Analiza - klasa 1a Zestaw 1. 04.09.2020

Wprowadzenie

Umawiamy się, że liczby naturalne to $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$. Zbiór liczb naturalnych oznaczamy $\mathbb{N}$.

1. Liczby a i b są naturalne. Która z liczb jest większa, $a^a \cdot b^b$ czy $a^b \cdot b^a$?

2. Liczbę naturalną n zapisano w pozycyjnym systemie liczbowym o podstawie a jako 111. Udowodnij, że n nie jest kwadratem liczby naturalnej.

3. Pokaż, że

$$\frac{9}{100} < \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \ldots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{10}.$$

4. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ istnieją liczby naturalne k i l takie, że $k < l$ oraz

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \ldots + \frac{1}{(l-2)(l-1)} + \frac{1}{(l-1)l}.$$

5. Wyznacz wszystkie rozwiązania równania

$$\frac{1}{24} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

w liczbach naturalnych x, y.

Analiza - klasa 1a Zestaw 2. 08.09.2020

Elementy logiki

Zmienna logiczna może przyjmować jedną z dwóch wartości: *prawda* (1) lub *fałsz* (0).

Wyrażenie logiczne składa się ze zmiennych logicznych i operacji logicznych przedstawionych w tabelce poniżej. Wyrażenie logiczne również może przyjmować wartość *prawda* lub *fałsz*, w zależności od wartości zmiennych logicznych, które w nim występują.

Operacje logiczne:

		negacja *nie p*	**koniunkcja** *p i q*	**alternatywa** *p lub q*	**implikacja** *z p wynika q*	**równoważność** *p wtw., gdy q*
p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \iff q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Kolejność wykonywania operacji w wyrażeniach złożonych jest taka jak kolejność odpowiednich kolumn w tabelce. Kolejność operacji można zmienić wstawiając w odpowiednich miejscach nawiasy. Nawiasów można także używać, aby poprawić czytelność wyrażeń. Nawiasów należy użyć w wyrażeniach niejednoznacznych z implikacją postaci $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$, $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$, itp.

Tautologią nazywamy wyrażenie logiczne, które przyjmuje wartość *prawda* niezależnie od wartości występujących w nim zmiennych logicznych. Przykłady tautologii to

- *prawo podwójnego przeczenia*: $\sim(\sim p) \iff p$,
- *prawa przemienności alternatywy*: $(p \vee q) \iff (q \vee p)$,
- *prawo idempotentności koniunkcji*: $(p \wedge p) \iff p$.

---

1. Które z dwuargumentowych operacji logicznych są (a) przemienne, (b) łączne?

2. Wykaż, że koniunkcja jest rozdzielna względem alternatywy i alternatywa jest rozdzielna względem koniunkcji.

3. Sprawdź, że następujące wyrażenia logiczne są tautologiami:

(a) *Prawo wyłączonego środka:* $p \vee \sim p$,

(b) *Prawo odrywania:* $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$,

(c) *Pierwsze prawo de Morgana:* $\sim(p \wedge q) \iff \big((\sim p) \vee (\sim q)\big)$,

(d) *Drugie prawo de Morgana:* $\sim(p \vee q) \iff \big((\sim p) \wedge (\sim q)\big)$,

(e) *Prawo przechodności implikacji:* $\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

4. Które dwuargumentowe operacje logiczne poza implikacją są przechodnie?

5. Zapisz alternatywę, implikację i równoważność tylko za pomocą koniunkcji i negacji.

6. Zapisz zaprzeczenia poniższych zdań dotyczących liczby całkowitej a:
(a) $-10 < a \leqslant 2019$, (b) $|a| < 50$, (c) $3 \mid a \vee 5 \nmid a$, (d) $x = 10 \vee x > 5$.

7. W 100-kartkowym zeszycie na 1. kartce jest napisane zdanie *W tym zeszycie dokładnie 1 zdanie jest fałszywe.*, na 2. kartce jest napisane zdanie *W tym zeszycie dokładnie 2 zdanie są fałszywe.*, itd, aż do ostatniej kartki, na której jest napisane zdanie *W tym zeszycie dokładnie 100 zdań jest fałszywych.* Czy wśród tych zdań są zdania prawdziwe. Jeśl tak, to które? (Zakładamy, że w zeszycie nie ma innych zdań oprócz wymienionych powyżej).

8. Na wyspie mieszkają tylko rycerze i oszuści. Rycerze zawsze mówią prawdę, oszuści zawsze kłamią. Podróżnik napotkał trzech mieszkańców wysypy i dwóch z nich zapytał, ilu rycerzy mu towarzyszy. Pierwszy odpowiedział, że ani jeden, drugi, że tylko jeden. Który z napotkanych mieszkańców jest rycerzem, a który oszustem?

9. W sądowej sprawie o kradzież konia jest 3 podejrzanych: A, B i C. Wiadomo, że dokładnie jeden z nich ukradł konia. B zeznał, że konia ukradł C. Zeznań A i C nie znamy. Ustalono jednak, że tylko jeden z podejrzanych zeznał prawdę i że to on ukradł konia. Kto ukradł konia?

10. Sporządź tabelki wartości poniższych wyrażeń logicznych. Które z tych wyrażeń są tautologiami?

(a) $\big((p \wedge q) \vee (\sim p)\big) \Rightarrow q$,

(b) $(p \wedge q) \vee (q \Rightarrow p)$,

(c) $\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$,

(d) $\big((p \vee q) \wedge r\big) \iff \big((p \wedge r) \vee (q \wedge r)\big)$,

(e) $\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big) \iff \big((p \Rightarrow q) \Rightarrow r\big)$,

(f) $\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big) \iff \big(q \Rightarrow (p \Rightarrow r)\big)$.

11. Agent Tajny ma dwóch informatorów. Każdy informator albo zawsze kłamie, albo zawsze mówi prawdę. Każdemu z informatorów Agent Tajny zadał dwa pytania:

- *Czy ten drugi informator jest kłamcą?*
- *Czy, jeśli ty jesteś kłamcą, to drugi informator nie jest kłamcą?*

Czy na podstawie uzyskanych odpowiedzi Agent Tajny może stwierdzić, który z informatorów mówi prawdę, a który kłamie? (Jest też możliwe, że obaj kłamią lub obaj mówią prawdę.)

12. O liczbach a, b, c, d, e wiadomo, że

(i) $(e > a) \quad \Rightarrow \quad \big((e > b) \vee (e < c)\big)$,

(ii) $(e \leqslant b) \quad \Rightarrow \quad (e < d)$,

(iii) $\big((e < d) \wedge (e > a)\big) \quad \Rightarrow \quad (e \geqslant c)$,

(iv) $\big((e < d) \wedge (e \leqslant b)\big) \quad \Rightarrow \quad (e > a)$.

Która z liczb jest większa: e czy b?

13. Udowodnij, że implikacji nie da się zapisać tylko za pomocą alternatywy i koniunkcji.

Analiza - klasa 1a Zestaw 3. 11.09.2020

Zbiory i kwantyfikatory

Suma zbiorów: $A \cup B$, przecięcie (część wspólna, iloczyn) zbiorów: $A \cap B$, różnica zbiorów: $A \setminus B$.

Zbiór pusty oznaczamy $\emptyset$.

Zapis $x \in A$ odczytujemy jako *x jest elementem (należy do) zbioru A*, $x \notin A$ jako *x nie jest elementem (nie należy do) zbioru A*.

Jeśli A i B to zbiory, to zapis $A \subset B$ oznacza, że *A jest podzbiorem B*

Dopełnienie zbioru Jeżeli $A \subset \Omega$, to zbiór $A' = \Omega \setminus A$ nazywamy *dopełnieniem* zbioru A (w zbiorze Ω). Na przykład, dopełnieniem zbioru liczb wymiernych w zbiorze liczb rzeczywistych jest zbiór liczb niewymiernych.

Zachodzi równoważność $A \subset B \iff B' \subset A'$.

Różnica symetryczna zbiorów: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

---

1. Zapisz różnicę symetryczną $A \triangle B$ dwóch zbiorów $A, B \subset \Omega$ za pomocą operacji dopełnienia, sumy i przecięcia zbiorów.

2. Udowodnij *prawa de Morgana* dla podzbiorów $A, B, C \subset \Omega$:
(a) $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$, (b) $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$.

3. Niech $A, B \subset \Omega$. Zaznacz na diagramie Venna
(a) zbiór elementów $x \in \Omega$, dla których prawdziwe jest zdanie $x \in A \Rightarrow x \in B$
(b) zbiór elementów $x \in \Omega$, dla których prawdziwe jest zdanie $x \in A \iff x \in B$

4. A, B, C oznaczają zbiory. Udowodnij następujące związki:

(a) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$,
(b) $A \cap B = \emptyset \iff A \cup B = A \triangle B$,
(c) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$
(d) $A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$,
(e) $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$,
(f) $A \triangle C \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$

5. A, B, C to zbiory. Który zbiór jest większy: $A \cup (B \triangle C)$ czy $(A \cup B) \triangle (A \cup C)$?

6. A, B, C, D, E to zbiory. Wykaż, że $A \triangle E \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C) \cup (C \triangle D) \cup (D \triangle E)$.

7. A, B, C, D to zbiory. Czy jest prawdą, że

(a) $(A \setminus B) \triangle (B \setminus C) \triangle (C \setminus A) = (B \setminus A) \triangle (A \setminus C) \triangle (C \setminus B)$,
(b) $(A \setminus B) \triangle (B \setminus C) \triangle (C \setminus D) \triangle (D \setminus A) = (B \setminus A) \triangle (C \setminus B) \triangle (D \setminus C) \triangle (A \setminus D)$?

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – zbiór liczb naturalnych,
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ – zbiór liczb całkowitych,
- $\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych,
- $\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych

Ponadto, spotyka się oznaczenia:

- $\mathbb{Z}_+$ – zbiór liczb całkowitych nieujemnych,
- $\mathbb{Z}_-$ – zbiór liczb całkowitych niedodatnich.

Podobnie definiuje się $\mathbb{Q}_+, \mathbb{Q}_-, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$.

Kwantyfikator ogólny. Zdania postaci *Dla każdego x ze zbioru X zachodzi p(x)*, np:
(a) *Dla każdej liczby nauturalnej x prawdziwa jest nierówność* $x \geqslant 1$,
(b) *Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi* $x = 0$ *lub* $x < 0$ *lub* $x > 0$
można zapisać jako

$$\text{(a)} \quad \forall_{x \in \mathbb{N}}\, x \geqslant 1, \qquad \text{(b)} \quad \forall_{x \in \mathbb{R}}\, (x = 0 \vee x < 0 \vee x > 0).$$

$\forall$ nazywamy *kwantyfikatorem ogólnym.*

Kwantyfikator szczegółowy. Zdania postaci *Istnieje x ze zbioru X, dla którego zachodzi p(x)*, np:
(a) *Istnieje liczba naturalna x taka, że* $x > 2020$,
(b) *Istnieje liczba rzeczywista x taka, że* $x^2 = 2$
można zapisać jako

$$\text{(a)} \quad \exists_{x \in \mathbb{N}}\, x > 2020, \qquad \text{(b)} \quad \exists_{x \in \mathbb{R}}\, x^2 = 2.$$

$\exists$ nazywamy *kwantyfikatorem szczegółowym.*

Jeżeli dwa kwantyfikatory ogólne lub dwa kwantyfikatory szczegółowe występują jeden po drugim, można zmienić ich kolejność, np.

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} (x > 1 \Rightarrow x^n > 1) \iff \forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x \in \mathbb{R}} (x > 1 \Rightarrow x^n > 1)$$

$$\exists_{x \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}} (x^2 = n + 1 \wedge x > n) \iff \exists_{n \in \mathbb{N}} \exists_{x \in \mathbb{R}} (x^2 = n + 1 \wedge x > n).$$

Nie można zmienić kolejności kwantyfikatora ogólngo i szczególnego. Poniższe dwa zdania **nie są** równoważne:

$$\text{(i)} \quad \forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}}\, x < n, \qquad \text{(ii)} \quad \exists_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x \in \mathbb{R}}\, x < n.$$

Zawsze prawdziwa jest jednak implikacja:

$$\Big(\exists_{x \in X} \forall_{y \in Y}\, p(x, y)\Big) \Rightarrow \Big(\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X}\, p(x, y)\Big)$$

Na przykład:

$$\Big(\exists_{x \in \mathbb{N}} \forall_{y > 1}\, y^2 > x\Big) \Rightarrow \Big(\forall_{y > 1} \exists_{x \in \mathbb{N}}\, y^2 > x\Big).$$

Prawa de Morgana: Jeżeli Ω jest zbiorem, a $p(x)$ to zdanie logiczne, którego wartość zależy od elementu $x \in \Omega$, to

$$\text{(i)} \sim \Big(\forall_{x \in \Omega}\, p(x)\Big) \iff \exists_{x \in \Omega} \sim p(x), \quad \text{(ii)} \sim \Big(\exists_{x \in \Omega}\, p(x)\Big) \iff \forall_{x \in \Omega} \sim p(x).$$

---

8. Zapisz zaprzeczenia poniższych zdań z kwantyfikatorami.

(a) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ 2 \mid n^2 + n^5$

(b) $\exists_{n\in\mathbb{N}}\ n^n = 16\,777\,216$

(c) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \exists_{n\in\mathbb{N}}\ x \neq 0 \quad\Rightarrow\quad x^2 > n$

(d) $\exists_{x\in\mathbb{R}}\ \forall_{n\in\mathbb{Z}}\ x > 0 \wedge x < n^2 - n + \frac{1}{20}$

(e) $\exists_{n\in\mathbb{N}}\ \forall_{x>0}\ \exists_{k\in\mathbb{N}}\ \sqrt[k]{x} < n$

(f) $\forall_{k\in\mathbb{N}}\ \exists_{x>0}\ \forall_{n\in\mathbb{Z}_+}\ (n + \frac{1}{100})^k \geqslant xn$

(g) $\exists_{q\in\mathbb{Q}}\ \forall_{x\in\mathbb{R}}\ \forall_{k\in\mathbb{Z}}\ q = xk \quad\Rightarrow\quad q = x \vee q = n$

Czy potrafisz rozstrzygnąć czy prawdziwe jest zdanie, czy jego zaprzeczenie?

9. Zapisz za pomocą kwantyfikatorów i działań logicznych definicję *liczby pierwszej.*

10. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są podzbiorami zbioru Ω. Stosując rachunek zdań i kwantyfikatory udowodnij *prawa de Morgana* dla zbiorów:

(i) $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)' = A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_n'$

(ii) $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)' = A_1' \cup A_2' \cup \ldots \cup A_n'$

11. Dane są zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i $B_1, B_2, \ldots, B_n$, przy czym $B_k \subset B_{k+1}$ dla $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Udowodnij, że

$$(A_1 \triangle B_1) \cap (A_2 \triangle B_2) \cap \ldots \cap (A_n \triangle B_n) \subset (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \triangle B_n.$$

12. Dane są zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ takie, że $A_k \subset A_1$ dla $k = 2, 3, \ldots, n$. Udowodnij, że

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_1 \setminus A_3) \cup \ldots \cup (A_1 \setminus A_n) \cup A_n.$$

Analiza - klasa 1a Zestaw 4. 18.09.2020

Wzory skróconego mnożenia

Prawdziwe są następujące tożsamości:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \qquad \text{Wzór na kwadrat sumy,}$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \qquad \text{Wzór na kwadrat różnicy,}$$
$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2 \qquad \text{Wzór na różnicę kwadratów.}$$

oraz

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

Własności liczb rzeczywistych przydatne w rozwiązaniach niektórych zadań: Niech a i b to liczby rzeczywiste. Wówczas

(i) $a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a=0$ lub $b=0$.

(ii) $a^2+b^2=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a=0$ i $b=0$.

---

1. Za pomocą wzorów na kwadrat sumy lub różnicy oblicz (w pamięci) 19^2, 52^2, 195^2, 107^2, 999^2.

2. Za pomocą wzoru na różnicę kwadratów oblicz iloczyny $18 \cdot 22$, $53 \cdot 47$, $495 \cdot 505$.

3. Rozwiąż równania

(a) $x^2-2x=3$

(b) $x^2+x=2$;

(c) $x^2+1=x$;

(d) $4x^2-2x=\frac{3}{4}$

4. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze postaci $k^{2n}-1$, gdzie $k,n \in \mathbb{N}$.

5. Rozłóż na czynniki wyrażenie a^4+4b^4.

6. (a) Każda z liczb całkowitych a, b jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych. Wykaż, że liczba $a \cdot b$ też jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.

(b) Każda z liczb całkowitych a, b jest różnicą kwadratów liczb całkowitych. Czy liczba $a \cdot b$ też jest różnicą kwadratów liczb całkowitych?

(c) Które liczby naturalne są różnicami kwadratów dwóch liczb całkowitych?

7. Uprość sumy

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$,

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}$,

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{1}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$,

(d) $\dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\cdot\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$.

8. Rozwiąż równania

(a) $x^2+(y-1)^2+(x-y)^2=\dfrac{1}{3}$,

(b) $x^2-3y^2+2xy=2(x-y)$,

(c) $y^4+2x^4+1=4x^2y$.

9. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste x,y,z, dla których zachodzi równość

$$(x-y+z)^2=x^2-y^2+z^2.$$

10. Wyznacz rozwiązania układu równań w liczbach całkowitych x,y,z

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy-z^2=1 \end{cases}$$

11. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2yz=100 \\ 2xy-z^2=100 \end{cases}$$

12. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} xy+xz=8-x^2 \\ xy+yz=12-y^2 \\ yz+zx=-4-z^2 \end{cases}$$

13. Wyznacz wszystkie trójki x,y,z liczb rzeczywistych spełniających równanie

$$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{x+y+z}{2}.$$

Analiza - klasa 1a Zestaw 5. 25.09.2020

Nierówności

Podstawowe własności:
Poniżej a, b, c, d oznaczają liczby rzeczywiste.

(1) jeśli $a < b$ i $b < c$, to $a < c$;

(2) jeśli $a < b$, to $a + c < b + c$ i $a - c < b - c$;

(3) jeśli $a < b$ i $c > 0$, to $ac < bc$ i $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$;

(4) jeśli $a < b$ i $c < 0$, to $ac > bc$ i $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$;

(5) jeśli $a < b$ i $c < d$, to $a + c < b + d$

UWAGA: Nie jest prawdą, że jeśli $a < b$ **i** $c < d$**, to** $a - c < b - d$ **!!!**

(6) jeśli $0 < a < b$ i $0 < c < d$, to $ac < bd$;

(7) jeśli $0 < a < b$ i $c < d < 0$, to $ad > bc$;

UWAGA: Nie jest prawdą, że jeśli $a < b$ **i** $c < d$**, to** $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$ **!!!**

(8) jeśli $a > b > 0$, to $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;

(9) jeśli $a \neq 0$, to $a^2 > 0$;

(10) jeśli $a > 0, b > 0$ i $a^2 > b^2$, to $a > b$;

(11) jeśli $a > 0, b > 0$ i $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, to $a > b$.

---

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b spełnione są nierówności:

$$\max(a, b) \geqslant \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geqslant \frac{a + b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \geqslant \min(a, b).$$

Kiedy każda z tych nierówności staje się równością?

2. Niech $x > 0$. Wykaż, że $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$

3. Wykaż, że dla liczb nieujemnych a, b, c spełniona jest nierówność

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc.$$

4. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie i ich iloczyn jest równy 1. Wykaż, że

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

5. Udowodnij nierówność między średnimi arytmetyczną i geometryczną czterech liczb dodatnich a, b, c, d:

$$\frac{a + b + c + d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}.$$

6. Niech n będzie liczbą naturalną. Która z liczb jest większa: $\sqrt{n} + \sqrt{n+2}$ czy $2\sqrt{n+1}$?

7. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają nierówności

$$a + b + c \leqslant 3d, \quad b + c + d \leqslant 3a, \quad c + d + a \leqslant 3b, \quad d + a + b \leqslant 3c.$$

Wykaż, że $a = b = c = d$.

8. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c spełniona jest nierówność

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca.$$

9. Liczby a, b, c są rzeczywiste. Udowodnij, że wśród trzech liczb

$$a - b^2, \quad b - c^2, \quad c - a^2$$

przynajmniej jedna jest mniejsza lub równa $\frac{1}{4}$.

10. Załóżmy, że $0 < a_1, a_2, \ldots, a_n < 1$. Udowodnij, że

$$a_1 a_2 \ldots a_n \leqslant \frac{1}{2^n} \quad \text{lub} \quad (1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_n) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

11. Wykaż, że suma odwrotności kolejnych liczb naturalnych od 1 do 4096 jest większa niż 7.

12. Która z pięciu liczb a, b, c, d, e jest najmniejsza, a która największa, jeśli spełniają one nierówności

$$a + b < c + d, \quad b + c < d + e, \quad c + d < e + a, \quad d + e < a + b.$$

13. Agent Tajny pływa w środku kwadratowego basenu, Wrogi Agent stoi w jednym z rogów. Wrogi Agent nie umie pływać, ale biega 4 razy szybciej niż Agent Tajny pływa. Agent Tajny biega szybciej niż Wrogi Agent. Czy Agent Tajny może uciec Wrogiemu Agentowi?

14. Wykaż, że dla liczb dodatnich a, b prawdziwe są nierówności

(a) $\left(\frac{1}{a} + 3b\right)\left(\frac{1}{b} + 3a\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geqslant 24$;

(b) $(a + b) \cdot \sqrt{\frac{a + b}{2}} \geqslant a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$;

15. Załóżmy, że $a, b \geqslant 0$. Udowodnij nierówności

$$\frac{a + b}{1 + a + b} \leqslant \frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b} \leqslant \frac{2(a + b)}{2 + a + b}.$$

16. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{ab + ad + bc + cd}{a + b + c + d} \geqslant \frac{ab}{a + b} + \frac{cd}{c + d}.$$

Analiza - klasa 1a Zestaw 6. 09.10.2020

Wzory dla trzecich potęg

Dla dowolnych liczb a, b

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{oraz} \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Prawdziwe są także wzory:

$a^3 - b^3 =$ ______________________________

$a^3 + b^3 =$ ______________________________

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$ ______________________________

$(a+b+c)^3 =$ ______________________________

______________________________.

---

1. Rozwiń potęgi:

(a) $\left(2x + \frac{y}{2}\right)^3$;

(b) $\left(\frac{2}{3}a + \frac{3}{2}b\right)^3$;

(c) $(x^2y - z^3)^3$;

(d) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3$;

(e) $\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)^3$.

2. Przedstaw wyrażenie w postaci sześcianu sumy lub różnicy dwóch wyrażeń:

(a) $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$;

(b) $x^3 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^5} - \frac{1}{x^9}$;

(c) $\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2y + 6xy^2 - 8y^3$;

(d) $x^6 - 3x^3 + 3 - \frac{1}{x^3}$.

3. Rozłóż na czynniki wyrażenia

(a) $x^3 - xy^2 + x^2y - y^3$;

(b) $x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$;

4. Załóżmy, że $x + \frac{1}{x} = 3$. Oblicz $x^3 + \frac{1}{x^3}$, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ i $x^9 + \frac{1}{x^9}$.

5. Załóżmy, że $x - \frac{1}{x} = -2$. Oblicz $x^3 - \frac{1}{x^3}$ i $x^6 - \frac{1}{x^6}$.

6. Znajdź wszystkie liczby pierwsze, które są sumami dwóch sześcianów liczb naturalnych.

7. Załóżmy, że $x + y = a$ i $xy = b$. Wyraź za pomocą a i b wartości wyrażeń (gdy trzeba, zakładamy, że $x \neq 0$ i $y \neq 0$):

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad x^2 + y^2, \quad x^3 + y^3, \quad |x-y|, \quad |x^3 - y^3|, \quad x^4 + y^4.$$

8. Załóżmy, że $x + y + z = a$, $xy + yz + zx = b$, $xyz = c$. Wyraź poprzez a, b, c wartości wyrażeń

(a) $x^2 + y^2 + z^2$,

(b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$,

(c) $x^3 + y^3 + z^3$,

(d) $(x+y)(y+z)(z+x)$,

(e) $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$,

(f) $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$.

9. Wykaż, że **nie istnieje** trójka liczb rzeczywistych a, b, c takich, że

$$a + b + c = 4, \quad ab + bc + ca = 2, \quad \text{oraz} \quad abc = 1.$$

10. Rozłóż na czynniki wyrażenia

(a) $a^3 + b^3 + 3ab - 1$;

(b) $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$;

(c) $(a + 2b - 3c)^3 + (b + 2c - 3a)^3 + (c + 2b - 3a)^3$;

(d) $(x+y+z)^3 - (y+z-x)^3 - (z+x-y)^3 - (x+y-z)^3$.

11. Korzystając z wyniku zadania 10 (a), rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + 3xy = 1 \\ (x+2)^2 = y^2, \end{cases}$$

12. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wykaż, że $\sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{b-c} + \sqrt[3]{c-a} \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a, b, c są parami różne.

13. Liczby całkowite k, l, m spełniają równość

$$(k-l)^2 + (l-m)^2 + (m-k)^2 = klm.$$

Wykaż, że liczba $k^3 + l^3 + m^3$ jest podzielna przez $k + l + m + 6$.

14. Udowodnij nierówności między średnią arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną trzech liczb dodatnich x, y, z:

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}.$$

Kiedy te nierówności stają się równościami?

15. Liczby a, b, c są dodatnie. Udowodnij, że

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3.$$

16. Załóżmy, że $x, y, z > 0$. Udowodnij, że

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geqslant 9.$$

17. Załóżmy, że $a, b, c \geqslant 0$. Udowodnij nierówność

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geqslant \frac{a+b}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c+a}{2}.$$

18. Niech $a, b, c > 0$. Udowodnij, że

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geqslant ab + bc + ca.$$

19. Udowodnij, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

20. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunek $x + y + z = 1$. Wykaż, że

$$\frac{64}{27xyz} \geqslant \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{z}\right) \geqslant 64.$$

21. Liczby a, b, c są długościami boków trójkąta. Wykaż, że

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{2}} \geqslant \max(a, b, c).$$

Tożsamość Sophie-Germain

Dla dowolnych liczb rzeczywistych prawdziwe są tożsamości

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2)$$
$$a^4 + \frac{b^4}{4} = \left(a^2 - ab + \frac{b^2}{2}\right)\left(a^2 + ab + \frac{b^2}{2}\right)$$

1. Rozłóż na czynniki wyrażenia

(a) $a^8 + 4b^8$

(b) $a^8 - 16b^8$,

(c) $a^{12} - 4b^{12} + 4a^8b^4 - a^4b^8$.

2. Rozłóż liczby $7^4 + 4^5$ i $5^4 + 2^6 \cdot 3^4$ na czynniki pierwsze.

3. Znajdź wszystkie liczby pierwsze postaci

(a) $n^4 + 4$, (b) $n^4 + 4^n$,

gdzie n jest liczbą naturalną.

4. Dla jakich liczb naturalnych n liczby

(a) $2^{2^n+2} + 1$ (b) $2^{2^n-2} + 1$

są złożone.

5. Uprość sumy

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1}, \qquad \text{(b)} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 - \frac{1}{2}}{k^4 + \frac{1}{4}}.$$

6. Uprość iloczyn

$$\frac{\left(1^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(3^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left((2n-1)^4 + \frac{1}{4}\right)}{\left(2^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(4^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left((2n)^4 + \frac{1}{4}\right)}.$$

7. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba $n^4 + 4$ jest potęgą liczby pierwszej.

8. Udowodnij, że każda liczba naturalna postaci $a^4 + 3$, gdzie $a \in \mathbb{N}$ i $a > 1$, jest sumą trzech kwadratów liczb naturalnych.

9. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ liczba $n^{12} + 64$ jest iloczynem **czterech różnych** liczb naturalnych większych od 1.

Analiza - klasa 1a Zestaw 8. 30.10.2020

Indukcja matematyczna I

Zasada indukcji matematycznej. Dla $n \in \mathbb{N}$ niech T_n oznacza zdanie, które, w zależności od n, może być prawdziwe lub fałszywe.

Jeżeli spełnione są oba warunki:

(i) *baza indukcji*: prawdziwe jest zdanie T_1 ,

(ii) *krok indukcyjny*:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad T_n \quad \Rightarrow \quad T_{n+1},$$

czyli dla każdej liczby naturalnej n ze zdania T_n wynika zdanie T_{n+1},

to dla każdej liczby naturalnej n zdanie T_n jest prawdziwe.

Uwaga: Bazą indukcji może być także zdanie T_k, gdzie k jest pewną liczbą całkowitą. Wówczas krok indukcyjny polega na udowodnieniu dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant k$ implikacji $T_n \quad \Rightarrow \quad T_{n+1}$. Wówczas zdanie T_n jest prawdziwe dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant k$.

---

1. Za pomocą zasady indukcji wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są równości:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$,

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$,

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \prod_{j=k}^{k+3} \frac{1}{j} = \frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$,

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{n+1} - 1$,

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k = (n+1)! - 1$,

(j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$,

(k) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ dla $n \geqslant 2$,

(l) $\displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n} k = 2^n \cdot \prod_{k=1}^{n} (2k-1)$.

Czy potrfisz udowodnić niektóre z powyższych równości w inny sposób?

2. Znajdź i udowodnij wzór na sumę pierwszych n liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1.

3. Znajdź i udowodnij wzory na sumy

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$.

4. **(WAŻNE!!)** Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n i liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest tożsamość

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Natomiast jeśeli liczba n jest nieparzysta, to prawdziwa jest tożsamość

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

5. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

(a) $6 \mid n^3 + 5n$,

(b) $9 \mid 4^n + 15n - 1$,

(c) $3 \mid 10^n + 4^n - 2$,

(d) $11 \mid 2^{6n+1} + 3^{2n+2}$,

(e) $37 \mid 1000^n - 1$,

(f) $13 \mid 1000^n + (-1)^{n+1}$,

(g) $41 \mid 5 \cdot 7^{2(n+1)} + 2^{3n}$,

(h) $10 \mid 2^{(2^{n+1})} - 6$.

6. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba $\dfrac{n^3}{6} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{3}$ jest całkowita.

7. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba $\dfrac{n^4}{24} + \dfrac{n^3}{4} + \dfrac{11n^2}{24} + \dfrac{n}{4}$ jest całkowita.

8. Niech a_n to liczba naturalna, której zapis dziesiętny składa się z n jedynek. Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}.$$

9. Udowodnij, że n prostych dzieli płaszczyznę na nie więcej niż 2^n obszarów.

10. Na ile obszarów dzieli płaszczyznę n okręgów narysowanych tak, że każde dwa mają 2 punkty wspólne i żadne trzy nie mają puktu wspólnego?

11. Na płaszczyżnie narysowano n prostych w taki sposób, że żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Udowodnij, że proste te dzielą płaszczyznę na $(n^2 + n + 2)/2$ obszarów.

12. Udowodnij, że wśród obszarów na jakie dzieli płaszczyznę n prostych, jest co najwyżej $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ obszarów ograniczonych.

13. Z tablicy o wymiarach 2^n na 2^n usunięto jedno pole o wymiarach 1 na 1. Udowodnij, że pozostałą część tablicy można pokryć nie zachodzącymi na siebie płytkami w kształcie litery L, składającymi się z 3 kwadratów.

14. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to zbiory. Udowodnij, że zbiór $A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n$ składa się z tych elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, które należą do nieparzystej liczby zbiorów A_k.

15. Agent Tajny dostał zadanie rozpracowania mafii handlującej dowodami fałszywych twierdzeń matematycznych. W tym celu organizuje on siatkę n informatorów stosując następującą zasadę: dla dowolnych dwóch różnych informatorów pierwszy przekazuje informacje drugiemu albo drugi pierwszemu. Udowodnij, że pewien informator będzie mógł otrzymywać informacje od pozostałych bezpośrednio lub z udziałem tylko jednego pośrednika. (Nie wymagamy, aby pośrednik był zawsze ten sam!)

16. (*) Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $2^{(2^n)} - 1$ ma co najmniej n różnych dzielników pierwszych.

17. (*) Na płaszczyżnie narysowano $2n$ ($n \geqslant 2$) punktów w taki sposób, że żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Następnie narysowano $n^2 + 1$ odcinków, z których każdy łączy pewne 2 z tych punktów. Udowodnij, że pewne trzy z tych odcinków są bokami trójkąta.

18. (*) Udowodnij, że każdą liczbę naturalną n można jednoznacznie zapisać jako sumę

$$n = \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot j!,$$

gdzie k jest liczbą naturalną i a_j to liczby całkowite takie, ża $0 \leqslant a_j \leqslant j$ dla $j = 1, 2, \ldots, k$.

Analiza - klasa 1a   Zestaw 9.   10.11.2020

Zasada indukcji II (Nierówności)

1. Wykaż, że dla $n \in \mathbb{N}$ i $a, b > 0$ zachodzi nierówność
$$(a+b)^n \leqslant 2^{n-1}(a^n + b^n).$$

2. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności
$$\sqrt{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}.$$

3. Znajdź wszystkie liczby naturalne n spełniające nierówność

(a) $2^n > n^2$

(b) $n! > n^3$

(c) $3^n > (n+1) \cdot 2^n$

(d) $2^{n+1}(n!)^2 < (2n)!$

(e) $(n!)^2 > n^n$

(f) $(2n)! > 3^{n-1} \cdot (n!)^2 + 4^n$

4. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

(a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2}$

(b) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{7}{12}$

5. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności
$$\frac{3n}{2n+1} \leqslant 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

6. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n
$$\frac{n}{2} < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \leqslant n.$$

7. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

(a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1$

(b) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > \frac{13}{12}$

8. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność
$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$$

9. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności
$$2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \leqslant 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n}} < 3.$$

10. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

11. Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą (czyli $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, itd.) Udowodnij, że $p_n > 3n$ dla $n \geqslant 12$.

12. Udowodnij **nierówność Bernoulliego:**

Dla każdej liczby naturalnej n i liczby rzeczywistej $x \geqslant -1$ prawdziwa jest nierówność
$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

13. Kiedy nierówność Bernoulliego staje się równością?

14. Udowodnij **nierówność Weierstrassa**:

Dla liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n > -1$, które wszystkie są tego samego znaku, prawdziwa jest nierówność
$$(1+x_1) \cdot (1+x_2) \cdot \ldots \cdot (1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Powtórzenie

1. Dana jest liczba rzeczywista $a \neq 0$ taka, że

$$\frac{1}{a^2} + a^2 - \frac{5}{4} = \frac{1}{a} + a.$$

Znajdź wartości wyrażeń $\frac{1}{a^3} + a^3$ i $\frac{1}{a^4} + a^4$.

2. Wiedząc, że $x - \frac{1}{x} = -2$, oblicz $x^3 - \frac{1}{x^3}$, $x^6 + \frac{1}{x^6}$ i $x^7 - \frac{1}{x^7}$.

3. Załóżmy, że $x + y + z = a$, $x^2 + y^2 + z^2 = b$ i $xyz = c \neq 0$. Wyraź poprzez a, b, c wartości wyrażeń

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \quad \text{i} \quad x^3 + y^3 + z^3.$$

4. Liczby dodatnie x, y, z spełniają równość

$$(x + y + z) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 9.$$

Udowodnij, że $x = y = z$.

5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b, c zachodzi nierówność

$$(a^2 + b^2 + bc) \cdot (b^2 + c^2 + ca) \cdot (c^2 + a^2 + ab) \geqslant 27 \cdot a^2b^2c^2.$$

6. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\left(\frac{1}{a^2b^5} + \frac{1}{b^2a^5} + \frac{1}{c^2a^5}\right) \cdot \left(a^3b^4 + b^3c^4 + c^3a^4\right) \geqslant 9.$$

7. Liczby x, y są dodatnie i

$$x^{2019} + y^{2019} = x^{2020} + y^{2020} = x^{2021} + y^{2021}.$$

Udowodnij, że $x = y = 1$.

8. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b takich, że $a + 2b \neq 0$

$$\frac{a^3 + 2b^3 - 3ab^2}{a + 2b} \geqslant 0.$$

9. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}.$$

10. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 - k - 1}{k!} = 1 - \frac{n+1}{n!}.$$

11. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

$$7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$$

jest podzielna przez 19.

12. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność

$$2 \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{3^k}{3^k + 1} > 1 + \frac{1}{3^n}.$$

13. Niech $x \geqslant 0$ i $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij nierówność

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

14. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n takie, że

$$\prod_{k=1}^{n} (2k - 1) \geqslant 2^n(n-1)! + \sqrt{3^n}.$$

15. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie i $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1$. Udowodnij nierówności

$$1 - \sum_{k=1}^{n} a_k < \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) < \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} a_k}.$$

Zasada indukcji III

Twierdzenie (Silna indukcja). Dla każdej liczby naturalnej n dane jest pewne zdanie T_n. Jeżeli

(i) zdanie T_1 jest prawdziwe

oraz

(ii) dla każdej liczby naturalnej k z prawdziwości zdań $T_1, T_2, \ldots, T_k$ wynika prawdziwość zdania T_{k+1}

to każde ze zdań T_n jest prawdziwe.

1. Udowodnij, że jeśli n jest liczbą całkowitą większą od 3, to kwotę n złotych można wypłacić monetami 2 i 5 złotowymi.
2. Dana jest liczba rzeczywista x taka, że liczba $x + \dfrac{1}{x}$ jest całkowita. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $x^n + \frac{1}{x^n}$ też jest całkowita.
3. Załóżmy, że $a_1 = 5$, $a_2 = 13$ oraz $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że
$$a_n = 2^n + 3^n \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$
4. W każde pole tabeli o 3 wierszach i n kolumnach wpisano literę α, β lub γ, przy czym każdą z liter wpisano w dokładnie n pól. Udowodnij, że można tak poprzestawiać litery w każdym wierszu, aby w każdej kolumnie znalazły się trzy różne litery.
5. Wierzchołki n-kata wypukłego pomalowano trzema różnymi kolorami, przy czym każdy kolor został użyty do pomalowania co najmniej jednego wierzchołka oraz każde dwa kolejne wierzchołki pomalowano różnymi kolorami. Udowodnij, że wielokąt można podzielić przekątnymi na trójkąty w taki sposób, że wierzchołki każdego trójkąta będą pomalowane na różne kolory.
6. Udowodnij, że każdą liczbę naturalną można zapisać jako sumę różnych potęg całkowitych nieujemnych liczby 2.
7. Udowodnij, że każda liczba naturalna złożona jest iloczynem liczb pierwszych.
8. Znajdź wszystkie liczby naturalne n o własności, że grupę składającą się z n osób można podzielić na zespoły cztero- i pięcioosobowe.
9. **Liczby Fibonacciego.** Niech $f_1 = f_2 = 1$ i dla $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ dla $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Udowodnij, że $f_n \leqslant 2^{n-1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi wzór
   $$f_{n+2} = 1 + \sum_{k=1}^{n} f_n.$$
   (c) Udowodnij, że każdą liczbę naturalną można zapisać jako sumę różnych liczb Fibonacciego.
   (d) (*) Udowodnij, że każdą liczbę naturalną n można zapisać na dokładnie jeden sposób jako
   $$N = \sum_{j=1}^{m} f_{i_j}, \quad \text{przy czym } i_1 < i_2 < \ldots < i_m \text{ oraz } i_j - i_{j-1} \geqslant 2.$$
   (e) (**Wzór Bineta**) Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$
   $$f_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$
10. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ istnieje n różnych dzielników liczby $n!$, których suma jest równa $n!$.
11. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i $y_1, y_2, \ldots, y_m$ to liczby naturalne takie, że
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_m < nm.$$
Udowodnij, że z każdej z sum $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ i $y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ można usunąć część wyrazów (ale nie wszystkie) tak, że sumy pozostałych wyrazów też będą równe.
12. **Twierdzenie Picka.** Punkt w kartezjańskim układzie współrzędnych na płaszczyźnie nazywamy *punktem kratowym*, jeżeli obie jego współrzędne są liczbami całkowitymi.

    Załóżmy, że wszystkie wierzchołki pewnego wielokąta W na płaszczyźnie są punktami kratowymi. Niech I oznacza liczbę punktów kratowych leżących we wnętrzu wielokąta W i B oznacza liczbę punktów kratowych na brzegu wielokąta W. Udowodnij, że pole powierzchni wielokąta W jest równe
$$I + \frac{B}{2} - 1.$$

Analiza - klasa 1a Zestaw 12. 11.12.2020

Zastosowania nierówności Bernoulliego

Tw. (Nierówność Bernoulliego) Dla każdej liczby naturalnej n i liczby rzeczywistej $x \geqslant -1$ prawdziwa jest nierówność

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

Ponadto, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=0$ lub $n=1$.

1. Udowodnij, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ i $x > -1$, to

$$\sqrt[n]{1+x} \leqslant 1+\frac{x}{n}.$$

2. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2.$$

3. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

(a) $\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2-n} \geqslant 2n-1,$ (b) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+2n} < \frac{1}{n+3}$

4. Niech $n \in \mathbb{N}$. Znajdź najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)^n + \left(1+\frac{a-b}{a+b}\right)^n,$$

gdzie $a, b > 0$.

5. Dla danej liczby naturalnej n rozstrzygnij, która z liczb jest większa: n^n czy $(n+1)^{n-1}$

6. Dla danej liczby naturalnej n rozstrzygnij, która z liczb jest większa: $\sqrt[n+1]{n+1}$ czy $\sqrt[n]{n}$.

7. Dla $n \in \mathbb{N}$ udowodnij nierówności

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{oraz} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3\cdot\frac{n+1}{n+2} < 3.$$

8. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność

$$\sqrt[n]{n} \leqslant 1+\sqrt{\frac{2}{n}}.$$

9. Wykaż, że

$$\forall_{x>1}\, \forall_{k\in\mathbb{N}}\, \exists_{c>0}\, \forall_{n\in\mathbb{N}} \quad x^n \geqslant cn^k.$$

10. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}} \leqslant n+1.$$

11. Niech $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ i $k_{n+1} = k_1$. Udowodnij nierówność

$$\prod_{j=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k_j}\right)^{k_{j+1}} \geqslant 2^n.$$

12. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ i $a_{n+1} = a_1$. Udowodnij nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[a_{i+1}]{a_i}} \geqslant 1.$$

Analiza - klasa 1a Zestaw 13. 19.01.2021

Nierówność Cauchy'ego I

Definicja. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

- liczbę $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ nazywamy *średnią arytmetyczną* liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- dla $a_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, liczbę $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ nazywamy *średnią geometryczną* liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- dla $a_k \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, liczbę $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$ nazywamy *średnią harmoniczną* liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Twierdzenie (nierówność Cauchy'ego). Dla liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Ponadto, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Omówimy dwa dowody nierówności Cauchy'ego:

- pierwszy z wykorzystaniem nierówności Bernoulliego;
- drugi z wykorzystaniem tzw. indukcji Cauchy'ego: *jeżeli prawdziwe jest twierdzenie T_1 oraz zachodzą implikacje $T_n \Rightarrow T_{n+1}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ oraz $T_n \Rightarrow T_{n-1}$ dla $n = 2, 3, 4, \ldots$, to dla każdego n prawdziwe jest zdanie T_n.*

Wniosek (nierówność między średnią geometryczną i harmoniczną). Dla liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Ponadto, rówość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdt $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

---

1. Dana jest liczba naturalna n. Udowodnij, że

$$n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

2. Korzystając z nierówności Cauchy'ego, udowodnij nierówność Bernoulliego.

3. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n.$$

4. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}.$$

5. Liczby a, b, c są dodatnie i $abc = 1$. Wykaż, że

$$a^4 + 2b^2 + 4d \geqslant 7.$$

6. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z prawdziwa jest nierówność

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 8\sqrt{xyz} - 16.$$

Kiedy ta nierówność staje się równością?

7. Jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta i $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, to pole tego trójkąta wynosi $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (wzór Herona). Udowodnij, że spośród wszystkich trójkątów o danym obwodzie największe pole ma trójkąt równoboczny.

8. Liczby a, b, c, d są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a+b+c+d}.$$

9. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie. Udowodnij, że

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

10. Dane są liczby dodatnie $a_1, \ldots, a_n$ takie, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$ oraz $k \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

$$\frac{1}{a_1^k} + \frac{1}{a_2^k} + \ldots + \frac{1}{a_n^k} \geqslant n^{k+1}.$$

11. Dane są liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ wszystkie większe od -1. Udowodnij, nierówność

$$\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \ldots + \frac{1}{a_n+1} \geqslant \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + n}.$$

12. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij nierówność

$$\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right)^n \geqslant (n!)^2.$$

Analiza - klasa 1a Zestaw 14. 22.01.2021

Nierówność Cauchy'ego II

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ spełniona jest nierówność

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} \leqslant \sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)}.$$

2. Liczy dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają warunek $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1$. Udowodnij, że

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{x_n}\right) \geqslant (n+1)^n.$$

3. Suma liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest równa 1. Udowodnij, że

$$\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{a_n}-1\right) \geqslant (n-1)^n.$$

4. Liczy dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają warunek $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1$. Udowodnij, że

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2+\ldots+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2 \geqslant \frac{(n^2+1)^2}{n}.$$

5. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$n^n - 1 \geqslant \sqrt{n^{n+1}}\cdot(n-1).$$

6. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność

$$n\cdot\sqrt[n]{n+1} < n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

7. Niech $a > 1$ i $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij nierówność

$$a^n - 1 > n\left(\sqrt{a^{n+1}} - \sqrt{a^{n-1}}\right).$$

8. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunek $abcd = 1$. Udowodnij, że

$$\frac{a}{b+c+d+1}+\frac{b}{c+d+a+1}+\frac{c}{d+a+b+1}+\frac{d}{a+b+c+1} \geqslant 1.$$

9. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ są dodatnie. Udowodnj nierówność

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i b_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 \geqslant 4n^2.$$

10. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij nierówność

$$(n+1)^{2n} \geqslant 3^n \cdot (n!)^2.$$

11. Stosując indukcję Cauchy'ego udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant \left(1+\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\right)^n.$$

Podzielność liczb

Niech $a, b \in \mathbb{Z}$. Mówimy, że liczba a jest dzielnikiem liczby b (liczba b jest podzielna przez a), jeżeli istnieje liczba $c \in \mathbb{Z}$ taka, że $b = a \cdot c$. Piszemy wtedy $a \mid b$. Jeżeli a nie jest dzielnikiem b, piszemy $a \nmid b$.

Przypomnijmy najważniejsze własności podzielności liczb:

(i) $a \mid 0$ oraz $a \mid a$ dla każdej liczby całkowitej a.

(ii) Jeżeli $a \mid b$ i $b \neq 0$, to $|a| \leqslant |b|$.

(iii) Jeżeli $a \mid b$ i $a \mid c$ oraz $x, y \in \mathbb{Z}$, to $a \mid bx + cy$.

(iv) Jeżeli $a \mid b$ i $b \mid c$, to $a \mid c$.

(v) Jeżeli $a \mid b$ i $b \mid a$, to $|a| = |b|$.

(vi) Jeżeli $a \mid b$ i $b \neq 0$, to $\frac{b}{a} \mid b$.

(vii) Jeżeli $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ to $a \mid b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ac \mid bc$.

Tw. o dzieleniu z resztą. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b istnieją jednoznacznie wyznaczone liczby całkowite k i r takie, że $0 \leqslant r \leqslant a - 1$ oraz

$$b = ak + r.$$

Liczbę r nazywamy resztą z dzielenia a przez b.

W dowodzie tw. o dzieleniu z resztą, jak i w dowodach innych twierdzeń z teorii liczb, można skorzystać z następującego twierdzenia:

Zasada minimum. Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb naturalnych zawiera element najmniejszy.

---

1. Znajdź wszystkie liczby $n \in \mathbb{Z}$ takie, że

(a) $n + 1 \mid n^2 + 1$,

(b) $3n + 4 \mid 7n + 1$,

(c) $n - 1 \mid n^5 + 5$

2. Udowodnij, że $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$.

3. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ i $a - c \mid ab + cd$. Wykaż, że $a - c \mid ad + bc$.

4. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba otrzymana z n poprzez usunięcie cyfry jedności w zapisie dziesiętnym jest dzielnikiem n.

5. Niech $n \in \mathbb{Z}$. Jakie są możliwe reszty z dzielenia n^2 przez $3, 4, 7$?

6. Liczby a i b są nieparzyste. Wykaż, że liczba $a^2 + b^2$ nie jest kwadratem.

7. Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{Z}$ i $21 \mid a^2 + b^2$. Udowodnij, że $441 \mid a^2 + b^2$.

8. Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{Z}$ oraz $a + b \mid a^2 + ab + b^2$. Udowodnij, że

$$(a + b)^2 \mid a^4 + b^4.$$

9. Niech $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Wykaż, że $6 \mid a + b + c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $6 \mid a^3 + b^3 + c^3$.

10. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ i

$$d \mid a + b + c \qquad \text{oraz} \qquad d \mid a^2 + b^2 + c^2.$$

Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$d \mid a^{(2^n)} + b^{(2^n)} + c^{(2^n)}.$$

11. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ liczba 2^n jest sumą dwóch kolejnych liczb nieparzystych.

12. Liczba k jest parzysta. Czy istnieje k liczb naturalnych nieparzystych $n_1, n_2, \ldots, n_k$ takich, że

$$1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_k}?$$

13. Liczba $p > 2$ jest nieparzysta, $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

$$p \mid 1^{p^n} + 2^{p^n} + \ldots + (p - 1)^{p^n}.$$

14. Dla danej liczby naturalnej $n > 3$ niech a_n i b_n to takie liczby naturalne, że $b_n < 10$ i $2^n = 10a_n + b_n$. Udowodnij, że $6 \mid a_n b_n$.

Analiza - klasa 1a Zestaw 16. 11.02.2021

Kongruencje liczbowe

Niech a i b będą liczbami całkowitymi, zaś m liczbą natiralną.

Definicja. Mówimy, że *a przystaje do b modulo m* wtedy i tylko wtedy, gdy $m \mid a-b$. Zapisujemy to jako

$$a \equiv b \pmod{m} \quad \iff \quad m \mid a-b$$

i nazywamy *kongruencją / przystawaniem modulo m*.

Zauważmy, że $a \equiv b \pmod{m}$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a i b dają te same reszty po podzieleniu przez m.

Jeżeli a nie przystaje do b modulo m, to piszemy $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Stw. (Podstawowe własności kongruencji) Niech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$.

(i) $a \equiv a \pmod{m}$ (zwrotność),

(ii) $a \equiv b \pmod{m}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b \equiv a \pmod{m}$ (symetria),

(iii) jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ i $b \equiv c \pmod{m}$, to $a \equiv c \pmod{m}$ (przechodniość),

(iv) jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ i $c \equiv d \pmod{m}$, to $a+c \equiv b+d \pmod{m}$ oraz $a-c \equiv b-d \pmod{m}$;

(v) jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ i $c \equiv d \pmod{m}$, to $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Uwaga. Nie jest prawdą, że jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ oraz $d \mid a$ i $d \mid b$, to $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{m}$.

---

1. Ile wynosi reszta z dzielenia liczby $28 \cdot 33 \cdot 73$ przez 35?

2. Znajdź resztę z dzielenia liczby 3^{89} przez (a) 7, (b) 13.

3. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n \equiv 3 \pmod{4}$. Udowodnij, że n nie jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.

4. Udowodnij, że $10 \mid 53^{53} - 33^{33}$.

5. Niech $x, y \in \mathbb{Z}$. Wykaż, że $7 \mid 10x+y$ wtedy i tylko wtey, gdy $7 \mid x-2y$. Następnie sprawdź, czy $7 \mid 4\,378\,479$.

6. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wykaż, że $7 \mid 2^{n+2} + 3^{2n+1}$.

7. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $21 \mid 2^{4^n} + 5$.

8. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których $7 \mid 2^n - 1$.

Wykaż, że $7 \nmid 2^n + 1$ dla każdej liczby naturalnej n.

9. Wyznacz dwie ostatnie cyfry dziesiętne liczby $99^{99} - 51^{51}$.

10. Wyznacz resztę z dzielenia przez 7 liczby

$$\sum_{k=1}^{10} 10^{10^k}.$$

11. Liczby a, b, c są całkowite i $9 \mid a^2 + b^2 + c^2$. Udowodnij, że

$$9 \mid a^2 - b^2 \quad \text{lub} \quad 9 \mid b^2 - c^2 \quad \text{lub} \quad 9 \mid c^2 - a^2.$$

12. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $3^{6^n} - 2^{6^n}$ jest podzielna przez 35.

13. Udowodnij, że $7 \mid 2222^{5555} + 5555^{2222}$.

14. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

(a) $9 \mid n$ wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr dziesiętnych liczby n jest podzielna przez 9.

(b) $11 \mid n$ wtedy i tylko wtedy, gdy naprzeienna suma cyfr dziesiętnych liczby n jest podzielna przez 11.

15. Niech $m \in \mathbb{N}$ oraz $m > 1$. Udowodnij, że liczba

$$n = a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \ldots + a_k m^k, \quad \text{gdzie } a_0, a_1, \ldots, a_k \in \{0, 1, \ldots, m-1\},$$

jest podzielna przez $m-1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m - 1 \mid a_0 + a_1 + \ldots + a_k$.

16. Niech $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że liczby $2n+1$ i $3n+1$ są kwadratami liczb całkowitych. Udowodnij, że $40 \mid n$.

Analiza - klasa 1a Zestaw 17. 19.02.2021

NWD i NWW

Niech $S \subset \mathbb{N}$. Wówczas $\min S$ oznacza najmniejszą liczbę ze zbioru S. Jeżeli zbiór S jest skończony, to $\max S$ oznacza największą liczbę z tego zbioru.

Największy wspólny dzielnik liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ jest to liczba

$$\mathrm{NWD}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \max\{d \in \mathbb{N} : d \mid a_1, d \mid a_2, \ldots, d \mid a_k\}.$$

Tw. 1. (Tożsamość Bezout'a) Dla dowolnych liczb naturalnych $a_1, a_2, \ldots, a_k$ istnieją liczby całkowite $x_1, x_2, \ldots, x_k$ takie, że

$$\mathrm{NWD}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k.$$

Tw. 2. Jeżeli d jest wspólnym dzielnikiem liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k$, to

$$d \mid \mathrm{NWD}(a_1, a_2, \ldots, a_k).$$

Definicja. Mówimy, że liczby $a, b \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze, jeżeli $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$.

Tw. 3. Liczby $a, b \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $x, y \in \mathbb{Z}$ takie, że $ax + by = 1$.

Tw. 4. (Algorytm euklidesa) $\mathrm{NWD}(a, b)$, gdzie $a \geqslant b > 0$, można wyznaczyć za pomocą następującego algorytmu: Niech $x_1 = a$, $x_2 = b$. Wykonujemy kolejne dzielenia z resztą, aż do otrzymania zerowej reszty:

$$\begin{aligned}
x_1 &= q_1x_2 + x_3, && 0 < x_3 < x_2\\
x_2 &= q_2x_3 + x_4, && 0 < x_4 < x_3\\
&\ldots\\
x_{k-2} &= q_{k-2}x_{k-1} + x_k, && 0 < x_k < x_{k-1}\\
x_{k-1} &= q_{k-1}x_k + x_{k+1}, && 0 < x_{k+1} < x_k\\
x_k &= q_kx_{k+1}.
\end{aligned}$$

Wówczas $\mathrm{NWD}(a, b) = x_{k+1}$ (ostatnia niezerowa reszta).

Definicja. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$. Każdą liczbę $m \in \mathbb{N}$ taką, że $a_1 \mid m$, $a_2 \mid m$, …, $a_k \mid m$ nazywamy *wspólną wielokrotnością* liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Najmniejsza wspólna wielokrotność liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jest to liczba

$$\mathrm{NWW}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \min\{m \in \mathbb{N} : a_1 \mid m, a_2 \mid m, \ldots, a_k \mid m\}.$$

Tw. 5. Jeżeli $m \in \mathbb{N}$ jest wspólną wielokrotnością liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k$, to

$$\mathrm{NWW}(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mid m.$$

Tw. 6. Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$\mathrm{NWW}(a, b) \cdot \mathrm{NWD}(a, b) = ab.$$

---

1. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że (a) $\mathrm{NWD}(n, n+1) = 1$, (b) $\mathrm{NWD}(2n-1, 2n+1) = 1$

2. Niech $a, b \in \mathbb{Z}$ i $d = \mathrm{NWD}(a, b)$. Wykaż, że liczby $\frac{a}{d}$ i $\frac{b}{d}$ są względnie pierwsze.

3. Niech $a, b, c \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

$$\mathrm{NWD}(a, b, c) = \mathrm{NWD}\big(\mathrm{NWD}(a, b), c\big).$$

4. Niech $a, b, c \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$ i $c \mid a$. Wykaż, że $\mathrm{NWD}(b, c) = 1$.

5. Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $\mathrm{NWD}(a, b) = \mathrm{NWD}(a - b, \min(a, b))$

6. Niech $a, b, d \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NWD}(a, d) = 1$ i $d \mid ab$. Udowodnij, że $d \mid b$.

7. Liczby $a, b, n \in \mathbb{N}$ spełniają warunki $a \mid n$, $b \mid n$ i $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$. Udowodnij, że $ab \mid n$

8. Niech $a, b, k \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

(a) $\mathrm{NWD}(ka, kb) = k \cdot \mathrm{NWD}(a, b)$;

(b) jeżeli $\mathrm{NWD}(k, b) = 1$, to $\mathrm{NWD}(ka, b) = \mathrm{NWD}(a, b)$.

9. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej k liczby $2k + 1$ i $9k + 4$ są względnie pierwsze.

10. Udowodnij, że każda liczba naturalna $n > 6$ jest sumą dwóch liczb naturalnych większych od 1 i względnie pierwszych.

11. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $\mathrm{NWD}(n! + 1, (n + 1)! + 1) = 1$.

12. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $\mathrm{NWD}(6, n) = 1$. Udowodnij, że $24 \mid n^2 - 1$

13. Stosując algorytm Euklidesa oblicz $\mathrm{NWD}(a, b)$ i znajdź $u, v \in \mathbb{Z}$ takie, że $\mathrm{NWD}(a, b) = au + bv$, dla

(a) $a = 329$, $b = 182$,

(b) $a = 1492$, $b = 1066$,

(c) $a = 1745$, $b = 1485$.

14. Niech $m, n \in \mathbb{N}$ i m jest liczbą nieparzystą. Udowodnij, że liczby $2^m - 1$ i $2^n + 1$ są względnie pierwsze.

15. Niech $a, n \in \mathbb{N}$ i $a > 1$. Udowodonij, że $\mathrm{NWD}\left(\dfrac{a^n - 1}{a - 1}, a - 1\right) = \mathrm{NWD}(a - 1, n)$.

16. Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{Z}$. Pokaż, że $\mathrm{NWD}(5a + 3b, 13a + 8b) = \mathrm{NWD}(a, b)$.

17. Niech $n \in \mathbb{N}$. Pokaż, że $\mathrm{NWW}(1, 2, 3, \ldots, 2n) = \mathrm{NWW}(n + 1, n + 2, \ldots, 2n)$.

18. Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $\mathrm{NWD}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{NWD(a,b)} - 1$.

Analiza - klasa 1a Zestaw 18. 12.03.2021

Liczby pierwsze

Definicja. Liczba $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ jest *pierwsza* wtw. gdy dla każdej liczby całkowitej a zachodzi implikacja $a \mid p \Rightarrow a = p$ lub $a = 1$. (Równoważnie, liczby pierwsze to te liczby naturalne, które mają dokładnie dwa różne dzielniki naturalne). Czasami zbiór liczb pierwszych jest oznaczany symbolem $\mathbb{P}$.

Liczbę $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, która nie jest liczbą pierwszą, nazywamy *liczbą złożoną*.

Stw. 1. Liczba $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ jest złożona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba pierwsza p taka, że $p \leqslant \sqrt{n}$ i $p \mid n$.

Tw. 1. Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Stw. 2. Liczby pierwsze mają następujące własności:

(i) Jeżeli $p, q \in \mathbb{P}$ i $p \neq q$, to $\mathrm{NWD}(p, q) = 1$.

(ii) Jeżeli $p \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{N}$ i $p \nmid a$, to $\mathrm{NWD}(p, a) = 1$.

(iii) Jeżeli $p \in \mathbb{P}$, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ oraz $p \mid a_1 a_2 \ldots a_k$, to $p \mid a_i$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

(iv) Jeżeli $p, q_1, q_2, \ldots, q_k \in \mathbb{P}$ i $p \mid q_1 q_2 \ldots q_k$, to $p = q_i$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Tw. 3 (Zasadnicze twierdzenie arytmetyki) Każdą liczbę naturalną $n > 1$ można przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych, tzn.

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k,$$

gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{P}$. Ponadto, przedstawienie takie jest jednoznaczne z dokładnością do kolejności czynników.

Wniosek 4. (Postać kanoniczna liczby naturalnej) Każdą liczbę naturalną $n > 1$ można przedstawić jednoznacznie w postaci

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{P}$, $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$, oraz $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$.

Stw. 5. Liczby $a, b \in \mathbb{N}$ zapisano w postaci

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}, \qquad b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k},$$

gdzie $p_i \in \mathbb{P}$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$ oraz $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$. Wówczas

(i) $a \mid b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha_i \leqslant \beta_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$,

(ii) $\mathrm{NWD}(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min(\alpha_k, \beta_k)}$,

(iii) $\mathrm{NWW}(a, b) = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)}$.

---

1. Sprawdź, czy liczby (a) 347, (b) 481 są pierwsze.

2. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczby $4p^2 + 1$ i $6p^2 + 1$ też są pierwsze.

3. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n > 1$. Udowodnij, że każda liczba postaci (a) $4 \cdot 2^{2^n} + 1$, (b) $5 \cdot 3^{3^n} - 2$ jest złożona.

4. Niech $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że liczba $2^n + 1$ jest pierwsza. Udowodnij, że n jest potęgą dwójki.

5. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n > 4$. Udowodnij, że n jest liczbą złożoną wtedy i tylko wtedy, gdy $n \mid (n-1)!$.

6. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje n kolejnych liczb naturalnych złożonych.

7. Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych p, q takie, że liczby $7p + q$ i $pq + 11$ też są pierwsze.

8. Liczba p jest pierwsza. Wykaż, że $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$.

9. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczby $p + 2$ i $p + 4$ też są pierwsze.

10. Liczby p i $p^2 + 2$ są pierwsze. Wykaż, że liczba $p^3 + 2$ też jest pierwsza.

11. Udowodnij, że liczb pierwszych postaci $4k + 3$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, jest nieskończenie wiele.

12. Znajdź wszystkie trójki liczb pierwszych p, q, r takie, że

$$pq + qr + rp > pqr.$$

13. Udowodnij, że każda liczba naturalna jest różnicą dwóch liczb naturalnych mających tyle samo dzielników pierwszych.

14. Dane sa dwie różne liczby pierwsze p, q. Udowodnij, że dla pewnych $k, l \in \mathbb{N}$ średnia arytmetyczna wszystkich dzielników liczby $p^k \cdot q^l$ jest całkowita.

15. Znajdź liczby $a, b, c \in \mathbb{N}$ takie, że $\mathrm{NWW}(a, b, c) \cdot \mathrm{NWD}(a, b, c) \neq abc$.

16. Niech $a, b, c \in \mathbb{N}$. Udowodnij tożsamość

$$\mathrm{NWW}(a, b, c) \cdot \mathrm{NWD}(ab, bc, ca) = abc.$$

17. Niech $a, b, c \in \mathbb{N}$. Udowodnij tożsamość

$$\mathrm{NWW}(a, b, c)^2 \cdot \mathrm{NWD}(a, b) \cdot \mathrm{NWD}(b, c) \cdot \mathrm{NWD}(c, a) = \\ = \mathrm{NWD}(a, b, c)^2 \cdot \mathrm{NWW}(a, b) \cdot \mathrm{NWW}(b, c) \cdot \mathrm{NWW}(c, a).$$

18. Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{N}$ i dla każdego $k \in \mathbb{N}$

$$a^{2k-1} \mid b^{2k}, \quad \text{oraz} \quad b^{2k} \mid a^{2k+1}.$$

Udowodnij, że $a = b$.

19. Liczby p, q, r są pierwsze, $n \in \mathbb{N}$, oraz

$$p^n + q^n = r^2.$$

Udowodnij, że $n = 1$.

Analiza - klasa 1a Zestaw 19. 30.03.2020

Teoria liczb – powtórzenie

1. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi $n^2 \mid (n+1)^n - 1$.

2. Niech $s(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n w zapisie dziesiętnym. Udowodnij, że jeśli $s(n) = s(2n)$, to $9 \mid n$.

3. Niech $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$. Wykaż równoważność warunków

(i) $\mathrm{NWD}(a, m) = 1$,

(ii) Istnieje liczba całkowita b taka, że $ab \equiv 1 \pmod{m}$.

Następnie udowodnij, że w zbiorze $\{1, 2, \ldots, m-1\}$ jest tylko jedna taka liczba b.

Uwaga: Liczbę b nazywamy odwrotnością liczby a modulo m.

4. Znajdź najmniejsze $x \in \mathbb{N}$ takie, że $18x \equiv 1 \pmod{97}$.

5. Niech $x, y \in \mathbb{N}$, $x, y > 1$ i $\mathrm{NWD}(x, y) = 1$, liczba $n \in \mathbb{N}$ jest parzysta. Udowodnij, że

$$x + y \nmid x^n + y^n.$$

6. Czy iloczyn (a) dwóch, (b) trzech kolejnych liczby naturalnych może być k-tą potęgą liczby naturalnej dla $k > 1$?

7. Znajdź największą liczbę całkowitą n taką, że $n + 10 \mid n^3 + 100$.

8. Niech $k > 1$, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ to pierwsze k liczb pierwszych i $m = p_1 p_2 \ldots p_k$. Udowodnij, że liczby $m - 1$ i $m + 1$ nie są kwadratami.

9. Niech $n = 3^{105} + 4^{105}$. Znajdź reszty z dzielenia n przez 7, 11 i 13.

10. Wyznacz dwie ostatnie cyfry liczby (a) $99^{99} - 51^{51}$, (b) 2021^{2021}.

11. Niech $n \in \mathbb{N}$ i liczba $2^n - 1$ jest pierwsza. Udowodnij, że n jest liczbą pierwszą.

12. Znajdź liczby $x, y \in \mathbb{Z}$ takie, że $\mathrm{NWD}(a, b) = ax + by$ dla (a) $a = 6105, b = 1121$, (b) $a = 1591, b = 1517$.

13. Znajdź liczby naturalne a, b takie, że $a \nmid b$, $b \nmid a$ oraz $\mathrm{NWD}(a, b) = 18$, $\mathrm{NWW}(a, b) = 630$.

14. Niech $x, y \in \mathbb{Z}$ i $23 \mid 3x + 2y$. Wykaż, że $23 \mid 17x + 19y$.

15. Udowodnij, że liczb pierwszych postaci $3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, jest nieskończnenie wiele.

16. Liczby naturalne $n, a_1, a_2, \ldots, a_n$ są nieparzyste. Udowodnij, że

$$\mathrm{NWD}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathrm{NWD}\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \ldots, \frac{a_{n-1} + a_n}{2}, \frac{a_n + a_1}{2}\right).$$

17. Niech $k, n \in \mathbb{N}$ i liczba k jest nieparzysta. Udowodnij, że

$$1 + 2 + \ldots + n \mid 1^k + 2^k + \ldots + n^k.$$

18. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n takie, że $3 \mid n \cdot 2^n + 1$.

19. Niech $a, m, n \in \mathbb{N}$, $a > 1$ i $a^m + 1 \mid a^n + 1$. Udowodnij, że $m \mid n$.

20. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $3^{2^n} - 1$ przez 2^{n+3}.

Analiza - klasa 1a   Zestaw 20.   13.4.2021

Funkcje

Definicja. Niech A, B to dowolne zbiory. *Iloczyn kartezjański zbiorów* A i B jest to zbiór $A \times B$, którego elementami są wszystkie pary uporządkowane (a, b) takie, że $a \in A$ i $b \in B$.

Definicje. Jeżeli każdemu elementowi x zbioru X został przyporządkowany dokładnie jeden element y zbioru Y, to mówimy, że została określona *funkcja* przekształcająca zbiór X w zbiór Y. Jeśli taką funkcję oznaczymy przez f, to piszemy $f : X \to Y$.

- Jeżeli $y \in Y$ jest elementem przyporządkowanym elementowi $x \in X$, to piszemy $y = f(x)$ i mówimy, że y jest *wartością* funkcji f dla *argumentu* x
- Zbiór X nazywamy *dziedziną* funkcji f, a zbiór Y *przeciwdziedziną* funkcji f.
- Dla podzbioru $U \subset X$ *obrazem* zbioru U względem funkcji f nazywamy zbiór
$$f(U) = \{f(x) \in Y : x \in U\}.$$
Zbiór $f(X)$ nazywamy *obrazem funkcji f*.
- Funkcję f taką, że dla dowolnych $u, v \in X$ zachodzi $f(u) = f(v)$ nazywamy funkcją *stałą*.
- Funkcję $f : X \to X$ taką, że dla każdego $x \in X$ jest $f(x) = x$ nazywamy *identycznością* na zbiorze X.
- Dwie funkcje $f, g : X \to Y$ są równe, jeżeli dla każdego $x \in X$ zachodzi $f(x) = g(x)$. Możemy wówczas napisać $f = g$.
- Powiemy, że funkcja f jest *różnowartościowa* (1 - 1), jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ z równości $f(x_1) = f(x_2)$ wynika, że $x_1 = x_2$ czyli
$$\forall_{x_1,x_2 \in X}\ f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$
Piszemy wówczas $f : X \overset{1-1}{\to} Y$. Funkcje różnowartościowe są też nazywane *injekcjami.*
- Powiemy, że funkcja f jest *na*, jeżeli każdy element Y jest wartością funkcji f, czyli
$$\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X}\ y = f(x).$$
Piszemy wówczas $f : X \overset{\text{na}}{\to} Y$. Funkcje „na” są nazywane są *surjekcjami.*
- Funkcję, która jest jednocześnie różnowartościowa i „na” nazywamy *bijekcją* lub funkcją *wzajemnie jednoznaczną* i piszemy $f : X \underset{\text{na}}{\overset{1-1}{\to}} Y$.

Definicja. *Złożenie funkcji* $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ jest to funkcja $g \circ f : X \to Z$, której wartość dla elementu $x \in X$ jest zdefiniowana jako
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Definicja. Funkcja $g : Y \to X$ jest *funkcją odwrotną* do funkcji $f : X \to Y$, jeżeli $g \circ f$ jest identycznością na zbiorze X i $f \circ g$ jest identycznością na zbiorze Y. Funkcję g oznaczamy wówczas f^{-1}.

Twierdzenie. Funkcja $f : X \to Y$ posiada funkcję odwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy f jest bijekcją.

Wniosek. Jeżeli funkcja f ma funkcję odwrotną, to tylko jedną.

---

1. Wyznacz obrazy funkcji:

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2n + 3$,
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 7$,
(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$,
(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x + 2| - 2$.
(e) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$,

Która z tych funkcji jest injekcją, surjekcją czy bijekcją?

2. Niech $k \in \mathbb{N}$. Czy funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n}$, jest różnowartościowa?

3. Podaj przykłady funkcji (a) $f : \mathbb{Z} \overset{1-1}{\to} \mathbb{N}$, (b) $g : \mathbb{N} \overset{\text{na}}{\to} \mathbb{Z}$.

4. Podaj przykład funkcji przekształcającej zbiór $\mathbb{N}$ **na** zbiór liczb wymiernych dodatnich.

5. Niech $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NWD}(m, n) = 1$, $c \in \mathbb{Z}$ i $A_n = \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$. Dla $k \in \mathbb{Z}$ niech $r(k)$ oznacza resztę z dzielenia k przez n. Niech
$$B = \{km + c \in \mathbb{Z} : k = 0, 1, 2, \ldots, n\}$$
Udowodnij, że $r : B \to A_n$ jest bijekcją.

6. Udowodnij łączność złożenia funkcji, czyli równość $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

7. Podaj przykład funkcji $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takich, że $f \circ g \neq g \circ f$.

8. Niech $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Każdą funkcję wzajemnie jednoznaczną $\pi : A_n \to A_n$ nazywamy *permutacją* zbioru n-elementowego A_n. Permutację $\tau : A_n \to A_n$ taką, że dla pewnych $k, l \in A_n$, $k \neq l$, zachodzi $\tau(k) = l$ i $\tau(l) = k$ oraz $\tau(m) = m$ dla $m \neq k, l$ nazywamy *transpozycją* (elementów k i l). Udowodnij, że każdą permutację zbioru A_n można przedstawić jako złożenie transpozycji.

9. Rozstrzygnij, czy istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest równość
$$f(f(n)) = f(n) + 1$$
oraz $1 \in f(\mathbb{N})$.

10. Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełnia warunek: jeżeli $m - n$ jest liczbą pierwszą, to $f(m) \neq f(n)$ Czy zbiór wartości funkcji f może być skończony? Jeżeli tak, to wyznacz najmniejszą możliwą liczbę jego elementów.

Analiza - klasa 1a Zestaw 21. 16.04.2020

Funkcje liczbowe I

Przedziały liczb rzeczywistych. Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	przedział (obustronnie) otwarty
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$	przedział (obustronnie) domknięty
$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$	przedział lewostronnie otwarty i prawostronnie domknięty
$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$	przedział prawostronnie otwarty i lewostronnie domknięty
$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$	półprosta domknięta
$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$	półprosta otwarta
$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}$	półprosta domknięta
$(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$	półprosta otwarta

Funkcje liczbowe

Definicja. *Funkcja liczbowa* jest to dowolna funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}$.

Często funkcja liczbowa jest podana samym wzorem bez wskazania dziedziny. Wówczas przyjmujemy, że dziedziną takiej funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wzór definiujący funkcję ma sens. Na przykład

- dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{x+1}$ jest zbiór $D_f = [-1, +\infty)$,

  Przypomnienie: Jeżeli k jest liczbą naturalną parzystą i $x \geqslant 0$, to przyjmujemy, że $\sqrt[k]{x}$ oznacza jedyną liczbę **nieujemną** t taką, że $t^k = x$
- dziedziną funkcji $g(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ jest zbiór $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Jeżeli chcemy napisać, że mamy do czynienia z funkcją zmiennej x bez oznaczania jej literą f, g itp., możemy użyć notacji z symobolem $\mapsto$, np.

$$x \mapsto \sqrt{1-x^2}, \qquad x \mapsto 7x^2 - 2x + 5.$$

Funkcje liczbowe $f, g : D \to \mathbb{R}$ (czyli określone na tym samym zbiorze D) możemy dodawać, odejmować i mnożyć oraz mnożyć przez liczbę c. Stosujemy wtedy oznaczenia $f+g$, $f-g$, fg i cf. Jeśli funkcja f nie znika w żadnym punkcie, tzn. jeśli $f(x) \neq 0$ dla każdego $x \in D$, to możemy też rozważać iloraz $\frac{g}{f}$.

Ważne klasy funkcji

- funkcje stałe: $f(x) = c$, gdzie c jest ustaloną liczbą rzeczywistą;
- funkcje liniowe: $f(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$;
- funkcje kwadratowe: $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$;
- wielomiany: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$; gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Jeśli $a_n \neq 0$, to mówimy, że f jest wielomianem stopnia n;
- funkcje wymierne: $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, gdzie g i h są wielomianami.

Funkcje można również definiować za pomocą kilku wzorów, rozbijając jej dziedziną na kilka rozłącznych podzbiorów. Na przykład funkcję zwaną *wartością bezwzględną* lub *modułem* $f(x) = |x|$ można zdefiniować w następujący sposób:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{gdy } x \geqslant 0 \\ -x & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

Funkcję $f(x) = |x|$ można również zdefiniować wzorem $f(x) = \sqrt{x^2}$.

Inne przykłady to funkcja *signum*:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{gdy } x < 0 \\ 0 & \text{gdy } x = 0 \\ 1 & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$$

oraz *funkcja Dirichleta*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Definicja. *Wykresem* funkcji liczbowej $f : D_f \to \mathbb{R}$ nazywamy podzbiór płaszczyzny

$$W_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in D_f\}.$$

---

1. Zaznacz zbiór rozwiązań nierówności na prostej i zapisz go jako sumę rozłącznych przedziałów i półprostych

(a) $5x - 3 \geqslant -7$

(b) $|x| > 2$

(c) $|x+2| \leqslant 5$

(d) $\sqrt{x+1} < 3$

(e) $x(x-1) \geqslant 0$

(f) $(2x+1)^2 - \frac{1}{4} < 0$

(g) $(x+1)(x-2)(x-4) \geqslant 0$

(h) $(3x+5)(x+3)(x-2)^2(4-x) \leqslant 0$

(i) $(x^2-9)(x^2+9)(x+2) < 0$

(j) $(x^2+2x+2)(4x-5)(4-5x)(6x-5) \leqslant 0$

2. Wyznacz dziedziny funkcji

(a) $f(x) = \dfrac{3x^2+2x-7}{(x^2-2)(x+1)(x^2+2)}$,

(b) $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$,

(c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$,

(d) $f(x) = \sqrt{\sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{2x+1}}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$,

(f) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$,

(g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x} - \sqrt[4]{2-x}}$.

3. Opisz, jak z wykresu funkcji $f(x)$ otrzymać wykres funkcji

(a) $g(x) = f(x+a)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$,
(b) $g(x) = f(x) + a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$,
(c) $g(x) = f(ax)$, gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
(d) $g(x) = af(x)$, gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4. Naszkicuj wykresy funkcji i wyznacz ich zbiory wartości

(a) $f(x) = x^2 + 2x - 2$,
(b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$,
(c) $f(x) = \big||x-2| - 2\big| - 2$.

5. Znajdź złożenia $f \circ g$ i $g \circ f$ funkcji $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} + 1$ i $g(x) = \sqrt{x-1}$.

6. Funkcja $f(x) = \dfrac{cx}{2x+3}$ spełnia warunek $f \circ f(x) = x$ dla każdego $x \neq -\frac{3}{2}$. Wyznacz współczynnik c.

7. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$. Oblicz sumę $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{j}{k}\right)$.

8. Wyznacz dziedzinę i narysuj wykres funkcji

$$f(x) = \sqrt{x \cdot \frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1} - \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}}{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1} + \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}}}$$

9. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Wyznacz $f \circ f \circ f(2021)$

10. Punkt P jest środkiem symetrii wykresu funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Udowodnij, że P należy do tego wykresu.

11. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność

$$f(x+y) \geqslant f(x) + f(y).$$

12. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest równość

$$f(x) \cdot f(y) - xy = f(x) + f(y) - 1.$$

Analiza - klasa 1a Zestaw 22. 14.05.2021

Funkcje liczbowe II

Załóżmy, że $D \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem i $f : D \to \mathbb{R}$.

Monotoniczność funkcji. Mówimy, że funkcja f jest

- *rosnąca*, jeśli $f(x) < f(y)$, gdy $x < y$,
- *malejąca*, jeśli $f(x) > f(y)$, gdy $x < y$,
- *niemalejąca*, jeśli $f(x) \leqslant f(y)$, gdy $x < y$,
- *nierosnąca*, jeśli $f(x) \geqslant f(y)$, gdy $x < y$,
- *monotoniczna*, jeśli jest niemalejąca lub nierosnąca,
- *ściśle monotoniczna*, jeśli jest rosnąca lub malejąca

Przykłady:

- funkcja $f(x) = \sqrt[3]{x}$ jest rosnąca,
- funkcja $g(x) = -x - x^3$ jest malejąca.

Przedział monotoniczności funkcji f jest to przedział, na którym funkcja f jest monotoniczna, który nie jest zawarty w większym przedziale o tej własności.

Przykład: funkcja $f(x) = x^2$ ma dwa przedziały monotoniczności: $(-\infty, 0]$, na którym maleje i $[0, +\infty)$, na którym rośnie.

Ekstrema funkcji. Powiemy, że funkcja f ma w punkcie $a \in D$

- *minimum (minimum globalne)*, jeżeli $f(x) \geqslant f(a)$ dla każdego $x \in D$. Wówczas piszemy $\min f = f(a)$ lub $\min\limits_D f = f(a)$;
- *maksimum (maksimum globalne)*, jeżeli $f(x) \leqslant f(a)$ dla każdego $x \in D$. Wówczas piszemy $\max f = f(a)$ lub $\max\limits_D f = f(a)$;
- *minimum lokalne*, jeżeli istnieje przedział $(b, c) \subset D$ taki, że $a \in (b, c)$ i $f(x) \geqslant f(a)$ dla każdego $x \in (b, c)$;
- *maksiumum lokalne*, jeżeli istnieje przedział $(b, c) \subset D$ taki, że $a \in (b, c)$ i $f(x) \leqslant f(a)$ dla każdego $x \in (b, c)$.

Minumum globalne lub maksimum globalne nazywamy *ekstremum globalnym*
Minumum lokalne lub maksimum lokalne nazywamy *ekstremum lokalnym.* Jeżeli

Przykłady:

- funkcja $f(x) = x^2$ ma w punkcie $a = 0$ minimum globalne i lokalne. Funkcja ta nie ma maksimów lokalnych.
- funkcja $g(x) = 1 - |x + 1|$ ma w punkcie $a = -1$ maksimum globalne i lokalne.
- funkcja $h(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ nie ma ekstremów lokalnych i globalnych

Raczej oczywisty fakt. Niech $a < c < b$ i $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

- Jeżeli funkcja f jest rosnąca na przedziale $(a, c]$ i malejąca na przedziale $[c, b)$, to f ma w punkcie c maksimum lokalne.
- Jeżeli funkcja f jest malejąca na przedziale $(a, c]$ i rosnąca na przedziale $[c, b)$, to f ma w punkcie c minimum lokalne.

Mówimy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest *ograniczona z góry*, jeżeli istnieje $A \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x) < A$ dla każdego $x \in D$ i *ograniczona z dołu*, jeżeli istnieje $B \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x) > B$ dla każdego $x \in D$. Funkcja f jest *ograniczona*, jeżeli f jest ograniczona z góry i z dołu.

---

1. Udowodnij, że funkcja $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ jest rosnąca. Wyznacz funkcję f^{-1}.

2. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji, zbadaj czy funkcja jest ograniczona z góry lub z dołu, wyznacz jej ekstrema globalne (jeśli istnieją).

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$

(d) $f(x) = |x + 1| - |x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$

(e) $f(x) = |4 - 5x| + |1 - 3x| + 2x + 4$, $x \in \mathbb{R}$

(f) $f(x) = \big||x - 2| - 2\big|$, $x \in \mathbb{R}$

(g) $f(x) = \dfrac{x - 3}{2x + 1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

(h) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(i) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

3. Wykaż, że funkcja $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ jest ściśle monotoniczna i wyznacz funkcję f^{-1}.

4. Funkcje $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$ są rosnące. Czy jest prawdą, że funkcje

$$g(x) = \min(f(x), g(x)), \qquad h(x) = \max(f(x), g(x))$$

również są rosnące?

5. Opisz ekstrema lokalne funkcji Dirichleta (zob. zestaw 21.).

6. Funkcja $f : D \to E$ jest bijekcją i jest ściśle monotoniczna. Wykaż, że funkcja f^{-1} też jest monotoniczna.

7. Funkcje f i g są ściśle monotoniczne. Co można powiedzieć o monotoniczności funkcji $f \cdot g$ i $f \circ g$?

8. Niech $a < b$. Wykaż, że każda funkcja monotoniczna $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ograniczona. Podaj przykład funkcji montonicznej $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, która jest nieograniczona z góry i z dołu.

9. **Funkcja wszędzie nieograniczona.** Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowano w następujący sposób: $f(x) = 0$ dla x niewymiernych i $x = 0$, oraz $f(\frac{m}{n}) = n$ dla $x = \frac{m}{n}$, gdzie $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ i ułamek $\frac{m}{n}$ jest nieskracalny. Pokaż, że funkcja f jest nieograniczona na każdym przedziale (a, b).

Analiza - klasa 1a Zestaw 23. 28.05.2021

Wartość bezwzględna

Przypomnienie:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{gdy } x \geqslant 0 \\ -x & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

Prawdziwy jest także wzór $|x| = \sqrt{x^2}$.

Liczba $|x|$ jest nazywana *wartością bezwzględną* lub *modułem* liczby x.

Twierdzenie (najważniejsze własności wartości bezwzględnej).

(i) $|x| \geqslant x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Jeśli $a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$ to nierówność $|x| \leqslant a$ jest równoważna **koniunkcji** nierówności $-a \leqslant x \leqslant a$.

(iii) Jeśli $a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$ to nierówność $|x| \geqslant a$ jest równoważna **alternatywie** nierówności $x \geqslant a$ lub $x \leqslant -a$.

(iv) Jeśli $x, y \in \mathbb{R}$ to

$$|xy| = |x| \cdot |y| \qquad \text{oraz gdy } y \neq 0 \quad \frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|.$$

(v) Jeśli $x, y \in \mathbb{R}$, to

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \quad \text{oraz} \quad \big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|.$$

---

1. Udowodnij (v) podpunkt Twierdzenia.

2. Rozwiąż równania:

(a) $|x+2| = 2(3-x)$

(b) $|x| - |x-2| = 2$

(c) $|x-3| + |x+4| = 9$

(d) $2|x| + |x-1| + |x+1| = 4$

(e) $|2x| + 3x - 5 = |x-1|$

(f) $\big||x+1| - 2\big| = 1$

(g) $\big||x+2| - |x|\big| = 2$

(h) $\big||x+1| - |x-1|\big| = 3$

3. Rozwiąż nierówności:

(a) $|5-2x| < 1$

(b) $|2-x| < 1-2x$

(c) $|3x-4| \geqslant 7$

(d) $|x-2| \leqslant |x+4|$

(e) $|x+2| - |x| > 1$

(f) $|2x+6| + |3x-12| + |x| < 20$

(g) $\big||x+3| - 2\big| \leqslant 1$

(h) $\big||x+3| - 2\big| > 3$

4. Wyznacz liczbę rozwiązań równania w zależności od wartości parametru $m \in \mathbb{R}$:

(a) $\big||x| - 3\big| = m$ (b) $\big||x| - m\big| = 1$ (c) $\big||x-m| - 3\big| = 1$

5. Rozwiąż równanie

$$2\Big|x - \big|x + |x-1|\big|\Big| = \Big|x + \big|x - |x+1|\big|\Big|.$$

6. Załóżmy, że $-1 < x, y < 1$. Wykaż, że

$$|x-y| < |1-xy|.$$

7. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$|x| + |y| + |z| \leqslant |y+z-x| + |z+x-y| + |x+y-z|.$$

8. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$|x| + |y| + |z| + |x+y+z| \geqslant |x+y| + |y+z| + |z+x|.$$

9. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność

$$\left|\frac{x}{1+x^2} - \frac{y}{1+y^2}\right| \leqslant |x-y|.$$

10. Wykaż, że jeśli $a, b, c \in \mathbb{R}$, to

$$\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right| \leqslant |b-c|.$$

11. Wyznacz wszystkie funkcje $f : [0,1] \to [0,1]$ takie, że dla dowolnych $x, y \in [0,1]$

$$|f(x) - f(y)| = |x-y|.$$

12. Wykaż, że dla dowolnych funkcji $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ istnieją $x, y \in [0,1]$ takie, że

$$|f(x) + g(y) - xy| \geqslant \frac{1}{4}.$$

13. Udowodnij, że dla dowlnych liczb rzeczywistych x, y, z spełniona jest nierówność

$$\frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} + \frac{|z|}{1+|z|}.$$

14. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \big(|a_i - a_j| + |b_i - b_j|\big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_i - b_j|.$$