i)z - 1 + 3i = 0.$$

Wyznacz część rzeczywistą i urojoną liczby $\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)^{2022}$.

5. Rozwiąż w liczbach zespolonych równania

(a) $z^2 + |z|^2 - \overline{z} = z^3$,

(b) $z^4 + 4(z + i)^4 = 0$,

(c) $\left(z - \frac{1}{\overline{z}}\right)^3 = -8i$.

6. Pokaż, że każdą liczbę zespoloną $z \neq -1$ taką, że $|z| = 1$ można przedstawić w postaci $\frac{1 + ti}{1 - ti}$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$.

7. Wyznacz wszystkie liczby zespolone z takie, że $|z| = 1 = \left|\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}\right|$.

8. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ i $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ oznaczają wszystkie zespolone pierwiastki z jedności stopnia n. Pokaż, że dla dowolnej liczby $z \in \mathbb{C}$ zachodzi równość

$$z = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Re}(\varepsilon_k \overline{z}) \cdot \varepsilon_k.$$

9. Niech $z \in \mathbb{C}$. Dla jakich liczb całkowitych n liczba $(z + i\overline{z})^n$ jest rzeczywista?

10. Rozstrzygnij, dla jakich liczb całkowitych n istnieje liczba rzeczywista a taka, że

$$|a - (1 + i)^n| = a.$$

11. Liczba zespolona $z \neq 0$ spełnia równość

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z + \frac{1}{z} + 1\right) = 1.$$

Dla danej liczby naturalnej $n > 1$ znajdź wartość wyrażenia

$$\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)\left(z^n + \frac{1}{z^n} + 1\right).$$

12. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 3$, $\varepsilon \neq 1$ jest pierwiastkiem z jedności stopnia n. Udowodnij, że

$$|1 - \varepsilon| > \frac{2}{n - 1}.$$

13. Dane są liczby zespolone $z_1, z_2, \ldots, z_n$ takie, że $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| > 0$. Udowodnij, że

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_j}{z_k}\right) = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = 0.$$

14. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz z jest liczbą zespoloną o module 1. Udowodnij, że

$$n|1 + z| + |1 + z^2| + |1 + z^3| + \ldots |1 + z^{2n}| + |1 + z^{2n+1}| \geqslant 2n.$$

15. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$. Stosując zasadę indukcji (lub innym sposobem) udowodnij *tożsamość Lagrange'a:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2\right) - \left|\sum_{k=1}^{n}x_k y_k\right|^2 = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}|x_j\overline{y_k} - x_k\overline{y_j}|^2.$$

Następnie udowodnij *nierówność Cauchye'ego – Schwarza:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2\right) \geqslant \left|\sum_{k=1}^{n}x_k\overline{y_k}\right|^2.$$

Analiza - klasa 3a Zestaw 4. 25.10.2022

Wielomiany I

Niech $\mathbb{K}$ oznacza zbiór $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$

Definicja. *Wielomianem stopnia k* o współczynnikach $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$, gdzie $a_k \neq 0$, nazywamy funkcję $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (lub $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeśli $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$)

$$w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k.$$

Stopień wielomianu w oznaczamy $\deg w$. Liczbę a_k nazywamy *współczynnikiem wiodącym* wielomianu w. Jeżeli $a_k = 1$, to mówimy, że w jest wielomianem *unormowanym* lub *monicznym.*

Przyjmujemy, że stopień *wielomianu zerowego* $w_0(x) = 0$ jest równy $-\infty$.

Każdą liczbę $\alpha \in \mathbb{C}$ taką, że $w(\alpha) = 0$ nazywamy *pierwiastkiem* lub *miejscem zerowym* lub *zerem* wielomianu w.

Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach zespolonych oznaczamy $\mathbb{C}[x]$. Analogicznie definiujemy zbiory $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ i $\mathbb{Z}[x]$. Każdy z tych zbiorów jest zamknięty ze względu na operacje dodawania, odejmowania, mnożenia i składania wielomianów (zob. też zadania 4 i 5).

Lemat. Niech $w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{k-1} x^{k-1} + a_k x^k$, $a_j \in \mathbb{C}$, będzie wielomianem stopnia $k \geqslant 1$. Wówczas istnieje liczba rzeczywista M taka, że

$$|a_k x^k| > |w(x) - a_k x^k|, \qquad \text{gdy } |x| > M.$$

Tw. (Pierwsze twierdzenie o równości wielomianów). Załóżmy, że wielomiany

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \quad \text{i} \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$$

gdzie $a_j, b_j \in \mathbb{C}$ i $a_k, b_n \neq 0$, spełniają dla każdego $x \in \mathbb{C}$ równość $f(x) = g(x)$. Wówczas $k = n$ i $a_j = b_j$ dla $j = 0, 1, \ldots, k$.

---

1. Znajdź wielomian dodatniego stopnia o współczynnikach całkowitych, którego pierwiastkiem jest liczba (a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, (b) $\sqrt[5]{2} + \dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}$
2. Liczba zespolona x_0 jest pierwiastkiem wielomianu $P \in \mathbb{R}[x]$. Wykaż, że liczba $\overline{x_0}$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu.
3. Wielomian f ma współczynniki całkowite i liczby a, b są całkowite. Pokaż, że $a - b \mid f(a) - f(b)$.
4. Udowodnij, że wielomian $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (gdzie $a \neq 0$) przyjmuje dla każdej liczby całkowitej x wartość całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $6a$, $2b$, $a + b + c$ oraz d są całkowite.
5. Wielomian W ma współczynniki wymierne, $p, q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$ i $\sqrt{q}$ jest liczbą niewymierną. Udowodnij, że liczba $p + \sqrt{q}$ jest pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $p - \sqrt{q}$ jest jego pierwiastkiem.
6. Wartości $w(0)$ i $w(1)$ wielomianu w stopnia 3 o współczynnikach całkowitych są nieparzyste. Udowodnij, że w nie ma pierwiastków całkowitych.
7. Zbadaj, czy istnieje wielomian w o współczynnikach całkowitych oraz liczba naturalna k takie, że $w(k) = k + 1$, $w(k + 1) = k + 2$, $w(k + 2) = k$.
8. Czy istnieje wielomian w stopnia 5 o współczynnikach całkowitych taki, że $w(5) = 2$ i $w(-5) = 3$?
9. Niech $n > 1$ i $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że wielomian
$$w(x) = x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - x^{2n-3} + \ldots + x^2 - x + \frac{n}{4}$$
nie ma pierwiastków rzeczywistych.
10. Udowodnij, że wielomian $w(x) = x^3 - 2x$ nie jest różnowartościowy na zbiorze liczb rzeczywistych i jest różnowartościowy na zbiorze liczb wymiernych.
11. Pokaż, że wielomian $w(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ jest
    (i) funkcją nieparzystą wtedy tylko wtedy, $a_k = 0$ dla parzystych k;
    (ii) funkcją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy $a_k = 0$ dla nieparzystych k.
12. Rozważamy wielomiany $f(x) = 3x^2 - 2x - 4$, $g(x) = x^3 - x^2 + 1$. Wyznacz funkcje $f + g$, $f \cdot g$, $f \circ g$.
13. Załóżmy, że f i g są wielomianami. Udowodnij, że
    (i) funkcja $f + g$ jest wielomianem i $\deg(f + g) \leqslant \max(\deg f, \deg g)$, oraz jeśli $\deg f > \deg g$, to $\deg(f + g) = \deg f$;
    (ii) funkcja $f \cdot g$ jest wielomianem i $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$;
    (iii) funkcja $f \circ g$ jest wielomianem i $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$.
14. Udowodnij, że funkcje (a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$ nie są wielomianami.
15. Udowodnij, że nie istnieje wielomian $f \in \mathbb{R}[x]$ dodatniego stopnia, który jest funkcją okresową.
16. (a) Udowodnij, że wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych jest funkcją (określoną na $\mathbb{R}$) nieograniczoną z dołu i z góry
    (b) Udowodnij, że wielomian stopnia parzystego i dodatniego o współczynnikach rzeczywistych i dodatnim współczynniku wiodącym jest funkcją ograniczoną z dołu i nieograniczoną z góry.

Analiza - klasa 3a Zestaw 5. 15.11.2022

Wielomiany II

Twierdzenie o dzieleniu wielomianów. Dla każdej pary wielomianów $f(x)$ i $h(x)$, gdzie $\deg h \geqslant 0$, istnieje dokładnie jedna para wielomianów $q(x)$ i $r(x)$ taka, że

$$f = h \cdot q + r, \quad \text{i} \quad \deg r < \deg h.$$

Mówimy wówczas, że r jest *resztą z dzielenia* wielomianu f przez wielomian h. Jeżeli $r = 0$ (czyli $f = h \cdot q$), to mówimy, że h jest *dzielnikiem* f lub f jest *podzielny* przez h.

Twierdzenie Bézouta. Reszta z dzielenia wielomianu f przez dwumian $x - c$ jest równa $f(c)$. Inaczej mówiąc

$$f(x) = (x - c)q(x) + f(c)$$

dla pewnego wielomianu q takiego, że $\deg q = \deg f - 1$.

Wniosek 1. Liczba c jest pierwiastkiem niezerowego wielomianu f wtedy i tylko wtedy, gdy dwumian $x - c$ jest dzielnikiem wielomianu f.

Wniosek 2. Jeżeli różne liczby $c_1, c_2, \ldots, c_k$ są pierwiastkami wielomianu f, to f jest podzielny przez wielomian $(x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_k)$.

Schemat Hornera. Dany jest wielomian $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ i liczba c. Współczynniki wielomianu $g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ takiego, że $f(x) = (x - c)g(x) + f(c)$ i liczbę $f(c)$ można sprawnie wyznaczyć za pomocą algorytmu zwanego *schematem Hornera*:

	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_1	a_0
c	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1}$	$\ldots$	$b_0 = a_1 + cb_1$	$f(c) = a_0 + cb_0$

---

1. Dla jakich wartośći a, b wielomian $x^3 + ax^2 + bx - 6$ jest podzielny przez (a) $x + 1$, (b) $x^2 - 3x + 2$?

2. Wielomian f daje resztę -1 przy dzieleniu przez $x - 1$, resztę 2 przy dzieleniu przez $x - 2$ i resztę 11 przy dzieleniu przez $x - 3$. Wyznacz resztę z dzielenia f przez $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

3. Nie wykonując dzielenia wielomianów, wyznacz resztę z dzielenia

(a) wielomianu $x^4 + x^2 - 6$ przez $x^2 - 2x - 3$

(b) wielomianu $2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x - 1$ przez $x^2 + 1$

4. Stosując schemat Hornera oblicz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu

(a) $f(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1$ przez $x - 1$,

(b) $g(x) = 4x^5 + 3x^3 - 2x + 1$ przez $x + 2$,

(c) $h(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{2}{3}x - 2$ przez $x + \frac{1}{3}$.

5. Zapisz wielomiany (a) $x^5 + x^3 + x$, (b) $x^4 - 2x^3 + 3x + 5$ jako sumę potęg dwumianu $x - 1$. Może się przydać schemat Hornera.

6. Dla jakich wartości $a, b \in \mathbb{R}$ wielomian $ax^4 + bx^3 + 1$ jest podzielny przez $(x - 1)^2$?

7. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że wielomian $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ jest podzielny przez $(x - 1)^2$.

8. Dla jakich liczb całkowitych a wielomian $(x - a)(x - 10) + 1$ jest iloczynem dwóch wielomianów stopnia 1 o współczynnikach całkowitych?

9. Czy wielomian $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ jest kwadratem innego wielomianu o współczynnikach rzeczywistych?

10. Liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu w. Pokaż, że wielomian $v(x) = w(x^n)$ jest podzielny przez wielomian $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$.

11. Wyznacz wszystkie wielomiany $f \in \mathbb{R}[x]$ takie, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$

(a) $x \cdot f(x - 1) = (x + 1) \cdot f(1)$,

(b) $(x + 1) \cdot f(x) = (x - 10) \cdot f(x + 1)$.

12. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ wielomian $(x + 1)^n - x^n - 1$ jest podzielny przez $x^2 + x + 1$?

Wielomiany III (powtórzenie)

1. Wyznacz współczynniki a i b wielomianu $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, jeżeli dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $w(x-1) - w(x) = -3x^2 + 3x - 6$.

2. Funkcja $f(x) = (x^2 - bx)^2 - (ax^2 + x)^2 + 5(b+1)$ jest wielomianem stopnia 3 i $f(1) = 0$. Wyznacz a i b.

3. Znajdź wielomian dodatniego stopnia o całkowitych współczynnikach, którego pierwiastkiem jest liczba (a) $\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$, (b) $\sqrt[3]{3} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

4. Wykaż, że liczby 1 i -1 to jedyne rzeczywiste pierwiastki wielomianu

$$f(x) = x^7 + x^6 - x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x - 1.$$

5. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje wielomian $w \in \mathbb{Z}[x]$ stopnia n taki, że $w(2) = 7$ i $w(5) = 13$.

6. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $x^{2022} - 2021x^{1011} + x^2 - 5x + 2021$ przez $x^2 - 1$.

7. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $3x^5 - 2x^3 + x^2 - 4x + 5$ przez (a) $x - 3$, (b) $x^2 - 4$, (c) $x^2 + 1$.

8. Dla jakich wartości a, b wielomian $x^5 + x^4 + ax^3 + bx^2 + 5$ jest podzielny przez (a) $(x+1)^2$, (b) $x^2 + 4$?

9. Zapisz wielomian $4x^6 - 3x^5 + x^4 - 2x^2 + 5$ jako wielomian zmiennej $t = x + 1$.

10. Dla jakich a, b wielomian $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1$ jest kwadratem innego wielomianu?

11. Wyznacz wielomian P, jeśli $P(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Analiza - klasa 3a Zestaw 7. 1.12.2022

Wielomiany IV

Algorytm dzielenia wielomianów z resztą: Dla danych wielomianów w i q, gdzie $\deg w \geqslant \deg q$, szukamy wielomianów v i r takich, że $w = p \cdot v + r$ i $\deg(r) < \deg(q)$:

Niech $w_0(x) = w(x)$, $v_0(x) = 0$.

Jeżeli mamy już wyznaczone wielomiany w_k i v_k, to v_{k+1} otrzymujemy dodając do v_k iloraz najwyższych stopniem wyrazów wielomianów w_k i p: $v_{k+1}(x) = v_k(x) + c_k x^{j_k}$. Następnie wyznaczamy $w_{k+1}(x) = w_k(x) - c_k x^{j_k} \cdot p(x)$. Wówczas $\deg(w_{k+1}) - \deg(w_k)$.

Powtarzamy tak długo, aż $\deg(w_k) < \deg(q)$. Wtedy $v = v_k$ i $r = w_k$.

Tw. Niech $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ i $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$, $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$. Wówczas istnieje dokładnie jeden wielomian p stopnia nie większego od n taki, że $p(x_j) = y_j$ dla $j = 0, 1, \dots, n$.

Wniosek (Drugie tw. o równości wielomianów) Jeżeli wielomiany p, q stopnia nie większego niż n przyjmują te same wartości dla $n+1$ różnych argumentów, to $p = q$.

---

1. Udowodnij, że iloraz z dzielenia wielomianu o współczynnikach całkowitych przez dwumian $x - c$, gdzie c jest liczbą całkowitą, jest wielomianem o współczynnikach całkowitych.

2. Wykonaj dzielenie wielomianu z resztą:

(a) $x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ przez $x^2 + 2x$,

(b) $x^6 + 1$ przez $x^2 + x - 2$

(c) $3x^7 - x^6 + 2x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x - 2$ przez $x^2 + 1$

(d) x^8 przez $x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$

3. Udowodnij, że nie istnieje wielomian p taki, że $p(x) = \sin x$ dla każdego $x \in [0, \pi]$.

4. Definiujemy wielomiany

$$\binom{x}{0} = 1, \qquad \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} \quad \text{dla } k = 1, 2, 3 \dots.$$

(a) Pokaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\binom{x+1}{k+1} = \binom{x}{k} + \binom{x}{k+1}.$$

(b) Pokaż, że $\binom{x}{k}$ jest liczbą całkowitą dla $x \in \mathbb{Z}$.

(c) Niech w będzie wielomianem stopnia n. Pokaż, że $w(x) \in \mathbb{Z}$ dla każdego $x \in \mathbb{Z}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby całkowite $a_0, a_1, \dots, a_n$ takie, że

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \binom{x}{k}.$$

5. Zapisz wielomian $3x^4 - 4x^2 + 7x - 12$ jako sumę $\sum_{k=0}^{4} c_k \binom{x}{k}$.

6. Niech p będzie wielomianem stopnia n takim, że $p(k) = \frac{k}{k+1}$ dla k $= 0, 1, 2, \dots, n$. Oblicz $p(n+1)$.

Wielomiany V

Niech $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n \neq 0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych.

I twierdzenie o pierwiastkach wymiernych. Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze, jest pierwiastkiem wielomianu f, to $p \mid a_0$ oraz $q \mid a_n$.

Wniosek. Każdy wymierny pierwiastek unormowanego wielomianu o współczynnikach całkowitych jest liczbą całkowitą.

II twierdzenie o pierwiastkach wymiernych. Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze, jest pierwiastkiem wielomianu f i b jest liczbą całkowitą taką, że $f(b) \neq 0$, to $p - bq \mid f(b)$.

---

1. Wyznacz wszystkie pierwiastki wymierne wielomianów:

(a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$,

(b) $x^4 + 4x^3 - 25x^2 - 16x + 84$,

(c) $11x^4 + 9x^3 - 35x^2 - 27x + 6$,

(d) $15x^4 - 19x^3 + 16x^2 - x - 3$,

(e) $18x^6 + 27x^5 - 5x^4 - 18x^2 - 27x + 5$,

(f) $9x^4 - 48x^3 + 10x^2 + 24x + 5$,

(g) $x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 26x^2 + 36x - 72$.

2. Udowodnij, że liczby $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ i $\sqrt[3]{3} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ są niewymierne.

3. Wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartości nieparzyste dla dwóch kolejnych liczb całkowitych. Udowodnij, że f nie ma pierwiastków całkowitych.

4. Wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartość 1 dla trzech różnych liczb całkowitych. Udowodnij, że nie ma on pierwiastków całkowitych.

5. Wielomian $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, ma współczynniki całkowite. Załóżmy, że liczby a_n, a_0 i $f(1)$ są nieparzyste. Udowodnij, że f nie ma pierwiastków wymiernych.

6. Liczby 1 i 2 są pierwiastkami wielomianu f o współczynnikach całkowitych. Udowodnij, że pewien współczynnik wielomianu f jest mniejszy od -1.

7. Niech $k, p \in \mathbb{N}$ i wielomian $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ma współczynniki całkowite. Udowodnij, że jeżeli $p + 1$ nie dzieli żadnej z liczb $f(k), f(k+1), \ldots, f(k+p)$, to wielomian f nie posiada pierwiastków wymiernych.

8. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $\sqrt[3]{3} + \dfrac{k}{\sqrt[3]{3}}$ jest niewymierna.

9. Niech $n \geqslant 2$. Udowodnij, że wielomian

$$p(x) = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} + 1$$

nie ma pierwiastków wymiernych.

Analiza - klasa 3a Zestaw 9. 17.1.2022

Wielomiany VI

Zasadnicze twierdzenie algebry. Każdy wielomian o współczynnikach zesolonych dodatniego stopnia ma pierwiastek zespolony.

(Dowód tego twierdzenia pomijamy – na razie ...)

Wniosek 1. Każdy wielomian $p \in \mathbb{C}[z]$, $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ stopnia $n > 1$, ma dokładnie n pierwiastków zespolonych $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ (niekoniecznie różnych) i $p(z) = a_n(z - z_0)(z - z_1) \ldots (z - z_{n-1})$.

Wniosek 2. Każdy wielomian z $\mathbb{R}[x]$ dodatniego stopnia jest iloczynem wielomianów z $\mathbb{R}[x]$ stopnia 1 i wielomianów z $\mathbb{R}[x]$ stopnia 2 nie mających pierwiastków rzeczywistych.

Wniosek 3. Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych nieparzystego stopnia ma pierwiastek rzeczywisty.

Twierdzenie (Wzory Viete'a). Liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są wszystkimi zespolonymi pierwiastkami wielomianu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_i \in \mathbb{C}$ i $a_n \neq 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są równości

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \qquad \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \qquad \ldots,$$

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}, \qquad \ldots, \qquad x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Uwaga: W powyższym twierdzeniu nie zakładamy, że pierwiastki $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są różne.

---

1. Wielomian $w(x) = x^3 + px + q$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, x_3, przy czym $x_1 = x_2$ i $x_3 = x_1 - 6$. Wyznacz p i q.
2. Liczby 2 i 3 są pierwiastkami wielomianu $2x^3 + kx^2 - 13x + m$. Wyznacz współczynniki k i m oraz trzeci pierwiastek tego wielomianu.
3. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Oblicz sumę i iloczyn pierwiastków wielomianu $x^n - (x-1)^n$.
4. Liczby zespolone $z_1, z_2, \ldots, z_n$ są pierwiastkami wielomianu $P \in \mathbb{R}[z]$ stopnia n. Udowodnij, że liczby $z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2$ i $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n}$ są rzeczywiste.
5. Niech $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ oznaczają pierwiastki wielomianu $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Oblicz wartości wyrażeń

   (a) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$,

   (b) $(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)(1 - x_3^2)$,

   (c) $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} + \dfrac{1}{x_3^2}$

   (d) $\dfrac{1}{x_1 x_2} + \dfrac{1}{x_2 x_3} + \dfrac{1}{x_3 x_1}$.
6. Liczby x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu $x^3 + 6x^2 + 11x - 6$. Znajdź wielomian stopnia 3, którego pierwiastkami są liczby (a) $x_1 x_2$, $x_2 x_3$, $x_3 x_1$, (b) $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$, $x_3 + x_1$
7. Znajdź pierwiastki wielomianu $x^4 - 10x^3 + 32x^2 - 34x + 7$, wiedząc, że suma pewnych dwóch jego pierwiastków jest równa 4.
8. Wielomian $p(x) = x^5 - 10x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 32$ ma pięć pierwiastków dodatnich. Wyznacz współczynniki a, b, c.
9. Wielomian $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste. Udowodnij, że $b^2 \geqslant ac$ i $c^2 \geqslant bd$. Czy jest prawdziwe twierdzenie odwrotne?
10. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $a + b + c > 0$, $ab + bc + ca > 0$ i $abc > 0$. Udowodnij, że $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$.
11. Liczby x, y, z, u, v, w spełniają warunki
$$x + y + z = u + v + w, \quad xyz = uvw, \quad 0 < u \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant w, \quad u \leqslant v \leqslant w.$$
Udowodnij, że $u = x, v = y, w = z$.
12. Liczby x, y, z, a spełniają równości
$$x + y + z = a, \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}.$$
Udowodnij, że jedna z liczb x, y, z jest równa a.
13. Dane są liczby wymierne p, q, r takie, że każda z liczb
$$p + q + r, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}, \quad pqr$$
jest całkowita. Udowodnij, że liczby p, q, r są całkowite.
14. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunki $xyz > 1$ i $x + y + z < \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$. Udowodnij, że dokładniej jedna z liczb x, y, z jest mniejsza od 1.
15. Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20 \end{cases}$$
16. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n \geqslant 3$, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-3} \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że nie wszystkie pierwiastki wielomianu $P(x) = x^n + 2nx^{n-1} + 2n^2 x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \ldots + a_1 x + a_0$ są liczbami rzeczywistymi.
17. Wielomian $ax^3 + bx^2 + cx + d$ współczynniki całkowite i trzy pierwiastki rzeczywiste. Liczba ad jest nieparzysta, a liczba bc jest parzysta. Udowodnij, że pewien pierwiastek tego wielomianu jest liczbą niewymierną.
18. Wszystkie współczynniki wielomianu $P(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 1$ są liczbami nieujemnymi i wielomian P ma n pierwiastków rzeczywistych. Udowodnij, że $P(2) \geqslant 3^n$.

Analiza - klasa 3a Zestaw 10. 7.2.2023

Wielomiany VII

Definicja. Mówimy, że wielomian $p \in \mathbb{K}[x]$ (gdzie $\mathbb{K} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) jest rozkładalny w $\mathbb{K}[x]$ (nad $\mathbb{K}$), jeżeli istnieją wielomiany $q, r \in \mathbb{K}[x]$ dodatnich stopni takie, że $p = q \cdot r$.

W rozkładaniu wielomianu o współczynnikach całkowitych na wielomiany niższych stopni przydatne mogą być:

- wzory skróconego mnożenia i wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego,
- twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianów o współczynnikach całkowitych,
- grupowanie wyrazów tak, aby otrzymać sumę wielomianów o wspólnym czynniku,
- rozważamia o zespolonych pierwiastkach wielomianów,
- schemat Hornera i algorytm dzielenia wielomianów „pod kreską".

Kryterium Eisensteina nierozkładalności wielomianów w $\mathbb{Z}[x]$. Dany jest wielomian $f \in \mathbb{Z}[x]$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ i $a_n \neq 0$. Załóżmy, że istnieje liczba pierwsza p taka, że

$$p \nmid a_n, \qquad p \mid a_k \text{ dla } k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \text{oraz} \quad p^2 \nmid a_0.$$

Wówczas wielomian f nie jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

---

1. Opisz wielomiany nierozkładalne w $\mathbb{R}[x]$ i $\mathbb{C}[x]$.

2. Rozłóż wielomiany na czynniki w $\mathbb{Z}[x]$:

(a) $(x+1)^3 + (x-1)^3$,
(b) $x^6 + 1$,
(c) $x^9 + x^4 - x - 1$,
(d) $x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5x + 15$,
(e) $x^4 + 4$,
(f) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$,
(g) $8x^3 - 5x^2 - 24x + 15$,
(h) $2x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 2$
(i) $x^5 + x^3 - x^2 - 1$,
(j) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 6x - 12$,
(k) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 9x - 15$,
(l) $x^5 + x^4 + x^3 - 1$
(m) $x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1$
(n) $x^8 + x^4 + 1$,
(o) $x^{10} + x^5 - 2$,
(p) $x^{10} + x^5 + 1$,
(q) $(x^2+x+1)^2 + 3x(x^2+x+1) + 2x^2$,
(r) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2 - x^5$
(s) $x^9 - 6x^4 + x^3 + 8$

3. Czy wielomian $x^4 - x^2 + 1$ jest rozkładalny nad $\mathbb{Z}$?

4. Dane są różne liczby całkowite a i b. Pokaż, że wielomian $(x-a)^2(x-b)^2 + 1$ nie jest iloczynem dwóch wielomianów o współczynnikach całkowitych dodatniego stopnia.

5. Liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są różne. Pokaż, że wielomian

$$(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) - 1$$

nie jest iloczynem dwóch wielomianów o współczynnikach całkowitych dodatniego stopnia.

6. Niech $p \in \mathbb{Z}[x]$ i $\deg p > 1$. Udowodnij, że wielomian $f(x) = p(x + p(x))$ jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

7. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ liczba $n^{12} + 64$ jest iloczynem czterech różnych liczb naturalnych.

8. Udowodnij, że wielomian $2x^{17} - 18x^{12} + 24x^9 + 243x^6 - 30x^3 - 6$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

9. Czy wielomian $P(x) = 2 + \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} x^k$ jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$?

10. Udowodnij, że wielomian $x^6 + x^3 + 1$ nie jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

11. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ i $P(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$. Pokaż, że wielomian P jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$ wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą złożoną.

12. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje nieskończenie wiele **dwumianów** stopnia n o współczynnikach całkowitych nierozkładalnych w $\mathbb{Z}[x]$

13. Udowodnij, że wielomian $p(x) = x^{101} + 101x^{100} + 102$ nie jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

14. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że wielomian $x^{2^n} + 1$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

15. Czy wielomian $x^{105} - 9$ jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

16. Niech $a \in \mathbb{Z}$ i $5 \nmid a$. Udowodnij, że wielomian $P(x) = x^5 - x + a$ jest nierozkładalny nad $\mathbb{Z}$.

17. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n > 1$. Udowodnij, że wielomian $P(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ jest nierozkładalny nad $\mathbb{Z}$.

18. **[Lemat Gaussa]** Udowodnij, że jeśli wielomian $p \in \mathbb{Z}[x]$ jest rozkładalny w $\mathbb{Q}[x]$, to jest też rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

Wielomiany VIII (powtórka)

1. Wyznacz wszystkie zespolone pierwiastki wielomianów:

(a) $3x^3 + 10x^2 + 9x + 2$,

(b) $2x^3 + 5x^2 + 3x - 3$,

(c) $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$,

(d) $x^5 - x^4 - 3x^3 - 3x^2 - x + 1$.

2. Wyznacz rzeczywiste rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 + xyz = x^4 + y^4 + z^4 + 1 \end{cases}$$

3. Dla jakich wartości współczynnika $a \in \mathbb{R}$ pierwiastki zespolone x_1, x_2, x_3 wielomianu $x^3 + ax^2 - 3x - 19$ spełniają warunek $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3$?

4. Wielomian $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \neq 0$, ma współczynniki całkowite i $7 \mid f(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$. Udowodnij, że każda z liczb a, b, c, d, e jest podzielna przez 7.

5. Dla danych liczb a, b, c wyznacz wielomian stopnia 3, którego pierwiastki są sześcianami pierwiastków wielomianu $x^3 + ax^2 + bx + c$.

6. Udowodnij, że wielomian $ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $2 \nmid ad$ i $2 \mid bc$, nie może mieć trzech pierwiastków wymiernych.

7. Rozłóż wielomiany na czynniki o całkowitych współczynnikach:

(a) $x^6 + x^4 + 2x^2 + 2$,

(b) $x^6 - 3x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 1$,

(c) $x^{16} - x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1$,

(d) $x^8 + x^4 + 2x^2 + 6$,

(e) $x^9 + x^7 - x^5 - x^3 + 2x^2 + 2$.

8. Udowodnij, że wielomian $P(x) = x^7 + (x+3)^7 + (x+4)^7 + 6$ jest nierozkładalny nad $\mathbb{Z}$.

Analiza - klasa 3a Zestaw 12. 4.4.2023

Kresy zbiorów

Definicje. Niech $A \subset \mathbb{R}$.

- Zbiór A jest *ograniczony z góry* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $b \in \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $a \in A$ zachodzi nierówność $a \leqslant b$. Każdą taką liczbę b nazywamy *ograniczeniem górnym* zbioru A.
- Liczba $b \in \mathbb{R}$ jest *kresem górnym* (*supremum*) zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:
  (i) b jest ograniczeniem górnym zbioru A;
  (ii) jeżeli c jest ograniczeniem górnym zbioru A, to $b \leqslant c$.
  Kres górny zbioru A oznaczamy $\sup A$.

Analogicznie definujemy zbiór *ograniczony z dołu*, *ograniczenie dolne* i *kres dolny* (*infimum*) zbioru A, oznaczany $\inf A$.

Jeżeli niepusty zbiór A nie jest ograniczony z góry, piszemy $\sup A = +\infty$, jeżeli A nie jest ograniczony z dołu, to piszemy $\inf A = -\infty$.

Przyjmujemy, że $\inf \emptyset = +\infty$ i $\sup \emptyset = -\infty$.

Jeżeli $a = \sup A$ i $a \in A$, to mówimy, że a jest *elementem maksymalnym* zbioru A i stosujemy oznaczenie $a = \max A$. Podobnie definiujemy *element minimalny* $\min A$.

Stw. Niech $A \subset \mathbb{R}$. Wówczas

(i) Liczba $b \in \mathbb{R}$ jest kresem górnym zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy b jest ograniczeniem górnym zbioru A oraz $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{a \in A}\ b - \varepsilon < a$.

(ii) Liczba $b \in \mathbb{R}$ jest kresem dolnym zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy b jest ograniczeniem dolnym zbioru A oraz $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{a \in A}\ a < b + \varepsilon$.

Aksjomat ciągłości. Każdy niepusty i ograniczony z góry zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma kres górny.

Stw. Każdy niepusty i ograniczony z dołu zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma kres dolny.

Stw. Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest nieograniczony z góry.

Stw. (istnienie pierwiastków z liczb nieujemnych). Jeżeli $a \geqslant 0$ i $n \in \mathbb{N}$, to istnieje dokładnie jedna liczba $b \geqslant 0$ taka, że $b^n = a$.

Zasada Archimedesa. Dla każdej liczby rzeczywistej a istnieje liczba naturnalna $n > a$.

Tw. (o gęstości $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$) Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, $a < b$. istnieje liczba $x \in \mathbb{Q}$ taka, że $a < x < b$.

Definicja. Jeżeli zbiory $A, B \subset \mathbb{R}$ są niepuste, $\lambda \in \mathbb{R}$, to przyjmujemy, że $\lambda \cdot A = \{\lambda a : a \in A\}$, $-A = (-1) \cdot A$, $A \pm B = \{a \pm b : a \in A, b \in B\}$,

---

1. Niech $A, B \subset \mathbb{R}$ i dla dowolnych $a \in A$ i $b \in B$ zachodzi $a \leqslant b$. Udowodnij, że $\sup A \leqslant \inf B$. Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne?

2. Niech $A \subset \mathbb{R}$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, $b = \inf A$, $c = \sup A$. Wyznacz kresy zbioru $\lambda \cdot A$.

3. Zbiory $A, B \subset \mathbb{R}$ są niepuste i mają skończone kresy. Udowodnij równości:

(i) $\sup(-A) = -\inf A$,

(ii) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,

(iii) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$,

(iv) $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$,

(v) $\sup(A \cdot B) = \max(\sup A \cdot \sup B, \sup A \cdot \inf B, \inf A \cdot \sup B, \inf A \cdot \inf B)$.

Co się stanie, jeżeli kresy zbiorów nie muszą być skończone?

4. Znajdź kresy zbiorów. Czy zbiory mają elementy maksymalne i minimalne?

(a) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$;

(b) $\left\{\frac{n^2 + 2n - 3}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$;

(c) $\left\{\frac{x-1}{x+1} : x > -1\right\}$;

(d) $\left\{\frac{x}{1+x^2} : x \in \mathbb{R}\right\}$;

(e) $\left\{x - \frac{1}{x} : 1 \leqslant x \leqslant 2022\right\}$;

(f) $\left\{\frac{n-k}{n+k} : n, k \in \mathbb{N}\right\}$;

(g) $\left\{\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| : m, n \in \mathbb{N}, n \neq m\right\}$;

(h) $\left\{\frac{1}{k} + \frac{1}{l} - \frac{1}{m} : k, l, m \in \mathbb{N}\right\}$;

(i) $\left\{\frac{nm}{2n^2 + m^2} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$

(j) $\{xyz : x + y + z = 6 \text{ i } 0 \leqslant x, y, z\}$

(k) $\{a^2 - ab : a, b \in (0, 1)\}$

5. Niech $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ i $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Udowodnij, że istnieje liczba wymierna q taka, że $a < qx < b$.

6. Niech A oznacza zbiór wszystkich liczb niewymiernych z przedziału $(0, 1)$. Wyznacz zbiór $A + A$.

7. Wyznacz kres górny zbioru $\left\{\frac{x(1+\sqrt{y})}{x^2 + y^2} : 0 < x \leqslant y < 1\right\}$.

8. Wyznacz kresy zbioru $\left\{\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Analiza - klasa 3a Zestaw 13. 25.4.2023

Granica ciągu I

Definicja granicy ciągu. Liczba g jest granicą ciągu liczbowego $(a_n)_n$, jeżeli dla każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N taka, że dla wszystkich $n > N$ spełniona jest nierówność

$$|a_n - g| < \varepsilon.$$

Piszemy wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, $a_n \xrightarrow{n} g$ lub po prostu $a_n \to g$.

Jeżeli liczba $g \in \mathbb{R}$ jest granicą ciągu $(a_n)_n$, to mówimy, że ciąg $(a_n)_n$ *jest zbieżny do* g. Ciąg, który nie jest zbieżny, nazywamy *ciągiem rozbieżnym*.

Stw. 1 (jednoznaczność granicy). Ciąg liczbowy (a_n) ma nie więcej niż jedną granicę.

Stw. 2. Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to
(i) $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = ca$ dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$, (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

Stw. 3. Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

Tw. 4. (o trzech ciągach) Dane są trzy ciagi liczbowe $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ i $(c_n)_n$, przy czym $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$ oraz istnieje liczba $N > 0$ taka, że dla każdego $n > N$ spełniona jest nierówność $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$. Wówczas ciąg $(b_n)_n$ jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Stw. 5. Ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Wówczas
(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$,
(ii) jeśli $b \neq 0$, to $b_n \neq 0$ dla dostatecznie dużych n i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Stw. 6. Niech $k \in \mathbb{N}$, ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. Jeżeli $2 \mid k$ i $a_n \geqslant 0$ dla każdego n, lub $2 \nmid k$ to ciąg $(\sqrt[k]{a_n})_n$ jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{g}$.

---

1. Wykaż, korzystając z definicji granicy ciągu, że (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2-1} = 2$, (b) jeśli $|q| < 1$, $k \in \mathbb{N}$, to $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} n^k q^n = 0$.
2. Zbadaj zbieżność ciągu $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
3. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $a > 1$ prawdziwa jest nierówność $\sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n}$. Następnie udowodnij, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
4. Wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - g| = 0$.
5. Załóżmy, że $a_n \to a$. Wykaż, że $|a_n| \to |a|$. Podaj przykład, że nie zachodzi implikacja w drugą stronę.
6. Wykaż, że poniższe ciągi są rozbieżne:
   (a) $a_n = n$,
   (b) $b_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$,
   (c) $c_n = \frac{q^n}{n^k}$, gdzie $|q| > 1$, $k \in \mathbb{N}$,
   (d) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$,
   (e) $b_n = \frac{n^n}{n!}$.
7. Ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > a$. Wykaż, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n > a$ dla $n > N$.
8. Ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Wykaż, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n > b_n$ dla $n > N$.
9. Ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne i istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n \leqslant b_n$ dla $n > N$. Wykaż, że
$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n.$$
Podaj przykład ciągów $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ takich, że $a_n < b_n$ dla wszystkich n oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
10. Załóżmy, że $a_n \to g$. Wykaż, że ciąg $b_n = \frac{\lfloor na_n \rfloor}{n}$ też jest zbieżny do g.
11. Wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
12. Ciąg $(a_n)_n$ jest ograniczony, a ciąg $(b_n)_n$ jest zbieżny do 0. Wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.
13. Oblicz granice ciągów lub wykaż, że ciągi są rozbieżne:
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n-2}{2n+8}$,
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(4n-3)^2}{3n^2+7n-6}$,
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4\cdot 3^{n+1} - 2\cdot 2^{2n}}{5\cdot 3^n - 4^{n+2}}$,
   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2^n - 7\cdot 3^n}{3^n + 2}$,
   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5 7^n + n^7 5^n}{n^7 7^n + n^5 5^n}$,
   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n}\right)$,
   (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^2}$,
   (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k}\binom{n+k}{n}$, $k \in \mathbb{N}$,
   (i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)! + (n-1)!}{(n+1)! - (n-1)!}$,
   (j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+\sqrt{n}} - \sqrt{n^2-\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$,
   (k) $\sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n-1})$,
   (l) $\frac{n}{n^2+1}\sin(n!)$.
   (m) $\sqrt[n]{3^n + 2^n}$,
   (n) $\sqrt[n]{3^n - 2^n}$,
   (o) $\sqrt[n]{n + 3^n}$,
   (p) $\sqrt[n]{2n + \frac{(-1)^n}{n}}$,
   (q) $\sqrt[n^2]{n}$,
   (r) $\sqrt[n+2]{n-2}$, $n \geqslant 2$,
   (s) $\sqrt[n^2]{5^n - 4}$,
   (t) $\sqrt[n]{5^{n-1} - 7\cdot 2^{2n} - 100}$

Granica ciągu II

Tw. 1. Niech $(a_n)_n$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych, który jest
(i) niemalejący i ograniczony z góry
lub
(ii) nierosnący i ograniczony z dołu.
Wówczas ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

Lemat 1. Dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Lemat 2. Jeśli $n \in \mathbb{N}$, to

$$2 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3.$$

Tw. 2. (Stała Eulera) Ciąg $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony z góry, więc zbieżny. Jego granicę, czyli liczbę

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

nazywamy *stałą Eulera.*

Tw. 3. $e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Lemat 3. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje liczba $\theta_n \in (0,1)$ taka, że $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\theta_n}{nn!}$.

Tw. 4. Liczba e jest niewymierna.

---

1. Wykaż zbieżność ciągów

$$\text{(a) } a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \quad \text{(b) } c_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \text{(c) } b_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right), \quad .$$

2. Niech $x_1 > 0$ i $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$. Wykaż, że ciąg $(x_n)_n$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

3. Dany jest ciąg $(a_n)_n$ taki, że $a_1 > 0$ i

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3 \ldots.$$

Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

4. Niech $a_1 > b_1 > 0$ i

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \frac{2}{a_n^{-1} + b_n^{-1}}, \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wykaż, że ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne i wyznacz ich granice.

5. Niech $a_1 > b_1 > 0$ i

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wykaż, że ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne do tej samej granicy (zwanej *srednią arytmetyczno – geometryczną* liczb a_1, b_1).

6. Ciąg $(a_n)_n$ spełnia warunki $0 < a_n < 1$ i $a_n(1-a_{n+1}) > \frac{1}{4}$ dla $n \geqslant 1$. Wykaż, że ciąg ten jest zbieżny i znajdź jego granicę.

7. Niech $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ i $b_{n+2} = \sqrt{b_n} + \sqrt{b_{n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wykaż, że ciąg ten jest zbieżny i znajdź jego granicę.

8. Wykaż, że $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$

9. Oblicz granice

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, (b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$, (c) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, (d) $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e}-1)$.

10. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty}(2\sqrt[n]{a}-1)^n = a^2$ dla $a \geqslant 1$, oraz $\lim_{n\to\infty}\frac{(2\sqrt[n]{n}-1)^n}{n^2} = 1$.

11. Oblicz $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+1)!}$.

12. Niech $x_n > 0$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n} = 1$.
Wskazówka: $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

13. Niech $(\theta_n)_n$ to ciąg zdefiniowany w lemacie 3. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty}\theta_n = 1$.

14. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)$.

15. Ciąg $(a_n)_n$ jest ograniczony z góry i $a_{n+1} - a_n > -\frac{1}{n^2}$ dla każdego n. Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.