Analiza - klasa 2a Zestaw 1. 3.9.2021

Część całkowita liczby rzeczywistej

Część całkowitą (podłogę) liczby rzeczywistej x (ozn. $\lfloor x\rfloor$) definiujemy jako największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą x.

Twierdzenie (najważniejsze własności części całkowitej).

(i) $\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Jeśli $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$ to $\lfloor x+k\rfloor = \lfloor x\rfloor + k$.

(iii) Jeśli $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$, to $\left\lfloor \frac{\lfloor x\rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n}\right\rfloor$.

(iv) Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$

$$\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor \leqslant \lfloor x+y\rfloor \leqslant \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 1.$$

Sufit liczby rzeczywistej x (ozn. $\lceil x\rceil$) definiujemy jako najmniejszą liczbę całkowitą większą lub równą x. Zachodzi równość $\lceil x\rceil = -\lfloor -x\rfloor$, więc każde wyrażenie zawierające sufit można zamienić na równoważne wyrażenie z podłogą.

---

1. Udowodnij podpunkty (iii) i (iv) Twierdzenia.

2. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2}\right\rfloor = \lfloor 2x\rfloor - \lfloor x\rfloor.$$

3. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \lfloor 2x\rfloor - x$.

4. Funkcja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest dana wzorem

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor.$$

Wykaż, że f jest surjekcją i znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że $f(n) = 2021$.

5. Rozwiąż równanie $\lfloor x\rfloor + \lfloor 3x\rfloor = 17$.

6. Rozwiąż równania

(a) $\left\lfloor \frac{5+6x}{8}\right\rfloor = \frac{15x-7}{5}$, (b) $\left\lfloor \frac{12x-5}{7}\right\rfloor = \frac{7x-6}{4}$.

7. Wyznacz liczbę rozwiązań równania

$$x = \left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{5}\right\rfloor.$$

8. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor \geqslant \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + \lfloor x+y\rfloor.$$

9. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\lfloor 3x\rfloor + \lfloor 3y\rfloor + \lfloor 3z\rfloor \geqslant 2\left(\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + \lfloor z\rfloor\right) + \lfloor x+y+z\rfloor.$$

10. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2}\right\rfloor.$$

11. Udowodnij *tożsamość Hermite'a*:

$$\lfloor nx\rfloor = \lfloor x\rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n}\right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n}\right\rfloor.$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

12. Znajdź wszystkie liczby naturalne n spełniające równość

$$\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k}\right\rfloor = 6 + \sum_{k=2}^{n-1} \left\lfloor \frac{n-1}{k}\right\rfloor.$$

13. Liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są naturalne. Udowodnij nierówność

$$\left\lfloor \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right\rfloor + n \leqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

14. Niech $x \geqslant 0$. Udowodnij równość

$$\left\lfloor \sqrt{\lfloor x\rfloor}\right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{x}\right\rfloor.$$

15. Rozwiąż równanie

$$\lfloor x \cdot \lfloor x\rfloor\rfloor = 1.$$

16. Rozwiąż równanie

$$\left\lfloor (x+1)^2\right\rfloor = \left\lfloor x^2\right\rfloor + 1.$$

17. Liczby a, b są dodatnie, niewymierne i $a+b=1$. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\lfloor na\rfloor + \lfloor nb\rfloor = n-1.$$

18. Liczby a, b, c, d są dodatnie i niewymierne oraz $a+b=1$. Udowodnij, że $c+d=1$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\lfloor na\rfloor + \lfloor nb\rfloor = \lfloor nc\rfloor + \lfloor nd\rfloor.$$

19. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$ i dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\lfloor na\rfloor + \lfloor nb\rfloor = \lfloor nc\rfloor.$$

Udowodnij, że $a+b=c$.

Wzór Legendre'a

Definicja. Niech $p \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$ i $\nu_p(n)$ oznacza największy wykładnik k taki, że $p^k \mid n$. Liczbę $\nu_p(n)$ nazywamy *wykładnikiem p-adycznym* liczby n.

Tw. (Wzórr Legendre'a) Jeżeli p jest liczbą pierwszą i $n \in \mathbb{N}$, to

$$\nu_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots.$$

---

1. Stosując wzór Legendre'a, udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych n, k takich $n \geqslant k$ liczba

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

jest całkowita.

2. Liczba p jest pierwsza i $m \in \mathbb{N}$. Oblicz $\nu_p((p^m)!)$.

3. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że 2^n nie dzieli $n!$, ale 2^n dzieli $(2n)!/n!$.

4. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n takie, że $2^{n-1} \mid n!$.

5. Udowodnij, że dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$ liczby

$$\frac{(2n)! \cdot (2m)!}{n! \cdot m! \cdot (n+m)!} \qquad \text{i} \qquad \frac{(mn)!}{m! \cdot (n!)^m}$$

są całkowite.

6. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że zapis dziesiętny liczby $n!$ kończy się dokładnie 1000 zer.

7. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $n! = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{NWW}\left(1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$.

8. Niech $p \in \mathbb{P}$ i s_n to suma cyfr liczby n w zapisie przy podstawie p. Udowodnij, że $\nu_p(n!) = \dfrac{n - s_n}{p-1}$.

Analiza - klasa 2a   Zestaw 3.   21.09.2021

Układy równań liniowych I

Układ m równań liniowych o n niewiadomych $x_1, x_2, \dots, x_n$ jest to układ równań postaci

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

gdzie $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{R}$.

Jeżeli układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie, to mówimy, że jest *oznaczony.*

Układy 2 równań liniowych z 2 niewiadomymi

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \tag{1}$$

Tw. 1 Układ równań (1) ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $ad - bc \neq 0$.

Definicja. Liczbę $ad - bc$ nazywamy *wyznacznikem* macierzy kwadrtowej $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ i zapisujemy $\det A$.

Tw. 2 (Wzory Cramera) Jeżeli $ad - bc \neq 0$, to jedynym rozwiązaniem układu (1) są liczby

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} e & b \\ f & d \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \qquad y = \frac{\det \begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

Pierwsza interpretacja geometryczna: Każde z dwóch równań interpetujemy jako prostą na płaszczyźnie. Układ ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy te proste nie są równoległe i wówczas współrzędne ich punktu przeciącia są tym rozwiązaniem. Jeżeli proste się pokrywają, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, a jeśli są równoległe, to jest sprzeczny.

Druga interpretacja geometryczna: Układ (1) zapisujemy w tzw. postaci wektorowej:

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

Jeżeli para (x, y) jest rozwiązaniem, to wektor $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ przeskalowany o x dodany do wektora $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ przeskalowanego o y daje wektor $\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$.

Układ ma jednoznacznie rozwiązanie, jeżeli wektory $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ są oba niezerowe i nie są równoległe. W przeciwnym wypadku układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeżeli wektor $\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ ma ten sam kierunek, co każdy z wektorów $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$.

---

1. Rozwiąż układ równań

(a) $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ -4x + 5y = -2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 1 \\ \frac{2}{x} - \frac{5}{y} = \frac{9}{2} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \frac{x-1}{2x} + \frac{y+1}{3y} = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 7 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \frac{3}{2x+3y} + \frac{7}{x-y} = 2 \\ \frac{5}{x-y} + \frac{2}{2x+y} = 2 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} |x| + y = 5 \\ x + 4y = 3 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} |x-2| + |y-5| = 1 \\ y - |x-2| = 5 \end{cases}$

2. Określ ilość rozwiązań układu równań w zależności od wartości parametrów a i b:

(a) $\begin{cases} x - y = a \\ bx - 2y = 12 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} ax + 2y = b + 4 \\ 2x + (a+3)y = 10 \end{cases}$

3. Wyznacz liczbę rozwiązań układu równań w zależności od wartości parametru a:

(a) $\begin{cases} |x+y| = 1 \\ |x| + |y| = a \end{cases}$

(b) $\begin{cases} |2x-y| = 1 \\ |x| + |y| = a \end{cases}$

4. Dla jakich wartości parametru k rozwiązanie układu

$$\begin{cases} x - y = k - 1 \\ 2x - y = 3 - k \end{cases}$$

jest (a) parą liczb ujemnych, (b) parą liczb dodatnich, (c) parą liczb o przeciwnych znakach?

5. Dwie fabryki powinny według planu wykonać łącznie 550 smartfonów. Pierwsza fabryka przekroczyła plan o 10%, a druga o 8% i wówczas obie fabryki razem wykonały ponad plan 50 smartfonów. Ile smartfonów wykonała każda z fabryk?

6. Obwód prostokąta wynosi 54 cm. Jeżeli dłuższy bok powiększymy o 1 cm, a krótszy zmniejszymy o 1 cm, to pole zmniejszy się o 4 cm^2. Oblicz długości boków prostokąta.

7. 44 tony towaru przewieziono 9 samochodami o ładowności 4 tony i 6 ton. Ile było samochodów mniejszych, a ile większych, jeśli każdy został wykorzystany maksymalnie.

8. W ciągu 20 dni cena spółki wzrosła z 5 zł do 15 zł. Każdego dnia cena rosła 1,20 zł lub malała 0,80 zł. Przez ile dni cena rosła, a przez ile malała?

9. Dwie drukarki 3D mają wykonać partię jednakowych elementów. Gdy pierwsza pracowała przez 7 godziny a druga przez 4, wykonały w sumie 5/9 zamówienia. Po kolejnych 4 godzinach pracy każdej drukarki zostało do wykonania 1/8 zamówienia. Ile czasu potrzebowałaby każda drukarka na wykonanie całego zamówienia?

10. Samochody A i B jadą po okrężnej trasie, której 1/4 długości przebiega w mieście. Szybkość A w mieście wynosi $2v$, a poza miastem $9v/4$. Szybkość B w mieście wynosi v a poza miastem $3v$. Samochody razem wjeżdżają do miasta. Który z nich i po jakim czasie dogoni drugiego, jeżeli długość miejskiej drogi wynosi s?

11. Dwa boki równoległoboku zawierają się w prostych $3x+5y-19=0$ i $3x-9y+51=0$, a jedna z przekątnych równoległoboku zawiera się w prostej $3x-2y-5=0$. Oblicz współrzędne wierzchołków równoległoboku.

12. Boki trójkąta zawierają się w prostych $4x+3y-21=0$, $x+2y-4=0$, $3x+y-7=0$.
(a) Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta.
(b) Napisz równania prostych zawierających środkowe trójkąta.
(c) Napisz równania prostych symetralnych boków trójkąta.

Układy 3 równań liniowych z 3 niewiadomymi

Definicja. Wyznacznikiem macierzy 3×3

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

nazywamy liczbę

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Taki wyznacznik najłatwiej obliczyć stosując tzw. schemat Sarrusa:

$$\begin{array}{c} + \\ + \\ + \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{array}\begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ \\ \\ \end{array}$$

Uwaga. Wyznacznik można również zdefiniować dla macierzy kwadratowej większego rozmiaru, ale wówczas powyższy schemat nie ma już zastosowania.

Tw. 3. (Wzory Cramera). Układ 3 równań z 3 niewiadomymi

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases}$$

ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A\neq 0$ i wówczas

$$x=\frac{\det\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{23} & a_{33}\end{bmatrix}}{\det A},\quad y=\frac{\det\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{bmatrix}}{\det A},\quad z=\frac{\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{bmatrix}}{\det A}$$

---

13. Omów interpretację geometryczną układu trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi. Zwróć uwagę na przypadki, gdy układ ma jedno rozwiązanie, wiele rozwiązań i gdy jest sprzeczny.

14. Znajdź równanie płaszczyzny $ax+by+cz=d$
(a) przechodzącej przez punkty $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$,
(b) prostopadłej do wektora $[2,-3,4]$ i przechodzącej przez punkt $(-5,0,1)$,
(c) równoległej do wektorów $[1,-2,1]$ i $[0,3,2]$ i przechodzącej przez punkt $(1,1,1)$,
(d) składającej się z punktów równoodległych od punktów $(2,3,-1)$ i $(4,-2,7)$

15. Wykaż, że układ równań ma jednoznaczne rozwiązanie i znajdź y:

(a) $\begin{cases} 2y+z=0\\ x+4y+z=1\\ 5x+3y+2z=0\end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+2y+3z=1\\ 2x+3y+z=3\\ 3x+y+2z=2\end{cases}$

16. Wyznacz w zależności od $a\in\mathbb{R}$ rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} ax+y+z=1\\ x+ay+z=1\\ x+y+az=1\end{cases}$$

17. Korzystając ze wzorów Cramera (Tw. 3.) udowodnij, że na każdym czworościanie można opisać sferę.

Analiza - klasa 2a Zestaw 4. 1.10.2021

Układy równań liniowych II

Układ m równań liniowych o n niewiadomych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest to układ równań postaci

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

Układ równań liniowych można zapisać za pomocą macierzy, zwanej macierzą rozszerzoną układu:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Dwa układy równań są *równoważne*, jeżeli mają te same zbiory rozwiązań.

Następujące przekształcenia układu równań liniowych prowadzą do układu równoważnego:

- pomnożenie któregokolwiek równania stronami przez stałą $c \neq 0$,
- dodanie do pewnego równania innego pomnożonego przez dowolną stałą c,
- zamiana dwóch równań miejscami.

Przekształcenia te odpowiadają następującym operacjom na macierzy rozszerzonej:

- pomnożenie któregokolwiek wiersza stronami przez stałą $c \neq 0$,
- dodanie do pewnego wiersza innego pomnożonego przez dowolną stałą c,
- zamiana dwóch wierszy miejscami.

Dodatkowo, zamiana miejscami dwóch kolumn spośród pierwszych n odpowiada zamianie kolejności niewiadomych w równaniach.

Metoda eliminacji Gaussa - Jordana wyznaczenia rozwiązań układu równań liniowych polega na sprowadzeniu macierzy rozszerzonej układu za pomocą czterech wyżej wymienionych operacji do postaci

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & c_{1,k+1} & \ldots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & c_{2,k+1} & \ldots & c_{2n} & d_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & c_{k,k+1} & \ldots & c_{kn} & d_k \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & d_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & d_m \end{array}\right].$$

Mając układ w powyższej postaci rozwiązanie wyznaczamy następująco: jeżeli $k < n$ i jedna z liczb $d_{k+1}, \ldots, d_n$ jest niezerowa, to układ jest sprzeczny. W innym przypadku możemy wartości niewiadomych odpowiadających pierwszych k kolumnom w prosty sposób uzależnić od wartości niewiadomych odpowiadających pozostałym $n-k$ kolumnom. Dowolne rozwiązanie układu otrzymujemy biorąc dowolne wartości tych $n-k$ niewiadomych i wyznaczając wartości pierwszych k niewiadomych za pomocą otrzymanych wcześniej wzorów.

---

1. Rozwiąż układy równań

(a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 - 6x_3 = 3 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \end{cases}$

2. Dla jakich wartości a, b układ równań jest sprzeczny / oznaczony ?

(a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 4y = 1 \\ x + 2y = a \\ 4x + 5y = b \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} -x + y + bz = 2 \\ x + ay + 2z = 3 \\ x - y + az = 1 \\ -x + y + az = -1. \end{cases}$

3. Rozwiąż układy n równań

(a) $\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{n-2} + x_n = 1 \\ x_{n-1} = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}$

Analiza - klasa 2a Zestaw 5. 8.10.2021

Trójmian kwadratowy I

Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$ nazywamy trójmianem kwadratowym, funkcją kwadratową, lub wielomianem stopnia 2 (zmiennej x).

Tw. 1. Postać kanoniczna i wyróżnik funkcji kwadratowej. Każdą funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c$ można zapisać w postaci

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \qquad \text{gdzie } \Delta = b^2 - 4ac,$$

zwaną *postacią kanoniczną*. We wzorze powyżej liczba Δ jest nazywana *wyróżnikiem* funkcji kwadratowej f.

Tw. 2. (przebieg zmienności funkcji kwadratowej). Funkcja $f(x) = ax^2+bx+c$, gdzie $a > 0$, jest malejąca na przedziale $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ i rosnąca na przedziale $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$. W pukcie $x = \frac{-b}{2a}$ funkcja f przyjmuje minimum lokalne.

Jeżeli $a < 0$, to funkcja f jest rosnąca na przedziale $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ i malejąca na przedziale $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$. W pukcie $x = \frac{-b}{2a}$ funkcja f przyjmuje maksimum lokalne.

Tw. 3. Pierwiastki funkcji kwadratowej. Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ z wyróznikiem $\Delta = b^2 - 4ac$

(i) ma dwa rózne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, jeżeli $\Delta > 0$, i wówczas

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(ii) ma jeden pierwiastek rzeczywisty x_1, jeżeli $\Delta = 0$, i wówczas $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$.

(iii) nie ma pierwiastków rzeczywistych, jeżeli $\Delta < 0$.

Tw. 4. Wzory Viete'a. Rozważamy funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c$. Niech $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne:

(i) Liczby x_1 i x_2 są (wszystkimi) pierwiastkami funkcji f.

(ii) $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$ (*Wzory Viete'a*).

(iii) $\forall_{x \in \mathbb{R}}\ f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (*postać iloczynowa* funkcji kwadratowej).

---

1. Sprowadź trójmiany kwadratowe do postaci kanonicznej, znajdź ich pierwiastki, wyznacz ich przedziały monotoniczności i określ ich wartość najmniejszą lub największą:

(a) $\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{6}$,

(b) $-\sqrt{2}x^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{6}$,

(c) $x^2 + x - 8$,

(d) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{8}x + 2$.

2. Wyznacz najmniejszą i największą wartość trójmianu kwadratowego na podanych przedziałach:

(a) $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$, na $[-4, 4]$ i $[1, 5]$.

(b) $g(x) = -2x^2 + 11x - 5$, na $[0, 5]$ i $[-1, 1]$.

3. Rozwiąż równania

(a) $(3x - 2)^2 = 7(2 - 3x)$,

(b) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$,

(c) $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$,

(d) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$,

(e) $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 9$,

(f) $x^2 - 4x + |x - 3| + 3 = 0$.

4. Dla danych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ rozwiąż równanie

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x + a + b}.$$

5. Korzystając ze wzorów Viete'a, wyznacz (w pamięci) pierwiastki trójmianów

$$x^2 - 5x - 6, \quad x^2 - 6x + 8, \quad x^2 + 2x - 3, \quad 2x^2 + x - 1,$$
$$x^2 + 10x + 21, \quad 6x^2 - 5x - 1, \quad x^2 + x - 56, \quad 8x^2 + 2x - 3.$$

6. Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami trójmianu $x^2 + ax + bc$, liczby x_2, x_3 są pierwiastkami trójmianu $x^2 + bx + ac$, przy czym $ac \neq bc$. Udowodnij, że liczby x_1, x_3 są pierwiastkami trójmianu $x^2 + cx + ab$.

7. Niech $a, b, c > 0$. Czy jest możliwe, że każdy z trójmianów

$$ax^2 + bx + c, \quad cx^2 + ax + b, \quad bx^2 + cx + a$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste?

8. Czy istnieje trójmian kwadratowy o współczynnikach wymiernych, którego pierwiastkami są liczby $\sqrt{2}$ i $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$?

9. Dla jakich wartości parametru q jeden pierwiastek trójmianu $x^2 - 6x + q$ jest kwadratem drugiego?

10. Liczby p i q są pierwiastkami trójmianu $x^2 + px + q$. Znajdź p i q.

11. Liczby x_1, x_2 są różnymi pierwiastkami trójmianu $x^2 - px + p$. Pokaż, że $x_1^2 + x_2^2 \geqslant 2(x_1 + x_2)$.

12. Niech $f(x) = ax^2 + bx + c$ i załóżmy, że równanie $f(x) = x$ nie ma rozwiazań rzeczywistych. Pokaż, że równanie $f(f(x)) = x$ też nie ma rozwiązań rzeczywistych.

13. Niech $f(x) = x^2 + 12x + 30$ i $n \in \mathbb{N}$. Rozwiąż równanie $f^n(x) = 0$.

14. Dany jest trójmian kwadratowy $f(x) = ax^2 + bx + c$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

(i) $\forall_{n \in \mathbb{Z}}\ f(n) \in \mathbb{Z}$,

(ii) liczby $f(-1)$, $f(0)$ i $f(1)$ są całkowite,

(iii) liczby $2a$, $a + b$ i c są całkowite.

15. Pierwiastki trójmianu $x^2 + ax + b + 1$ są liczbami naturalnymi. Udowodnij, że liczba $a^2 + b^2$ nie jest pierwsza.

16. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (a, b) takie, że liczba $a + b$ jest pierwiastkiem trójmianu $x^2 + ax + b$.

17. Rozwiąż równanie $x^2 + x = 1111111122222222$.

18. Załóżmy, że liczby x_1, x_2 są pierwiastkami trójmianu $ax^2 + bx + c$, gdzie $a > 0$. Udowodnij, że

$$|x_1|, |x_2| \leqslant 1 \iff a + b + c \geqslant 0 \text{ i } a - b + c \geqslant 0 \text{ i } a - c \geqslant 0.$$

Analiza - klasa 2a Zestaw 6. 15.10.2021

Trójmian kwadratowy II

1. Rozwiąż równania:
(a) $2x^4 - x^3 - 11x^2 - x + 2 = 0$,
(b) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$,
(c) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = \frac{17}{4}$.

2. Dla jakiej wartości parametru a suma kwadratów pierwiastków trójmianu

$$x^2 - (a-2)x - a - 1$$

jest najmniejsza?

3. Dla jakich całkowitych wartości parametru k pierwiastki trójmianu

$$kx^2 - (1-2k)x + k - 2$$

są liczbam wymiernymi.

4. Dla jakich wartości parametru p rozwiązania równania $x^2 + 2(p+1)x + 9p - 5 = 0$ są liczbami ujemnymi?

5. Dla jakich wartości parametru k równanie $\frac{x^2+x+2}{3x+1} = k$ ma rozwiązanie?

6. Wyznacz liczbę pierwiatków trójmianu $m^2x^2 + 2(m+1)x + 4$ w zależności od wartości parametru m.

7. Wyprowadź wzór na odległość punktu na płaszczyźnie o współrzędnych (p, q) od prostej o równaniu $y = ax + b$.

8. Załóżmy, że każdy z trójmianów $x^2 + 2ax + b^2$ i $x^2 + 2bx + c^2$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste. Udowodnij, że trójmian $x^2 + 2cx + a^2$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

9. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ równanie $|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = a$ ma więcej niż 3 rozwiązania?

10. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = (x^2 + x + 1)^2 - (x^2 + x + 1) + 1.$$

11. Wykaż, że jeśli współczynniki a, b, c trójmianu kwadratowego ax^2+bx+c są liczbami całkowitymi nieparzystymi, to trójmian ten nie ma pierwiastków wymiernych.

12. Dla danych liczb rzeczywistych a, b takich, że $\frac{|b|}{2} < |a| < 2|b|$, rozważamy funkcję $f(x) = \left(x^2 - ax + b^2\right) \cdot \left(x^2 + bx + a^2\right)$. Dla jakich wartości a, b

$$\min f = \left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right) \cdot \left(a^2 - \frac{b^2}{4}\right)?$$

13. Dla danego parametru $m \in \mathbb{R}$ dane jest równanie $mx^2 - (m-3)x + 1 = 0$.

(a) Dla jakich wartości m to równanie ma rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunek $|x_1| + |x_2| \leqslant 1$?

(b) Dla jakich całkowitych wartości m iloczyn dwóch różnych rozwiązań tego równania jest liczbą całkowitą?

14. Drut o długości 8 metrów należy podzielić na dwie cześci i z jednej zrobić kwadrat, a z drugiej trójkąt równoboczny. Jak to zrobić, aby suma pól tych figur była najmniejsza?

15. Znajdź pole i długości boków największego prostokąta zawartego w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a, b, którego boki są równoległe do tych przyprostokątnych.

16. Pierwszy uczeń rozwiązał 60 równań kwadratowych w czasie o 3 godziny krótszym niż drugi. Ile czasu potrzebuje drugi na rozwiązanie 90 równań, jeżeli razem rozwiązują w ciągu godziny 30 równań. (Zakładamy, że uczeń potrzebuje tyle samo czasu na rozwiązanie każdego równania.)

17. Z dwóch miejscowości A i B wyruszyło jednocześnie dwóch turystów idących ze stałymi prędkościami. Pierwszy przeszedł drogę z A do B i wrócił zaraz do A. Drugi poszedł z B do A i wrócił zaraz do B. Turyści minęli się pierwszy raz w odległości a km od A, drugi raz w odległości b kilometrów od B. Jaka jest odległość od A do B?

18. Dwie rury otwarte jednocześnie napełniają w ciągu godziny 3/4 basenu. Napełnienie basenu do 1/4 objętości tylko przy pomocy pierwszej rury, a następnie dopełnienie tylko przy pomocy drugiej rury do objętości 3/4 basenu zajmuje $2,5$ godziny. Jeśli otworzyć pierwszą rurę na godzinę, a drugą na pół godziny, to napełni się ponad połowa basenu. W ciągu ilu godzin napełni basen każda z rur osobno?

19. Dwa samochody wyruszyły jednocześnie naprzeciw siebie z miast odległych o 210 km i jadą ze stałymi prędkościami. W chwili mijania jeden z nich ma jeszcze 2 godziny jazdy, zaś drugi 9/8 godziny jazdy do miasta, z którego wyruszył mijany samochód. Oblicz prędkość każdego samochodu.

20. Woda wpływa do zbiornika przez kran, zaś wypływa przez odpływ. Gdy otwarty jest kran i odpływ, pusty zbiornik zostanie napełniony wodą w ciągu 12 godzin. Napełnianie zbiornika trwa o godzinę krócej od opróżniania. Ile czasu potrzeba na napełnienie pustego zbiornika z zamkniętym odpływem wodą? Ile czasu trwa opróżnienie zbiornika z zamkniętym kranem?

21. Przednie koło wozu wykonuje na drodze długości 14 km o 3000 obrotów więcej niż koło tylne. Gdyby obwody obu kół powiększyć o pół metra, to na tej samej drodze przednie koło wykona o 2100 obrotów więcej niż koło tylne. Jakie są obwody obu kół?

Analiza - klasa 2a Zestaw 7. 19.10.2021

Powtórzenie – część całkowita, równania liniowe

1. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba $\lfloor \sqrt[n]{111} \rfloor$ dzieli liczbę 111.

2. Rozwiąż równania

(a) $\frac{19x+6}{10} = \left\lfloor \frac{4x+7}{3} \right\rfloor$,

(b) $\left\lfloor \frac{8x+19}{7} \right\rfloor = \frac{16(x+1)}{11}$,

(c) $\lfloor x-1 \rfloor = \left\lfloor \frac{x+2}{2} \right\rfloor$,

(d) $x - \sqrt{\lfloor x \rfloor} = \frac{1}{2}$,

(e) $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor = 2006$.

3. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{9n+8} \rfloor .$$

4. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n istnieją liczby całkowite a i b takie, że

$$n = \left\lfloor a\sqrt{2} \right\rfloor + \left\lfloor b\sqrt{3} \right\rfloor .$$

5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb naturalnych m, n, q liczba

$$\frac{(3m)! \cdot (3n)! \cdot (3q)!}{(m!)^2 \cdot (n!)^2 \cdot (q!)^2 \cdot (m+n+q)!}$$

jest całkowita.

6. Niech $k, n \in \mathbb{N}$. Udowodnij wzór

$$\sum_{j=0}^{k-1} \left\lfloor \frac{n+j}{k} \right\rfloor = n.$$

7. Rozstrzygnij, dla jakich wartości parametru a układ równań

$$\begin{cases} a^2x - 9y = 0 \\ (a+2)x + 2z = 10 \\ 5y + (a-1)z = -15 \end{cases}$$

(a) nie ma rozwiązań,
(b) ma dokładnie jedno rozwiązanie,
(c) ma wiele rozwiązań.

8. Rozstrzygnij, dla jakich wartości parametru p układ równań

$$\begin{cases} (p+1)x + y + z = -6 \\ x - 2y + z = p \\ -x + y + (p-1)z = 2 \end{cases}$$

(a) nie ma rozwiązań,
(b) ma dokładnie jedno rozwiązanie,
(c) ma wiele rozwiązań.

9. Stosując eliminację Gaussa, rozwiąż układy równań

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 16x_3 - 9x_4 = -4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$$

Analiza - klasa 2a Zestaw 8. 26.10.2021

Układy równań nieliniowych

Rozwiąż układy równań

1. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^2 + y^2 + xy = 13 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32 \\ 12(x + y) - 7xy = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x + xy + y = 9 \end{cases}$

5. $\begin{cases} |x| - y = 1 \\ x^2 + y^2 + 2y = 7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 + 3 = 2xy \\ 6x^2 - 11y^2 = 10 \end{cases}$

7. $\begin{cases} |xy| = 24 \\ x + y = 10 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x - |y + 1| = 1 \\ x^2 + y = 10 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2 + 3xy = 54 \\ xy + 4y^2 = 115 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 = 4 \\ x^2 + 2x + 1 = y^2 \end{cases}$

11. Wyznacz wartości parametru m, dla których układ równań

$$\begin{cases} x - y = (1 + xy)m \\ 2 + x + y + xy = 0 \end{cases}$$

ma rozwiązania.

12. Zbadaj, dla jakich wartości parametru a istnieje dokładnie jedna para liczb (x, y) spełniająca warunki

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x \leqslant 1 \\ x - y + a = 0 \end{cases}$$

Rozwiąż układy równań

13. $\begin{cases} x(x + y) = 3 \\ x(x + z) = 1 \\ x(y + z) = 2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + xy + y = 1 \\ y + yz + z = 2 \\ z + zx + x = 3 \end{cases}$

15. $\begin{cases} (x + y)z + x^2 = -3 \\ (y + z)x + y^2 = 0 \\ (z + x)y + z^2 = 3 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3xy = 5(x + y) \\ 2xz = 3(x + z) \\ yz = 4(y + z) \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y + z} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z + x} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x + y} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ xy + yz + zx = 3 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^2 + yz = y + z \\ y^2 + xz = x + z \\ z^2 + xy = x + y \end{cases}$

20. $\begin{cases} y^2 + yz + z^2 = 19 \\ z^2 + zx + x^2 = 28 \\ x^2 + xy + y^2 = 37 \end{cases}$

21. Niech $n \in \mathbb{N}$. Rozwiąż układ równań (zakładamy, że $x_{n+k} = x_k$)

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4 \\ x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_5 \\ \dots \\ x_n^2 + x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 = x_{n+3} \end{cases}$$

22. Niech $n \in \mathbb{N}$. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} (x_1 + x_2)^2 = x_3 \\ (x_2 + x_3)^2 = x_4 \\ \dots \\ (x_{n-2} + x_{n-1})^2 = x_n \\ (x_{n-1} + x_n)^2 = x_1 \\ (x_n + x_1)^2 = x_2 \end{cases}$$

23. Rozwiąż w liczbach dodatnich układ równań

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{1}{x_2} = 4 \\ x_2 + \dfrac{1}{x_3} = 1 \\ x_3 + \dfrac{1}{x_4} = 4 \\ x_5 + \dfrac{1}{x_6} = 1 \\ \dots \\ x_{99} + \dfrac{1}{x_{100}} = 4 \\ x_{100} + \dfrac{1}{x_1} = 1 \end{cases}$$

# Analiza - klasa 2a		Zestaw 9.		2.11.2021

Liczby niewymierne

1. Udowodnij, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ jest niewymierna.

2. Niech $k, n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że liczba $\sqrt[k]{n}$ jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba naturalna m taka, że $n = m^k$.

3. Dane są różne liczby rzeczywiste a, b takie, że liczby $a-b$ i $\dfrac{a}{b}$ są wymierne. Wykaż, że liczby a i b też są wymierne.

4. Liczby a^5 i a^7 są wymierne. Udowodnij, że liczba a jest wymierna.

5. Dana jest liczba $t \in \mathbb{R}$ taka, że liczby $\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ i $\dfrac{2t}{t^2+1}$ są wymierne. Udowodnij, że liczba t jest wymierna.

6. Dane są liczby wymierne a, b takie, że $a+b \neq 0$ i liczba $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ jest wymierna. Udowodnij, że liczby $\sqrt[3]{a}$ i $\sqrt[3]{b}$ są wymierne.

7. Dane są trzy różne liczby wymierne a, b, c. Udowodnij, że liczba

$$\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}$$

jest wymierna.

8. Usuń niewymierność z mianownika ułamka:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}$,
(b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+3\sqrt{6}}$,
(c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+2\sqrt{7}}$,
(d) $\dfrac{1}{4\sqrt{3}-2\sqrt{5}}$,
(e) $\dfrac{1}{1+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{10}}$,
(f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$,
(g) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+1}$,
(h) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}$,
(i) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}}$,
(j) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$,
(k) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$,
(l) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{4}-2\sqrt[4]{6}+2\sqrt[4]{9}}$,
(m) $\dfrac{1}{1+2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}}$

9. Liczby x, y, z i $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ są wymierne. Udowodnij, że liczby $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ są wymierne.

10. Liczba rzeczywista x spełnia równanie $x^5+x=10$. Udowodnij, że x jest niewymierna.

11. Rozstrzygnij, czy podana liczba jest wymierna:

(a) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-2$,
(b) $\sqrt{32-10\sqrt{7}}-\sqrt{7}$,
(c) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$,
(d) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$,
(e) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$,
(f) $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

12. Wykaż, że jeśli liczba postaci $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$, jest wymierna, to $a=b=0$.

13. Czy istnieją trzy punkty płaszczyzny o współrzędnych postaci $a+b\sqrt[3]{2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$, o własności, że co najmniej jedna z odległości dowolnego punktu płaszczyzny od jednego z tych punktów jest liczbą wymierną?

14. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Wykaż, że liczba

$$\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\ldots+\sqrt[n-1]{n-1+\sqrt[n]{n}}}}$$

jest niewymierna.

15. Wykaż, że jeśli liczba rzeczywista $x \neq 0$ jest postaci

$$x = a+b\sqrt{2}, \qquad \text{gdzie } a, b \in \mathbb{Q},$$

to liczba $1/x$ też jest takiej postaci.

16. Wyznacz wszystkie liczby wymierne postaci

$$x = a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}, \qquad \text{gdzie } a, b, c \in \mathbb{Q} \qquad (1)$$

Wykaż, że jeśli liczba rezcywista $x \neq 0$ jest postaci (1), to liczba $1/x$ też jest takiej postaci.

Zasada szufladkowa

Twierdzenie 1. Niech $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $n+1$ przedmiotów rozmieszczamy w n szufladach, to w jednej z szuflad znajdą się co najmniej 2 przedmioty.

Twierdzenie 2. Niech $k, n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $kn + 1$ przedmiotów rozmieszczamy w n szufladach, to w jednej z szuflad znajdzie się co najmniej $k + 1$ przedmiotów.

---

1. Na przyjęciu jest $n \geqslant 2$ gości. Udowodnij, że pewne dwie osoby mają taką samą liczbę znajomych wśród osób będących na przyjęciu.

2. W każde pole tabeli $n \times n$ wpisano jedną z liczb $-1, 0, 1$, a następnie dodano do siebie liczby z każdego wiersza, z każdej kolumny i z każdej z przekątnych. Udowodnij, że pewne 2 z otrzymanych sum są równe.

3. Udowodnij, że każdy zbiór składający się z n różnych liczb całkowitych zawiera niepusty podzbiór, którego suma elementów jest podzielna przez n.

4. Na płaszczyźnie wybrano 5 punktów kratowych. Wykaż, że 2 z nich są końcami odcinka, którego środek jest punktem kratowym.

5. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ wybrano $n+1$ róznych liczb. Wykaż, że z tych $n+1$ liczb można wybrać trzy liczby a, b, c (nie muszą być parami różne) takie, że $a = b + c$.

6. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ wybrano $n + 1$ liczb. Udowodnij, że jedna z wybranych liczb jest dzielnikiem innej.

7. Liczba naturalna n nie jest podzielna przez 2 i 5. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele wielokrotności liczby n, których zapis dziesiętny składa się z samych cyfr 1.

8. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba zapisana w systemie dziesiętnym przy pomocy zer i jedynek, która dzieli się przez n.

9. Liczby od 1 do 101 zapisano w dowolnej kolejności. Wykaż, że można skreślić 90 z nich tak, że pozostałe 11 będzie ustawione w porządku rosnącym lub malejącym.

10. Udowodnij, że każdy wielościan wypukły ma co najmniej 2 ściany o tej samej liczbie boków.

11. Wybrano 20 różnych liczb naturalnych mniejszych od 70. Wykaż, że wśród wszystkich różnic par tych liczb są co najmniej 4 równe.

12. W trójkącie równobocznym o boku 4 rozmieszczono 17 punktów. Udowodnij, że odległość pewnych dwóch z nich nie przekracza 1.

13. Każdy punkt na okręgu pomalowano jednym z dwóch kolorów. Udowodnij, że pewien trójkąt równoramienny wpisany w ten okrąg ma wszystkie wierzchołki tego samego koloru.

14. Wewnątrz kwadratu o polu 1 znajduje się 9 punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Udowodnij, że pewne 3 z tych punktów są wierzchołkami trójkąta o polu nie większym niż $\frac{1}{8}$.

15. Wewnątrz kwadratu o polu 1 obrano 51 punktów. Wykaż, że pewne 3 z nich leżą w kole o promieniu $\frac{1}{7}$.

16. Każde dwa wierchołki sześciokąta foremnego połączono odcinkiem zielonym lub czerwonym. Wykaż, że pewne trzy wierzchołki tego sześciokąta są wierzchołkami trójkąta o bokach tego samego koloru.

17. Każde dwa wierzchołki 17-kąta foremnego połączono odcinkiem pomalowanym na jeden z trzech kolorów. Wykaż, że pewne trzy odcinki tego samego koloru są bokami trójkąta.

18. Zapis dziesiętny liczby wymiernej $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NWD}(p, q) = 1$, jest ułamkiem okresowym. Wykaż, że okres tego ułamka wynosi co najwyżej $q - 1$.

19. **Tw. Dirichleta.** Liczba x jest niewymierna. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją liczby całkowite p, q takie, że $1 \leqslant q \leqslant n$ oraz

$$|xq - p| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Analiza - klasa 2a   Zestaw 11.   30.11.2021

Kombinatoryka I

Niech A będzie zbiorem skończonym. *Moc zbioru* A jest to liczba jego elementów. Moc zbioru A zapisujemy jako $|A|$ lub $\overline{\overline{A}}$.

Reguła dodawania. Jeżeli zbiory skończone $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są parami rozłączne, to

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Reguła mnożenia. $A_1, A_2, \ldots, A_k$ to zbiory skończone. Liczba różnych ciągów k-elementowych $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ takich, że $a_j \in A_j$ dla $j = 1, 2, \ldots, k$ wynosi

$$|A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|.$$

Tw. Zbiory A i B są skończone. Wówczas

- $|A| = |B|$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bijekcja $f : A \to B$.
- $|A| \geqslant |B|$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje surjekcja $f : A \to B$.
- $|A| \leqslant |B|$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje injekcja $f : A \to B$

---

1. Numer dowodu osobistego składa się z trzech liter i sześciu cyfr. Ile różnych dowodów osobistych można wydać?

2. Ile jest różnych liczb czterocyfrowych, mających tą samą cyfrę setek i jedności?

3. Ile jest różnych liczb pięciocyfrowych o nie powtarzających się cyfrach?

4. W urnie znajdują się cztery kule oznaczone numerem 1 i jedna oznaczona numerem 5. Z tej urny losujemy kolejno bez zwracania trzy kule zapisując ich numery według kolejności losowania. Ile różnych liczb czterocyfrowych możemy otrzymać?

5. Ile różnych dzielników naturalnych ma liczba 17 640?

6. Ile jest liczb sześciocyfrowych, których cyfry należą do zbioru $\{1, 2, 3\}$

(a) większych od 230000,

(b) których kolejne cyfry różnią się o 1,

(c) które są większe od 230000 i ich kolejne cyfry różnią się o 1;

(d) które są większe od 230000 lub ich kolejne cyfry różnią się o 1.

7. Ile jest zgodnych z regułami gry w szachy ustawień na szachownicy 8×8 dwóch króli?

8. Ile jest możliwych ustawień na szachownicy dwóch hetmanów tak, aby jeden nie zagrażał drugiemu?

9. Zbiory $|A|$ i $|B|$ są skończone, $|A| = k$, $|B| = n$.

(a) Ile jest funkcji $f : A \to B$?

(b) Ile jest injekcji $f : A \to B$?

(c) Ile jest bijekcji $f : A \to B$?

10. Ile jest surjekcji ze zbioru 4 elementowego na zbiór 3 elementowy?

11. Dla danego zbioru A symbolem $\mathcal{P}(A)$ oznaczamy zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A. Ile elementów ma zbiór $\mathcal{P}(A)$, jeżeli zbiór A ma n elementów?

12. Zbiór A jest niepusty i skończony. Udowodnij, że

(a) A ma tyle samo podzbiorów o parzystej i o nieparzystej liczbie elementów.

(b) Dla dowolnego elementu $a \in A$, zbiór A ma tyle samo podzbiorów zawierających a i nie zawierających a.

13. Udowodnij, że spośród dowolnych $2^{n-1} + 1$ różnych podzbiorów zbioru n-elementowego zawsze można wybrać dwa podzbiory rozłączne.

14. Niech $n \in \mathbb{N}$. Jakich podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ jest więcej: tych, których suma elementów jest parzysta, czy tych, których suma elementów jest nieparzysta?

15. Na ile sposobów można wybrać 2 rozłączne podzbiory zbioru n-elementowego?

16. Ile podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ nie zawiera dwóch kolejnych liczb?

17. Zbiór A ma n elementów, $B_j \subset A$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$, to różne podzbiory zbioru A, przy czym każde trzy z tych podzbiorów mają niepustą część wspólną. Udowodnij, że istnieje element należący do każdego ze zbiorów B_j.

18. $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ to różne podzbiory zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Przyjmijmy, że $A_{2n+1} = A_1$. Znajdź największą możliwą wartość sumy

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{|A_k \cap A_{k+1}|}{|A_k| \cdot |A_{k+1}|}.$$

19. Funkcja $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ma własność:

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad f(A) \subset f(B).$$

Udowodnij, że istnieje podzbiór $C \subset \mathbb{N}$ taki, że $f(C) = C$.

Kombinatoryka II

Wariacją k-wyrazową z powtórzeniami zbioru A nazywamy każdą funkcję odwozorowującą zbiór $\{1, 2, \ldots, k\}$ w zbiór A. Każdą taką funkcję można wzajemnie jednoznacznie utożsamić z ciągiem długości k o wyrazach ze zbioru A.

Tw. 1. Liczba k-wyrazowych z powtórzeniami zbioru n-elementowego wynosi n^k.

Wariacją k-wyrazową bez powtórzeń zbioru A nazywamy każdą injekcję (funkcję różnowartościową) odwzorowującą zbiór $\{1, 2, \ldots, k\}$ w zbiór A. Każdą taką funkcję można wzajemnie jednoznacznie utożsamić z ciągiem długości k o różnych wyrazach ze zbioru A.

Tw. 2. Liczba wariacji k-wyrazowych bez powtórzeń zbioru n-elementowego wynosi $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ jeśli $n \geqslant k$ i 0 jeśli $n > k$.

Permutacją zbioru n-elementowego A nazywamy każdą bijekcję odwzorowującą zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$ na zbiór A. Każdą taką bijekcję można wzajemnie jednoznacznie utożsamić z pewnynm ustawieniem wszystkich elementów zbioru A w ciąg długości n.

Tw. 3. Liczba permutacji zbioru n-elementowego wynosi $n!$.

Niech $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $k \leqslant n$. *Kombinacją k-elementową zbioru n-elementowego A* nazywamy każdy k-elementowy podzbiór zbioru A.

Dla liczb $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiujemy *symbol Newtona* (*symbol dwumienny*) jako: gdy $n \geqslant k$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

natomiast gdy $n < k$ przyjmujemy, że $\binom{n}{k} = 0$.

Tw. 4. Niech $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $k \leqslant n$. Liczba k-elementowych kombinacji (czyli k-elementowych podzbiorów) zbioru n-elementowego jest równa $\binom{n}{k}$.

---

1. Ile jest ciągów długości 4 o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 15\}$ takich, że

(a) liczba 4 jest jednym z wyrazów ciągu?

(b) pewna liczba występuje w ciągu dokładnie dwukrotnie?

(c) pewna liczba występuje w ciągu co najmniej dwukrotnie?

2. Ile różnych liczb trzycyfrowych można utworzyć z cyfr $1, 2, 3, 4, 5, 6$, jeżeli

(a) cyfry mogą się powtarzać?

(b) cyfry nie mogą się powtarzać?

(c) cyfry mogą się powtarzać i 1 musi wystąpić co najmniej raz?

(d) cyfry mogą się powtarzać i liczba musi być większa od 400?

(e) cyfry nie mogą się powtarzać i liczba musi być większa od 400?

3. (a) Ile jest różnych ustawień 9 osób w szereg takich, że wybrane 3 osoby stoją jedna po drugiej?

(b) Niech $k, n \in \mathbb{N}$ i $k < n$. Ile jest różnych istawień n osób w szereg takich, że wybrane k osób stoi jedna po drugiej?

4. Ile jest różnych sposobów posadzenia n osób przy okrągłym stole? Dwa usadzenia uznajemy za takie same, jeżeli w obu każda osoba ma tych samych sąsiadów.

5. Na płaszczyźnie dany jest prostokąt (kwadrat) $ABCD$. Ile jest bijekcji P zbioru punktów $\{A, B, C, D\}$ takich, że $P(A)P(B)P(C)P(D)$ też jest prostokątem (kwadratem).

6. Punkty $A_1, A_2, \ldots, A_6$ na płaszczyźnie są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta formenego H. Niech $B = \{A_1, A_2, \ldots, A_6\}$.

(a) Ile jest bijekcji P zbioru B takich, że jeśli punkty A_i, A_j, A_k są wierzchołkami trójkąta foremnego, to punkty $P(A_i), P(A_j), P(A_k)$ też są wierzchołkami trójkąta foremnego.

(b) Czy każda bijekcja P opisana w podpunkcie (a) ma własność: punkty $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_6)$ są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta H?

(c) Bijekcja P zbioru A ma własność: dla dowolnych różnych punktów A_i, A_j, A_k trójkąty $A_iA_jA_k$ i $P(A_i)P(A_j)P(A_k)$ są przystające (uwzględniając kolejność wierzchołków). Czy punkty $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_6)$ są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta H?

7. W mieście o $n+1$ mieszkańcach jedna osoba powtarza plotkę drugiej, która z kolei powtarza ją trzeciej, itd. Za każdym razem plotka jest powtarzana jednej z n dostępnych osób. Wyznacz, ile jest różnych dróg rozprzestrzeniania się plotki takich, że plotka zostanie powtórzona k razy i

(a) nie wróci do osoby, która ją zapoczątkowała,

(b) nie zostanie powtórzona dwa razy tej samej osobie.

8. Udowodnij następujące własności symbolu Newtona:

(i) Jeżeli $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $k \leqslant n$, to

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

(ii) Jeżeli $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $1 \leqslant k \leqslant n$, to

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

(iii) Jeżeli $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, to

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Trójkąt Pascala. Wartości symbolu Newtona $\binom{n}{k}$ można dla niezbyt dużych n łatwo wyznaczyć za pomocą tzw. trójkąta Pascala. Jest to trójkątna tabela, której wiersze odpowiadają kolejnym wartościom n, tworzona w następujący sposób:

$$\begin{array}{r|ccccccccccc}
n=0 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
n=1 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
n=2 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
n=3 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
n=4 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
n=5 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Liczby w kolejnym wierszu uzyskujemy z poprzedniego za pomocą tożsamości (ii).

---

9. Spośród uczniów klasy 2a należy wytypować czteroosobowy samorząd. Na ile sposobów można to zrobić? Na ile sposobów można wytypować czteroosobowy samorząd tak, aby należała do niego co najmniej jedna dziewczyna i co najmniej jeden chłopak?

10. Wyznacz liczbę ciągów (a_1, a_2, a_3, a_4) takich, że $a_i \in \mathbb{N}$ oraz $a_1+a_2+a_3+a_4 = 10$.

11. Na płaszczyźnie danych jest 14 prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Ile jest trójkątów, których boki należą do tych prostych?

12. Ile różnych prostokątów można utworzyć z pól szachownicy 8×8?

13. Ile jest permutacji zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 31\}$ takich, że iloczyn każdych dwóch sąsiednich liczb jest parzysty?

14. Na ile sposobów można wypełnić kupon totolotka (zakreślamy 6 liczb od 1 do 49) tak, że zakreślone zostaną co najmniej 2 kolejne liczby?

15. Na ile sposobów można posadzić na 25 miejscowej ławie 10 panów i 15 pań tak, aby między każdymi dwoma panami siedziała co najmniej jedna pani?

16. Na ile sposobów można podzielić zbiór 12 elementowy na 6 rozłącznych podzbiorów 2-elementowych?

17. Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą.
(a) Ile jest różnych dzielników naturalnych liczby $p_1 p_2 \ldots p_n$?
(b) Ile jest par względnie pierwszych dzielników liczby $p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$?

18. Na ile sposobów można rozmieścić 9 studentów w 3 pokojach trzyosobowych, gdy
(a) każdy może dzielić pokój z każdym,
(b) pewnych dwóch studentów nie chce mieszkać razem,
(c) pewnych dwóch studentów chce mieszkać razem?

19. Niech $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$ i $1 < k < n-1$. Na ile sposobów można wybrać ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ cztery liczby tak, aby wśród nich była liczba k i dokładnie jedna liczba mniejsza od k?

20. Niech $n, k \in \mathbb{N}$ i $k \leqslant n$. Udowodnij tożsamość

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

(a) algebraicznie, przekształcając lewą i / lub prawą stronę równości;
(b) kombinatorycznie, rozważając, na ile sposobów można z n osób wybrać k osobowy zespół z liderem.

21. Dany jest zbiór n-elementowy A i jego m-elementowy podzbiór B. Ile jest podzbiorów zbioru A niezawierających się w B i nierozłącznych z nim?

22. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij tożsamość

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}.$$

Postaraj się znaleźć dowód kombinatoryczny.

23. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że liczba ciągów m-wyrazowych $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ takich, że $a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = n$ wynosi $\displaystyle\binom{m+n-1}{m-1}$.

Wzór dwumianowy Newtona

Twierdzenie (dwumian Newtona). Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i liczby naturalnej n prawdziwy jest wzór

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}.$$

Uwaga: Wzór ten jest nazywany dumianem Newtona lub wzorem dwumianowym Newtona. Dla $n = 2, 3$ dostajemy znane wzory skróconego mnożenia na kwadrat i sześcian sumy.

Dla niewielkich n współczynniki $\binom{n}{k}$ pojawiające się we wzorze łatwo wyznaczyć za pomocą trójkata Pascala.

Jeśli zamiast b w dwumianie Newtona weźmiemy $-b$, to otrzymamy wzór

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}(-1)^{n-k}.$$

---

1. Rozwiń wyrażenia:

(a) $(a+b)^5$, (b) $\left(2a - \frac{1}{2}b\right)^6$, (c) $(a+b+c)^4$.

2. Znajdź liczby całkowite a i b takie, że

$$\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^5 = a + b\sqrt{2}.$$

3. Korzystając ze wzoru Newtona udowodnij tożsamości

(a) $2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$, (b) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$.

4. Uprość sumy:

(a) $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$, (c) $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$,

(b) $\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}$, (d) $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}4^{n-k}$.

5. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

jest całkowita i parzysta.

6. Dla jakich liczb naturlanych n liczby

(a) $\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$, (b) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^n + \left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^n$,

są wymierne?

7. Udowodnij wzór dwumianowy Newtona za pomocą zasady indukcji.

8. Udowodnij tożsamości za pomocą wzoru dwumianowego:

(a) $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}ka^k b^{n-k} = na(a+b)^{n-1}$

(b) $\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)a^k b^{n-k} = n(n-1)a^2(a+b)^{n-2}$

9. „Uprość” sumy

(a) $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2 a^k b^{n-k}$,

(b) $\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)(k-2)a^k b^{n-k}$.

10. Liczba naturalna n jest nieparzysta i $a \in \mathbb{R}$. Wykaż, że

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((a-1)^k + (-1)^k\cdot(a+1)^k\right) = 0.$$

11. Niech $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Załóżmy, że liczby naturalne a_n i b_n spełniają równość

$$a_n + b_n\sqrt{2} = \left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}.$$

(a) Wykaż, że $a_n - b_n\sqrt{2} = \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+1}$.
(b) Wykaż, że liczby a_n i b_n są nieparzyste.
(c)* Udowodnij, że dla każdego $n > 1$ liczba b_n^2 jest sumą kwadratów dwóch liczb naturalnych.

12. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $a, b, c \in \mathbb{R}$. Udowodnij „wzór trójmianowy Newtona”:

$$(a+b+c)^n = \sum_{k,l,m}\frac{n!}{k!\,l!\,m!}a^k b^l c^m,$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich trójkach liczb całkowitych nieujemnych (k, l, m) takich, że $k + l + m = n$. Ile wyrazów jest w tej sumie?

Analiza - klasa 2a Zestaw 14. 11.01.2022

Kombinatoryka III

1. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

$$\binom{2n}{0} < \binom{2n}{1} < \ldots < \binom{2n}{n} \quad \text{i} \quad \binom{2n+1}{0} < \binom{2n+1}{1} < \ldots < \binom{2n+1}{n}.$$

2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij tożsamości

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}$, $n, m \in \mathbb{N}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} 2^{n-k} = 2^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=r}^{m} \binom{m}{k}\binom{k}{r}(-1)^k = 0$, $m, r \in \mathbb{N}$, $m > r$

3. Liczba p jest pierwsza. Wykaż, że

(a) $p \mid \binom{p}{k}$ dla $k = 1, 2, \ldots, p-1$, (b) $p^2 \mid \binom{2p}{p} - 2$.

4. Dla danej liczby naturalnej n wyznacz liczbę ciągów o wyrazach równych 1 lub 2, których suma wynosi n.

5. Niech F_n oznacza n-tą liczbę Fibonacciego (czyli $F_1 = F_2 = 1$ i $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$). Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\sum_{k=1}^{n} F_k \binom{n}{k} = F_{2n}.$$

6. Udowodnij, że dla ustalonego n liczba nieparzystych symboli Newtona postaci $\binom{n}{k}$ jest potęgą liczby 2.

7. Niech $k, m \in \mathbb{N}$. Ile jest ciągów $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ takich, że liczby $a_1, a_2, \ldots, a_k$ są całkowite i $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k \leqslant m$?

8. Niech $n, k \in \mathbb{N}$. Filemon i Bonifacy zapisują ciągi liczb całkowitych:

- Filemon zapisuje wszystkie ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ takie, że
$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \leqslant k.$$
- Bonifacy zapisuje wszystkie ciągi $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ takie, że
$$|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_k| \leqslant n.$$

Udowodnij, że obaj zapiszą tyle samo ciągów.

9. Udowodnij **wzór włączeń i wyłączeń:** Zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mają skończenie wiele elementów. Wówczas

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$
$$- \sum_{1 \leqslant i < j < k < l \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| + \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

10. Ile jest liczb naturalnych mniejszych niż 10 000 i podzielnych przez 2 lub 3 lub 5?

11. Ile liczb czterocyfrowych jest podzielnych przez 5 lub 9 lub 15?

12. Ile jest liczb 6-cyfrowych, których zapis dziesiętny wykorzystuje dokładnie 3 cyfry?

13. Wyznacz liczbę surjekcji ze zbioru n-elementowego na zbiór p-elementowy.

14. Permutację $p = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ nazywamy *nieporządkiem* (ang. *derangement*) jeżeli $a_k \neq k$ dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$. Wykaż, że liczba wszystkich nieporządków zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ jest równa

$$n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

15. Znajdź wzór na liczbę ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, w których każda liczba wystąpi dokładnie 2 razy i każde dwa sąsiednie wyrazy są różne.

16. Na ile sposobów można wypełnić tabelę o m wierszach i n kolumnach liczbami 0 i 1 tak, aby w żadnym wierszu i żadnej kolumnie nie było samych zer?

17. (IMO 1989) Powiemy, że permutacja $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ jest *miła*, jeżeli dla co najmniej jednego i zachodzi $|x_1 - x_{i+1}| = n$. Udowodnij, że dla każdego n więcej niż połowa wszystkich permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ jest miła.

18. Zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mają skończenie wiele elementów. Udowodnij wzór

$$|A_1 \triangle A_2 \triangle A_3 \triangle \ldots \triangle A_n| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| - 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| +$$
$$4 \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - 8 \sum_{1 \leqslant i < j < k < l \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l|$$
$$+ \ldots + (-1)^{n+1} 2^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Analiza - klasa 2a Zestaw 15. 18.1.2022

Powtórzenie

1. Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ wybrano $n+1$ liczb. Udowodnij, że pewne dwie z nich są względnie pierwsze.

2. Wybrano 16 liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 30\}$. Wykaż, że pewne dwie różnią się o 3.

3. Liczby a, b, c, d są całkowite. Wykaż, że iloczyn

$$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

jest podzielny przez 12.

4. W każde pole szachownicy o wymiarach 10×10 wpisano liczbę ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 10\}$ w taki sposób, że liczby na polach mających wspólny bok lub wierzchołek są względnie pierwsze. Udowodnij, że pewną liczbę wpisano w co najmniej 17 pól.

5. Udowodnij, że ze zbioru 102 różnych liczb całkowitych można wybrać dwie, których suma lub różnica dzieli się przez 200.

6. Każde pole tabeli o 2 wierszach i 10 kolumnach kolorujemy jednym z 10 kolorów. Ile jest pokolorowań tabeli takich, że pola w każdym wierszu są różnych kolorów?

7. Oblicz, na ile sposobów można zapisać w jednym rzędzie cyfry 0, 1, 2, ..., 9 tak, aby

(a) 0 i 1 występowały obok siebie,

(b) 0 i 1 nie występowały obok siebie,

(c) 0, 1 i 2 nie występowały obok siebie,

(d) ani 0 i 1, ani 8 i 9 nie występowały obok siebie.

8. Na ile sposobów można wybrać 4 uczniów z 2 klas liczących 28 osób tak, aby z każdej klasy został wybrany przynajmniej jeden uczeń?

9. Na ile sposobów można 28 osobową klasę podzielić na 7 - osobowe drużyny oznaczone kolorami niebieskim, zielonym, czerwonym i żółtym?

10. Ile jest ciągów składających się z

(a) m zer i n jedynek,

(b) k zer, l jedynek i m dwójek.

11. W turnieju tenisowym bierze udział $2n$ tenisistów. W 1. rundzie ma być rozgrywanych jednocześnie n pojedynków. Na ile sposobów można podzielić wszystkich tenisistów na n par przeciwników?

12. Z talii 52 kart wyjęto 10 kart. W ilu przypadkach wśród tych kart znajdą się

(a) co najmniej jeden as,

(b) dokładnie jeden as,

(c) co najmniej dwa asy,

(d) dokładnie dwa asy.

13. Wyznacz liczbę ciągów (a, b, c, d) takich, że $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ oraz

$$3a + 3b + 3c + d = 300.$$

14. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz liczbę ciągów długości n o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$, w których liczba 0 występuje (a) parzystą, (b) nieprarzystą ilość razy.

15. Ile jest n-cyfrowych liczb naturalnych, których cyfry w systemie dziesiętnym tworzą ciąg niemalejący?

16. Niech $n \in \mathbb{N}$. Oblicz sumę

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!(n+k)!}$$

17. Niech $n \in \mathbb{N}$. Oblicz sumę

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} 2^k.$$

18. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $\lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor$ jest nieparzysta.

Analiza - klasa 2a Zestaw 16. 25.01.2022

Ciąg arytmetyczny

Ciągiem liczbowym nieskończonym nazywamy funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ lub $f : \{k, k+1, k+2, \ldots\} \to \mathbb{R}$ (gdzie $k \in \mathbb{R}$). Wyrazy ciągu to liczby $a_n = f(n)$. Ciąg nieskończony zapisujemy wówczas jako $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n=k}^{\infty}$, $(a_n)_{n\geqslant k}$, $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$.

Jeżeli dziedzina funkcji f jest znana, piszemy $(a_n)_n$ lub po prostu (a_n).

Definicja. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{m}$ (gdzie $m > n$ lub $m = \infty$) jest *ciągiem (postępem) arytmetycznym* jeżeli istnieje liczba d taka, że dla każdego n zachodzi $a_{n+1} = a_n + d$. Liczbę d nazywamy wówczas *przyrostem* lub *różnicą* ciągu (a_n).

Tw. 1. Niech $(a_n)_{n=1}^{m}$,gdzie $m \in \mathbb{N}$ i $m > 2$ lub $m = \infty$, będzie ciągiem liczbowym. Następujące warunki są równoważne:

(i) Ciąg $(a_n)_n$ jest arytmetyczny.

(ii) Dla każdego n takiego, że $1 < n < m$.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

(iii) Dla każdego $n \geqslant 1$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Tw. 2. Jeżeli $(a_n)_n$ jest ciągiem arytmetycznym z przyrostem d, to dla $k \geqslant 1$ zachodzi $a_k = a_1 + (k-1)d$ oraz

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

---

1. Między liczby 1 i 257 wstaw takie liczby x, y, z, aby ciąg $(1, x, y, z, 257)$ był arytmetyczny.

2. Oblicz sumę pierwszych stu liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 11 dają resztę 7.

3. Znajdź postęp arytmetyczny, którego suma pierwszych n wyrazów wynosi (a) n^2, (b) $3n^2 - 2n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

4. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ pierwiastki wielomianu $x^4 - (3\alpha+2)x^2 + \alpha^2$ tworzą ciąg arytmetyczny?

5. Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest arytmetyczny. Wykaż, że ciąg o wyrazach (a) $a_n = x_{n+1}^2 - x_n^2$, (b) $b_n = x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+r}$, gdzie $r \in \mathbb{N}$ jest ustalone, też jest ciągiem arytmetycznym.

6. Wykaż, że ciąg liczbowy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, który nie jest stały, jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego trójmianu kwadratowego f i każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = f(n).$$

7. Niech $S_n$oznaczaja sumę początkowych n wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego. Udowodnij, że $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$

8. Wyrazy ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ są różne od 0. Wykaż, że (a_n) jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}.$$

9. Ciąg arytmetyczny $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ma wszystkie wyrazy dodatnie. Udowodnij, że dla każdego n

$$\sqrt{a_1a_n} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

10. W pewnej rodzinie każde z pięciorga dzieci dostaje na urodziny, począwszy od piątych, tyle książek, ile w danym dniu kończy lat. Liczby wyrażające wiek dzieci tworzą ciąg arytmetyczny o przyroście 3. Zbiór książek wszystkich dzieci składa się z 325 tomów. Ila lat ma każde z dzieci?

11. Miary kątów pewnego wielokąta tworzą ciąg arytmetyczny. Najmniejszy z nich ma miarę $119°$, największy $169°$. Ile boków ma wielokąt?

12. Pola kwadratowych kartek papieru tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym pierwsza ma pole równe $12\,\mathrm{cm}^2$, a piąta $30\,\mathrm{cm}^2$. Kartki pocięto na kawałki, z których ułożono kwadrat o boku 21 cm. Ile było kartek?

13. Ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny. Wykaż, że $3(a^2+b^2+c^2) = 6(a-b)^2+(a+b+c)^2$.

14. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$. Wykaż, że ciąg (a^2, b^2, c^2) jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $\left(\frac{1}{b+a}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{c+b}\right)$ jest arytmetyczny.

15. Wyrazy nieskończonego ciągu arytmetycznego są liczbami naturalnymi i pewien wyraz tego ciągu jest kwadratem. Wykaż, że nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu jest kwadratami.

16. Zbiór liczb naturalnych podzielono na kilka nieskończonych ciągów arytmetycznych. Wykaż, że pierwszy wyraz jednego z tych ciągów jest podzielny przez jego przyrost.

17. Znajdź wszystkie ciągi arytmetyczne z przyrostem 6 składające się z 5 liczb pierwszych.

18. Czy istnieje nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny, którego wszystkie wyrazy są liczbami pierwszymi?

19. Dany jest rosnący ciąg arytmetyczny taki, że iloczyn dowolnych dwóch wyrazów tego ciągu też jest wyrazem tego ciągu. Wykaż, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi.

Ciąg geometryczny

Definicja. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=0}^{m}$ (gdzie $m \in \mathbb{N}$ lub $m = \infty$) jest *ciągiem (postępem) geometrycznym*, jeżeli $a_0 \neq 0$ i istnieje stała $q \neq 0$ taka, że dla każdego n zachodzi $a_{n+1} = qa_n$. Liczbę q nazywamy *ilorazem* ciągu (a_n).

Tw. Ciąg geometryczny $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ z ilorazem q

- jest rosnący, jeśli $a_0 > 0$ i $q > 1$ lub $a_0 < 0$ i $0 < q < 1$;
- jest malejący, jeśli $a_0 > 0$ i $0 < q < 1$ lub $a_0 < 0$ i $q > 1$;
- jest stały, jeśli $q = 1$;
- nie jest monotoniczny, jeśli $q < 0$.

Tw. Jeżeli $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem geometrycznym z ilorazem q, to dla $k \geqslant 0$ zachodzi $a_k = q^k \cdot a_0$ oraz, gdy $q \neq 1$

$$\sum_{j=0}^{k} a_k = a_0 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}.$$

---

1. Ciąg $(a_n)_n$ jest geometryczny. Wyznacz a_1 i iloraz tego ciągu, jeżeli
(a) $a_9 = 3$ i $a_4 = -3$, (b) $a_1 + a_3 + a_5 = 21$ i $a_3 - a_1 = 3$.

2. Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ o wyrazach dodatnich jest geometryczny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego n zachodzi $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$.

3. **Nierówność Euklidesa.** Liczby dodatnie a, b, c, d są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie $q \neq 1$. Udowodnij, że $a + d > b + c$.

4. Wyznacz liczby a, b, c, d takie, że ciąg (a, b, c, d) jest geometryczny, $a+b+c+d = 130$ i $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 5044$.

5. Ciąg (a, b, c, d) jest geometryczny, $a + d = 10$, $ad = 7$. Oblicz $b^3 + c^3$.

6. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest geometryczny i ma wyrazy dodatnie, $\alpha, \beta > 0$, $m \geqslant n$ oraz $a_{m+n} = \alpha$, $a_{m-n} = \beta$. Oblicz a_m.

7. Boki trójkąta prostokątnego tworzą postęp geometryczny. Znajdź iloraz tego postępu.

8. Boki trójkąta tworzą postęp geometryczny. W jakim przedziale może się zmieniać iloraz tego postępu?

9. Ciąg $(a_n)_n$ jest geometryczny i $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Udowodnij, że $S_n \cdot (S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.

10. Ciąg $(a_n)_n$ jest geometryczny, $a_j \neq 0$ dla każdego j, i $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Udowodnij, że

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = \frac{S_n}{a_1 \cdot a_n}.$$

11. Oblicz sumę $7 + 77 + 777 + \ldots + 77\ldots7$, gdzie ostatnia liczba składa się z n siódemek.

12. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest geometryczny z ilorazem q. Wyraź sumę $\sum_{k=1}^{n} ka_k$ przez a_1 i q.

13. Ciąg (a, b, c) jest geometryczny. Wykaż, że $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = abc(a^3 + b^3 + c^3)$.

14. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest geometryczny z ilorazem q i $P_n = a_0a_1\ldots a_n$. Wykaż, że $P_n = a_0^n q^{n(n-1)/2}$ oraz $P_n^2 = (a_0a_{n-1})^n$.

15. Oblicz sumę

$$\sum_{k=0}^{2020} \left\lfloor \frac{2^k}{3} \right\rfloor.$$

16. Dany jest ciąg liczbowy $(b_n)_{n=0}^{\infty}$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k, \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

i ciąg $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ jest geometryczny i nie jest stały. Wykaż, że ciąg $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ też jest geometryczny.

Ciągi arytmetyczne i geometryczne

1. Wyznacz liczby a, b, c, d takie, że ciąg (a, b, c, d) jest geometryczny, natomiast ciąg $(a+1, b+1, c+4, d+13)$ jest arytmetyczny.

2. Ciąg $(a_n)_n$ jest arytmetyczny i nie jest stały, $a_1 = 1$, oraz ciąg (a_2, a_5, a_{11}) jest geometryczny. Oblicz sumę pierwszych 2022 wyrazów ciągu (a_n).

3. Znajdź wszystkie pary liczb rzeczywistych α, β takie, że ciąg $(1, \alpha, \beta)$ jest arytmetyczny i ciąg $(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$ jest geometryczny.

4. W pewnym konkursie przyznano pewną liczbę nagród o łącznej wartości 1476 zł. Pierwsza nagroda wyniosła 500 zł, a każda kolejna stanowiła pewien stały ułamek poprzedniej. Ostatnia nagroda wyniosła 256 zł. Ile przyznano nagród i jakiej były wysoskości?

5. Wykaż, że każdy nieskończony ciągu arytmetycznego o wyrazach naturalnych zawiera nieskończony podciąg geometryczny.

6. **Tw. Bernoulliego.** Dane są ciągi arytmetyczny $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ i geometryczny $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ takie, że $0 < a_0 = b_0 < a_1 = b_1$. Udowodnij, że $a_n < b_n$ dla każdego $n \geqslant 2$.

7. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest arytmetyczny. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a_k = 0.$$

8. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest arytmetyczny. Wykaż, że istnieją ciągi arytmetyczny $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ i geometryczny $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ takie, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = b_n c_n.$$

9. Zbiór $A \subset \mathbb{Q}$ jest skończony. Wykaż, że istnieje ciąg arytmetyczny zawierający wszystkie liczby ze zbioru A.

10. Czy istnieje ciąg (a) arytmetyczny, (b) geometryczny, którego pewne trzy wyrazy to liczby $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$?

11. Podziel zbiór liczb naturalnych na dwa rozłączne podzbiory w taki sposób, że żaden z tych podzbiorów nie zawiera nieskończonego i rosnącego ciągu arytmetycznego.

12. Udowodnij, że iloraz ciągu geometrycznego o wyrazach naturalnych jest liczbą naturalną.

13. Udowodnij, że dla każdego $n \geqslant 3$ zbiór

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \ldots\right\}$$

zawiera wyrazy pewnego nie stałego ciągu arytmetycznego długości n. Wykaż, że zbiór A nie zawiera wyrazów nieskończonego nie stałego ciągu arytmetycznego.

14. Udowodnij, że cztery kolejne symbole Newtona

$$\binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}, \binom{n}{k+2}, \binom{n}{k+3}$$

nie tworzą postępu arytmetycznego.

15. Udowodnij, że nie istnieje 12 ciągów geometrycznych takich, że każda liczba ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ jest wyrazem jednego z tych ciągów.

Ciągi rekurencyjne I

Definicja. Mówimy, że ciąg liczb $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ jest *ciągiem liniowo rekurencyjnym rzędu 1*, jeżeli istnieją stałe a, b takie, że

$$x_{n+1} = ax_n + b, \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Jeżeli $a = 0$, to ciąg $(x_n)_n$ jest stały; jeżeli $a = 1$ to jest to ciąg arytmetyczny; jeżeli $b = 0$ to geometryczny.

Tw. 1. Jeżeli $a \neq 0, 1$ i $b \neq 0$ oraz $x_{n+1} = ax_n + b$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$, to

$$x_n = a^n \left(x_0 + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1}.$$

Definicja. Ciąg liczb rzeczywistych $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ spełniający równanie rekurencyjne

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n + r, \quad p, q, r \in \mathbb{R},\ q \neq 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

nazywamy *ciągiem liniowo rekurencyjnym rzędu 2*. Jeżeli dodatkowo $r = 0$, to nazywamy go *jednorodnym ciągiem liniowo rekurencyjnym rzędu 2*.

Tw. 2. Niech $(x_n)_n$ będzie jednorodnym ciągiem liniowo rekurencyjnym rzędu 2 (czyli $r = 0$). Równanie $\lambda^2 = p\lambda + q$ nazywamy *równaniem charakterystycznym* ciągu (x_n). Wówczas

(i) jeżeli równanie charakterystyczne ma 2 różne pierwiastki $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ to istnieją liczby $a, b \in \mathbb{R}$ takie, że $x_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$;

(ii) jeżeli równanie charakterystyczne ma 1 pierwiastek λ_1, to istnieją liczby $a, b \in \mathbb{R}$ takie, że $x_n = (a + bn)\lambda_1^n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

---

1. Znajdź jawny wzóry na n-ty wyraz ciągu:

(a) $x_0 = 0,\ x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n + 1$;

(b) $x_0 = -2,\ x_{n+1} = 3x_n - 2$;

(c) $f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$;

(d) $a_0 = 1, a_1 = 3, a_{n+2} = -a_{n+1} + 6a_n$;

(e) $x_0 = 2,\ x_1 = -3,\ x_{n+2} = 6x_{n+1} - 9x_n$;

(f) $y_0 = 0,\ y_1 = 20,\ y_{n+2} = -2y_{n+1} + 8y_n + 10$;

(g) $u_1 = 0, u_2 = 6,\ u_{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2}u_{n+1} + \frac{3n}{n+2}u_n$.

2. Ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ spełnia warunki $x_0 = \frac{1}{3}$ i $x_{n+1} = ax_n - \frac{1}{2}$. Dla jakich wartości $a > 0$ ciąg ten jest rosnący / malejący?

3. Ciągi $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ i $(y_n)_{n=0}^{\infty}$, gdzie $x_0 = \alpha$, $y_0 = \beta$, spełniają zależności

$$x_{n+1} = 2y_n + 1, \quad y_{n+1} = 2x_n - 3, \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Znajdź jawne wzory na x_n i y_n.

4. Wykaż, że każdy ciąg arytmetyczny jest jednorodnym ciągiem liniowo rekurencyjnym rzędu 2.

5. Na ile sposobów można pokryć prostokąt o wymiarach $2 \times n$ płytkami o rozmiarze (a) 2×1, (b) 2×1 i 2×2?

6. Wykaż, że nie istnieje ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ taki, że $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$, który ma wszystkie wyrazy dodatnie.

7. Ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zdefiniowany następująco: $x_0 = 0$ i $x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1}$. Wykaż, że ciąg $(x_n)_n$ jest jednorodnym ciągiem liniowo rekurencyjnym rzędu 2, znajdź jawny wzór na x_n i wykaż, że każdy wyraz ciągu x_n jest liczbą całkowitą.

8. Ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zdefiniowany następująco: $x_0 = 1$ i $x_{n+1} = 3x_n + \lfloor x_n\sqrt{5} \rfloor$. Wykaż, że $(x_n)_n$ jest jednorodnym ciągiem liniowo rekurencyjnym rzędu 2 i znajdź jawny wzór na x_n.

9. Ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ spełnia zależność rekurencyjną $x_{n+1} = x_n + b^{n+1}$, gdzie $b \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że nieskończenie wiele wyrazów ciągu x_n jest liczbami złożonymi.

10. Niech

$$a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} 2^k.$$

Udowodnij, że $(a_n)_n$ jest ciągiem liniowo rekurencyjnym rzędu 2 i znajdź jawny wzór na a_n.

11. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zadany następująco: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ oraz $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Wykaż, że $2^k \mid a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2^k \mid n$.

12. Wyznacz wszystkie funkcje $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ takie, że $f(0) = 0$ i

$$f(x) = 1 + 5f\left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right) - 6f\left(\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor\right).$$

13. Liczba rzeczywista $a \neq 0$ spełnia zależność $\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} = 1$. Udowodnij, że $\{a^n\} + \left\{\frac{1}{a^n}\right\} = 1$ dla każdej liczby naturalnej n.

Uwaga: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ oznacza część ułamkową liczby x.

14. Permutację p zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ nazywamy *inwolucją*, jeżeli $p(p(k)) = k$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Niech a_n oznacza liczbę takich inwolucji. Znajdź zależność rekurencyjną na a_n.

15. Niech $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = a_n + \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Udowodnij, że a_n jest kwadratem wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 2^k + k - 2$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.

Analiza - klasa 2a   Zestaw 20.   25.3.2022

Ciągi rekurencyjne II

1. Znajdź jawny wzór na n-ty wyraz ciągu:

(a) $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + na_n}$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$,

(b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 2^n$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$,

(c) $a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} + a_n + 3 \cdot 2^n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

2. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zdefiniowany przez warunki: $a_1 = a_2 = 1$ i $a_{n+2} = a_{n+1}a_n + 1$. Które wyrazy tego ciągu są (a) parzyste, (b) podzielne przez 4?

3. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia zależności

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2} \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Udowodnij, że $a_n > \sqrt[3]{3n}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

4. Niech $a_0 = 0$ i $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Udowodnij, że ciąg $(a_n)_n$ jest rosnący i $a_n < 3$ dla każdego n.

5. Niech $0 < a_0 \leqslant a_1 < 1$ i $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}$. Udowodnij, że ciąg $(a_n)_n$ jest rosnący i $a_n < 4$ dla każdego n.

6. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zdefioniowany przez warunki $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$ dla $n \geqslant 1$. Udowodnij, że dla każdego n prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_2 + 1} + \ldots + \frac{1}{a_n + 1} < 1.$$

7. Dla jakich wartości x_0 ciąg spełniający zależność rekurencyjną $x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$ jest rosnący?

8. Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zadany przez warunki $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 4$ oraz

$$x_{n+3} = 2x_{n+2} + 2x_{n+1} - x_n.$$

Udowodnij, że każdy wyraz tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.

9. Udowodnij, że każdy wyraz ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ określonego przez warunki

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}} \text{ dla } n = 2, 3, 4, \ldots$$

jest liczbą całkowitą.

10. Znajdź jawny wzórn na n-ty wyraz ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ takiego, że $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{3}$ oraz

$$a_{n+2} = \frac{a_n a_{n+1}}{3a_n + 4a_{n+1}}.$$

11. Ciąg liczb dodatnich $(x_n)_n$ spełnia równanie rekurencyjne

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}.$$

Udowodnij, że pewien wyraz tego ciągu jest liczbą niewymierną.

12. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ spełnia dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych $m \geqslant n$ zależność

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{a_{2m} + a_{2n}}{2}$$

oraz $a_1 = 1$. Wyznacz a_n.

13. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zadany przez warunki $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 289$ oraz

$$a_{n+3} = \frac{2022 + a_{n+1}a_{n+2}}{a_n} \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Udowodnij, że każdy wyraz tego ciągu jest liczbą całkowitą.

14. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zadany przez warunki $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$ oraz

$$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n.$$

Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba a_n jest podzielna przez n.

15. Dany jest ciąg rekurenycjny $(a_n)_{n=1}^{\infty}$: $a_1 = 1$ oraz

$$a_{2n} = a_n + 1, \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{a_{2n}}, \qquad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Udowodnij, że każda liczba wymierna dodatnia wystąpi w tym ciągu dokładnie jeden raz.

16. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunki: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ i dla $n \geqslant 2$

$$a_{n+1} = 2a_{n-1} \quad \text{lub} \quad a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}.$$

Udowodnij, że każdy wyraz tego ciągu jest postaci $2^k + 2^l$, gdzie k, l są liczbami całkowitymi nieujemnymi.

17. Dla $n \in \mathbb{N}$ niech F_n oznacza n-ty wyraz ciągu Fibonacciego (czyli $F_1 = F_2 = 1$ i $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$). Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$

$$F_{2n} = (F_{n+1})^2 - (F_{n-1})^2.$$

Analiza - klasa 2a   Zestaw 21.   5.4.2022

Powtórzenie – ciągi

1. Dla jakich wartości x, y, z ciąg (x, y, z) jest geometryczny, a ciągi

$$(4x-4, 2y-2, z-1) \quad \text{i} \quad (x+5, y+3, z-15)$$

są arytmetyczne?

2. Niech S_m oznacza sumę początkowych m wyrazów ciągu arytmetycznego $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Wykaż, że jeśli $\dfrac{S_m}{S_n} = \left(\dfrac{m}{n}\right)^2$, to $\dfrac{a_m}{a_n} = \dfrac{2m-1}{2n-1}$.

3. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie $a_1 = a$ i przyroście d. Oblicz sumy

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$ (dla $a_k > 0$)

4. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $a_0 = a > 0$ i ilorazie $q > 0$. Oblicz sumy

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k a_k^2$,   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{k+1}$,   (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$.

5. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, wyrazy ciągu arytmetycznego $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ są dodatnie i ich suma jest równa S. Wykaż, że

$$\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} + \sqrt[3]{a_2 a_3 a_4} + \ldots + \sqrt[3]{a_{n-2} a_{n-1} a_n} \leqslant \frac{n-2}{n} S.$$

6. Dany jest ciąg arytmetyczny $(a_n)_n$ taki, że ciąg $(\lfloor a_n \rfloor)_n$ też jest arytmetyczny. Udowodnij, że przyrost ciągu $(a_n)_n$ jest liczbą całkowitą.

7. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest arytmetyczny, a ciąg $(b_n)_n$ jest geometryczny z ilorazem q. Udowodnij, że ciąg o wyrazach $c_n = a_n b_n$ jest ciągiem jednorodnym liniowo – rekurencyjnym rzędu 2 i wyznacz równanie rekurencyjne tego ciągu.

8. Niech F_n oznacza n-ty wyraz ciągu Fibonacciego. Wykaż, że ciąg

$$a_n = 5F_n^2 + 2 \cdot (-1)^n$$

jest jednorodnym ciągiem liniowo – rekurencyjnym rzędu 2.

9. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zdefiniowany przez warunki

$$a_1 = 1 \qquad \text{i} \qquad a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 2} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Udowodnij, że każdy wyraz tego ciągu jest liczbą całkowitą i wyznacz a_{2022}.

10. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zadany przez warunki

$$a_1 = \frac{3}{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2} \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Udowodnij, że ciąg ten jest rosnący i $a_n < 2$ dla każdego n.

Funkcje trygonometryczne I

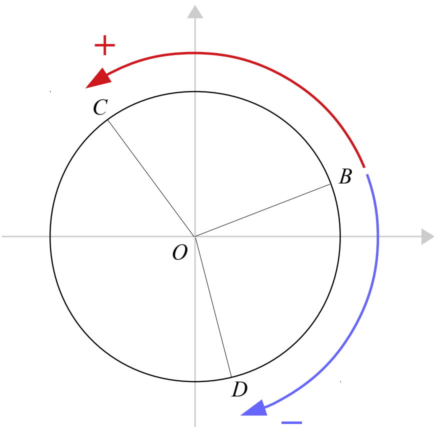
Definicja. Niech $D \subset \mathbb{R}$, X to pewien zbiór. Mówimy, że funkcja $f : D \to X$ jest okresowa z okresem $T > 0$, jeżeli dla każdego $x \in D$ zachodzi równość $f(x+T) = f(x)$. Liczbę T nazywamy okresem funkcji f. Najkrótszy okres funkcji f nazywamy jej *okresem podstawowym.*

Przykład: Funkja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ jest okresowa z okresem 1.

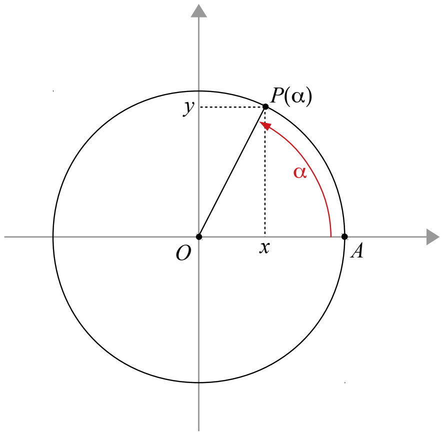
Miara kąta skierowanego

Niech S oznacza okrąg o promieniu 1 (zwany okręgiem jednostkowym), który został umieszczony w układzie współrzędnych na płaszczyźnie tak, że jego środkek znajduje w punkcie $O = (0,0)$. Na tym okręgu wybrano dwa punkty B i C. *Miarą (łukową) kąta skierowanego* $\measuredangle BOC$ określamy za pomocą długości łuku okręgu od punktu B do punktu C, przy czym:

- jeżeli od B do C poruszamy się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to przyjmujemy, że miara kąta jest dodatnia i równa długości łuku od punktu B do punktu C;
- jeżeli od B do C poruszamy się w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, to przyjmujemy, że miara kąta jest ujemna i równa długości łuku od punktu B do punktu C pomnożonej przez -1.



$\measuredangle BOC > 0$ i $\measuredangle BOD < 0$



Funkcja $P : \mathbb{R} \to S$

Na okręgu S ustalmy punkt $A = (1,0)$. Każdej liczbie rzeczywistej α możemy przyporządkować punkt $P(\alpha)$ na okręgu S w taki sposób, że miara łukowa kąta skierowanego $\measuredangle AOP(\alpha)$ jest równa α:

- $P(0) = A$;
- jeżeli $\alpha > 0$, to idziemy się po okręgu od punktu A w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara aż przejdziemy drogę długości α, dochodząc do punktu $P(\alpha)$;
- jeżeli $\alpha < 0$, to idziemy po okręgu od punktu A w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara aż przejdziemy drogę długości $-\alpha$, dochodząc do punktu $P(\alpha)$.

Fakt. Funkcja $P : \mathbb{R} \to S$ jest okresowa i jej okres jest równy 2π. Ponadto, jeżeli $\alpha \in [0, 2\pi)$, to funkcja $\alpha \mapsto P(\alpha)$ jest bijekcją.

Sinus, cosinus, tangens i cotangens

Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ i przyjmijmy, że punkt $P(\alpha)$ ma współrzędne (x, y). Definiujemy następujące funkcje, zwane funkcjami *trygonometrycznymi*:

(i) **sinus:** $\sin\alpha = y$;

(ii) **cosinus:** $\cos\alpha = x$;

(iii) **tangens:** $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$ $(x \neq 0)$;

(iv) **cotangens:** $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$ $(y \neq 0)$.

Stw. 1 (własności sinusa). Funkcja $\sin(\alpha)$ jest określona dla każdej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$ i

(i) jej zbiór wartości to przedział $[-1, 1]$;
(ii) jest okresowa i jej okres podstawowy wynosi 2π;
(iii) jest nieparzysta;
(iv) jest rosnąca na przedziałach $[(2k - \frac{1}{2})\pi, (2k + \frac{1}{2})\pi]$ i malejąca na przedziałach $[(2k + \frac{1}{2})\pi, (2k + \frac{3}{2})\pi]$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stw. 2 (własności cosinusa). Funkcja $\cos(\alpha)$ jest określona dla każdej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz

(i) jej zbiór wartości to przedział $[-1, 1]$;
(ii) jest okresowa i jej okres podstawowy wynosi 2π;
(iii) jest parzysta;
(iv) jest malejąca na przedziałach $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ i rosnąca na przedziałach $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stw. 3 (własności tangensa). Funkcja $\operatorname{tg}(\alpha)$ jest określona dla każdej liczby $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{(k + \frac{1}{2})\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ oraz

(i) jej zbiór wartości to cały zbiór liczb rzeczywistych;
(ii) jest okresowa i jej okres podstawowy wynosi π;
(iii) jest nieparzysta;
(iv) jest rosnąca na przedziałach $((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stw. 4 (własności cotangensa). Funkcja $\operatorname{ctg}(\alpha)$ jest określona dla każdej liczby $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ oraz

(i) jej zbiór wartości to cały zbiór liczb rzeczywistych;
(ii) jest okresowa i jej okres podstawowy wynosi π;
(iii) jest nieparzysta;
(iv) jest malejąca na przedziałach $(k\pi, (k+1)\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stw. 5 (jedynka trygonometryczna). Dla każdej liczby rzeczywistej α

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

---

1. Znajdź współrzędne puntów

$$P(\pi),\ P\left(\frac{3\pi}{2}\right),\ P\left(-\frac{\pi}{2}\right),\ P(-\pi),\ P\left(\frac{\pi}{3}\right),\ P\left(\frac{-3\pi}{3}\right),\ P\left(\frac{\pi}{6}\right),\ P\left(\frac{2021\pi}{6}\right).$$

2. Uzupełnij wartości w tabeli:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
stopnie												

$\sin\alpha$												
$\cos\alpha$												
$\operatorname{tg}\alpha$												
$\operatorname{ctg}\alpha$												

3. Określ znak wartości funkcji $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ w zależności od $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Zbadaj znaki liczb $\sin\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{7\pi}{13}$, $\operatorname{tg}\frac{23\pi}{8}$, $\sin\sqrt{\pi}$, $\operatorname{tg} 1$, $\cos(\sin 4)$, $\operatorname{tg}(\cos 1)$.

5. Porównaj pary liczb: (a) $\sin 1$ i $\cos 1$, (b) 1 i $\cos 1 + \sin 1$, (c) $\operatorname{tg} 3$ i $\operatorname{ctg} 3$.

6. **Wzory redukcyjne.** Udowodnij tożsamości (t jest dowolną liczbą rzeczywistą):

(a) $\sin t = \sin(\pi - t) = -\sin(\pi + t)$;

(b) $\cos t = -\cos(\pi - t) = -\cos(\pi + t)$;

(c) $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(\frac{\pi}{2} + t) = \cos t$;

(d) $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = -\cos(\frac{\pi}{2} + t) = \sin t$.

7. Znajdź funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taką, że $\operatorname{ctg} = \operatorname{tg} \circ f$.

8. Uprość wyrażenia:

(a) $\operatorname{tg}^2\theta - \dfrac{1}{\cos^2\theta}$,

(b) $\sin^4\phi + 2\sin^2\phi\cos^2\phi + \cos^4\phi$,

(c) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\gamma} + \dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\gamma}$,

(d) $\sqrt{1-\cos^2 t}$, gdy $t \in [2017\pi, 2018\pi]$,

(e) $\sqrt{1-\sin^2 x}$, gdy $x \in [\frac{2017}{2}\pi, \frac{2019}{2}\pi]$.

9. Rozwiąż równania:

(a) $|\sin x| = \frac{1}{2}$,

(b) $\sin x + \cos x = 1$,

(c) $|\sin x| = |\cos x|$,

(d) $|\sin x - \cos x| = |\sin x| + |\cos x|$

10. Rozwiąż nierowności:

(a) $\cos x > \frac{1}{2}$;

(b) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(c) $\operatorname{tg} x > 1$;

(d) $\operatorname{ctg} x \geqslant -\sqrt{6}$;

(e) $\sin x > \cos x$;

(f) $\sin x - \cos x \geqslant 1$.

11. Wyznacz okresy podstawowe funkcji: (a) $\sin(\pi x)$, (b) $\cos(5+7x)$, (c) $\operatorname{tg}(x - \lfloor x \rfloor)$, (d) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2\pi}$.

12. Naszkicuj wykresy funkcji $\sin(2\pi x)$, $\cos(3x - \frac{\pi}{3})$, $\sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2})$, $\operatorname{tg}(-x + \frac{\pi}{3})$, $\operatorname{ctg}(2x - \pi)$.

13. Uprość wyrażenie

$$\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}.$$

14. Uprość wyrażenie

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}.$$

15. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej α takie, że $|\sin\alpha| \neq 1$

$$\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = \frac{2}{|\cos\alpha|}.$$

16. Dane są liczby rzeczywiste a, b i x takie, że $\dfrac{\sin^4 x}{a} + \dfrac{\cos^4 x}{b} = \dfrac{1}{a+b}$.

(a) Wyraź $\sin^2 x$ i $\cos^2 x$ poprzez a i b.

(b) Pokaż, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\frac{\sin^{2n} x}{a^{n-1}} + \frac{\cos^{2n} x}{b^{n-1}} = \frac{1}{(a+b)^{n-1}}.$$

Analiza - klasa 2a Zestaw 23. 13.05.2022

Funkcje trygonometryczne II

Twierdzenie. Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ prawdziwe są tożsamości:

(i) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$,

(ii) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$,

(iii) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$,

(iv) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

---

1. Udowodnij tożsamości:

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta, \qquad \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta.$$

2. Udowodnij tożsamości

$$\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}, \qquad \mathrm{tg}\,(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$

Wyprowadź analogiczne wzory dla funkcji cotangens.

3. Wyraź $\sin(3\theta)$ za pomocą $\sin\theta$ i $\cos(3\theta)$ za pomocą $\cos\theta$;

4. Oblicz wartości funkcji sinus i kosinus dla argumentów: $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{8}$, $\frac{-17\pi}{8}$, $\frac{19\pi}{12}$.

5. Udowodnij tożsamości pozwalające zamienić sumę wartości funkcji sinus lub cosinus na iloczyn:

(i) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$,

(ii) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$,

(iii) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$,

(iv) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$;

6. Udowodnij tożsamości pozwalające zamienić iloczyn wartości funkcji sinus i cosinus na sumę:

(i) $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$,

(ii) $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$,

(iii) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)$.

7. Wyprowadź wzory wyrażające $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ za pomocą $t = \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$:

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2t}{1-t^2}.$$

8. Oblicz $\cos^4\frac{\pi}{24} - \sin^4\frac{\pi}{24}$.

9. Dla danych liczb rzeczywistych a i b wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = a\sin x + b\cos x$.

10. Udowodnij, że $(1 - \mathrm{ctg}(23^\circ))(1 - \mathrm{ctg}(22^\circ)) = 2$.

11. Zamień sumę $\sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x)$ na iloczyn funkcji trygonometrycznych.

12. Udowodnij nierówności:

(a) $\sin x < x < \mathrm{tg}\,x$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

(b) $|\sin x| \leqslant |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(c) $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$;

(d) $\dfrac{\sin x + \sin y}{2} \leqslant \sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$ dla $0 \leqslant x, y \leqslant \pi$.

13. Rozwiąż równania.

(a) $2\sin^2 x + \sin x = 1$;

(b) $\cos(2x) - \cos x = 0$;

(c) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$;

(d) $\sin(2x)\sin x = \cos x$;

(e) $\sin(2x) - \sqrt{3}\cos x = 0$;

(f) $\cos x - \cos(3x) = \sin(3x) - \sin x$

(g) $\mathrm{tg}\,x = 2\cos\frac{x}{2}$;

(h) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$;

(i) $\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin^2(2x) = 1$;

(j) $\sin x \cdot \sin(3x) = \frac{1}{2}$;

(k) $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$,

(l) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$.

14. Znajdź $x \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ spełniające równość $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sin x} + \dfrac{\sqrt{3}+1}{\cos x} = 4\sqrt{2}$.

15. Załóżmy, że $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \frac{\pi}{2}$. Udowodnij nierówności

$$\mathrm{tg}\,x_1 < \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n}{\cos x_1 + \cos x_2 + \ldots + \cos x_n} < \mathrm{tg}\,x_n.$$

16. Załóżmy, że $0 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_n \leqslant \pi$. Udowodnij nierówność

$$\frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n}{n} \leqslant \sin\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right).$$

17. Niech $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

Analiza - klasa 2a Zestaw 24. 3.6.2022

Funkcje trygonometryczne III (+ powtórzenie)

1. Rozwiąż nierówności w przedziale $[0, 2\pi]$:

(a) $\cos x + \operatorname{tg} x < 1 + \sin x$

(b) $2\sin^2(x) + \sin^2(2x) < 2$

(c) $\operatorname{tg}(2x) - \operatorname{ctg}(2x) > \frac{2}{\sqrt{3}}$,

(d) $\operatorname{ctg}^2 x > 3$,

(e) $\operatorname{ctg} x < 2 - \frac{\sin x}{1+\cos x}$,

(f) $\cos 4x + 2\cos^2 x \geqslant 1$.

2. Udowodnij, że funkcja $f(x) = x + \sin x$ (dla $x \in \mathbb{R}$) jest rosnąca.

3. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = (\cos x + 1)(\sin x + 1).$$

4. Udowodnij, że dla dowolnych $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ zachodzi nierówność

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{2} \geqslant \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

5. Załóżmy, że $\alpha, \beta > 0$ i $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$. Udowodnij nierówność

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \leqslant \frac{1}{3}.$$

6. Udowodnij nierówność

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) \leqslant \frac{3}{2} \qquad \text{dla } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

7. Sprawdź tożsamości

(a) $\frac{\cos\alpha - \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$,

(b) $\sin 7\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{7\alpha}{2} + \cos 7\alpha = 1$,

(c) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + \frac{3}{4}\sin^2\alpha = 1$,

(d) $\cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 4\alpha \sin\alpha = \cos 3\alpha \cos 2\alpha$.

8. Udowodnij tożsamości

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\beta+\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} + \sin(\alpha+\beta+\gamma),$$
$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma+\alpha}{2} - \cos(\alpha+\beta+\gamma).$$

9. Niech $0 < \alpha, \beta, \gamma$ i $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Udowodnij, że

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

10. Udowodnij, że jeśli $\cos(\alpha+\beta) = 0$, to $\sin(\alpha + 2\beta) = \sin\alpha$.

11. Rozwiąż równania

(a) $3\sin x = 2\cos^2 x$,

(b) $\cos 3x = \cos x$,

(c) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$,

(d) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$,

(e) $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$,

(f) $\frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{1 - \sin x}{\cos x} = 4$,

(g) $2(\sin x + \cos x) = \operatorname{tg} x + 1$.

12. Niech $a, b \geqslant 0$ i $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Udowodnij nierówność

$$\left(1 + \frac{a}{\sin x}\right)\left(1 + \frac{b}{\cos x}\right) \geqslant \left(1 + \sqrt{2ab}\right)^2.$$