Analiza - klasa 4a Zestaw 1. 2.9.2022

Funkcje wykładnicza i logarytmiczna

Przypomnienie: Jeśli $a > 0$ i $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{N}$, to

$$a^x = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p, \quad \text{oraz} \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Lemat o ciągach szybko zbieżnych do 0. Jeżeli $(a_n)_n$ jest ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $na_n \to 0$, to

$$\lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^n = 1.$$

Tw. 1. (istnienie i własności funkcji wykładniczej). Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ ciąg

$$a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

jest zbieżny do granicy $g(x) \in \mathbb{R}$, którą zapisujemy $\exp x$.

Funkcję $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy *funkcją wykładniczą* lub *eksponentą*. Ma ona następujące własności:

(i) $\exp(x) > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz $\exp(x) \geqslant 1$ dla $x \geqslant 0$ i $\exp(x) \leqslant 1$ dla $x \leqslant 0$;

(ii) $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$;

(iii) jeżeli $x \in \mathbb{Q}$, to $\exp x = e^x$;

(iv) $\exp x \geqslant 1 + x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i $\exp x \leqslant \frac{1}{1-x}$ dla $x < 1$;

(v) funkcja exp jest ściśle rosnąca; jeśli $x_n \to +\infty$ to $\exp x_n \to +\infty$ i $\exp(-x_n) \to 0$.

Ze względu na punkty (ii) i (iii) ma sens zapis $e^x = \exp x$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Tw. 2. Obrazem funkcji exp jest cała półprosta $(0, +\infty)$. Zatem $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ jest bijekcją.

Definicja. *Logarytm naturalny* liczby dodatniej $y > 0$ jest to jedyna liczba $x \in \mathbb{R}$ taka, że $\exp(x) = y$. Piszemy wówczas

$$\ln y = x.$$

Stw. 3. Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\ln(\exp x) = x$; dla każdego $x > 0$ zachodzi $\exp(\ln x) = x$, czyli $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do exp.

Stw. 4. (Własności logarytmu naturalnego)

(i) Funkcja $\ln x$ jest rosnąca;

(ii) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ dla dowolnych $x, y > 0$ i $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$;

(iii) dla każdego $x > 0$ spełnione są nierówności $1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1$;

(iv) jeżeli $t_n > 1$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $t_n \to 0$, to $\lim_{n\to\infty} \ln(1 + t_n) = 0 = \ln 1$;

(v) jeżeli $x_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $x_n \to x > 0$, to $\lim_{n\to\infty} \ln x_n = \ln x$;

(vi) jeżli $x_n > 0$ i $x_n \to +\infty$, to $\ln x_n \to +\infty$;

(vii) jeżli $x_n > 0$ i $x_n \to 0$, to $\ln x_n \to -\infty$.

---

1. Wykaż, że jeśli $(x_n)_n$ jest ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$, to $\lim_{n\to\infty} \exp x_n = \exp x$.

2. Niech $x \in \mathbb{R}$ i $(t_n)_n$ jest ciągiem liczb rzeczywistych różnych od zera i zbieżnym do zera. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} \frac{\exp(x + t_n) - \exp x}{t_n} = \exp x$.

3. Udowodnij, że $\exp x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

4. Wykaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $|e^x - 1 - x| \leqslant |x|^2 \cdot e^{|x|}$.

5. Niech $q \in (0, 1)$, $x, y \in \mathbb{R}$ i $x \neq y$. Udowodnij nierówność

$$(1 - q)\exp x + q \exp y > \exp\big((1 - q)x + qy\big).$$

6. Niech $a > 0$ i $x \in \mathbb{Q}$. Udowodnij, że $a^x = \exp(x \cdot \ln a)$.

7. Niech $a > 0$. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} n \cdot (\sqrt[n]{a} - 1)$.

8. Niech $x_n \to x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = e^x$.

9. Niech $t_n \to 0$ i $x > 0$. Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(x + t_n) - \ln x}{t_n} = \frac{1}{x}$.

10. Udowodnij, że ciąg $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ jest zbieżny.

11. Oblicz granice

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$, (b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

12. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_m > 0$. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \ldots + \sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^n$.

13. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{\exp x_1 + \exp x_2 + \ldots + \exp x_n}{n} \geqslant \exp\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right).$$

Analiza - klasa 4a Zestaw 2. 14.9.2022

Funkcje wykładnicza i logarytmiczna II

Definicja (Potęga o wykładniku rzeczywistym). Niech $a > 0$. Z zadania 6 zestawu 4a.1 wiemy, że jeśli $x \in \mathbb{Q}$, to $a^x = \exp(x \ln a)$. Ostatnia równość ma sens dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, więc definiujemy potęgę liczby a z wykładnikiem $x \in \mathbb{R}$ wzorem

$$a^x = \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}.$$

Funkcję $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ daną wzorem $f(x) = a^x$ nazywamy *funkcją wykładniczą* o podstawie a.

Tw. 1. Jeżeli $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbb{R}$ to

(i) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ i $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ (ii) $a^{xy} = (a^x)^y$, (iii) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$,

Tw. 2. Obrazem funkcji wykładniczej o podstawie $a \neq 1$ jest zbiór $(0, +\infty)$. Ponadto

- Jeżeli $a > 1$ to funkcja $x \to a^x$ jest ściśle rosnąca Jeśli $x_n \to +\infty$, to $a^{x_n} \to +\infty$ i $a^{-x_n} \to 0$.
- Jeżeli $a < 1$ to funkcja $x \to a^x$ jest ściśle malejąca Jeśli $x_n \to +\infty$, to $a^{x_n} \to 0$ i $a^{-x_n} \to +\infty$.

Definicja (logarytm). Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Wówczas funkcja $a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ jest bijekcją, ma więc funkcję odwrotną. *Logarytmem* o podstawie a z liczby $y > 0$ nazywamy jedyną liczbę rzeczywistą x taką, że $a^x = y$. Piszemy wówczas

$$\log_a y = x.$$

Logarytm o podstawie $a = 10$ nazywamy *logarytmem dziesiętnym* i zapisujemy $\log y = \log_{10} y$. Oczywiście $\ln y = \log_e y$.

Tw. 3. Jeżeli $a > 0$ i $a \neq 1$, to

(i) $\log_a 1 = 0$ i $\log_a a = 1$;

(ii) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ dla $x, y > 0$;

(iii) $\log_a (x^y) = y \cdot \log_a x$ dla $x > 0$ i $y \in \mathbb{R}$.

Tw. 4. Funkcja $x \to \log_a x$, gdzie $x \in (0, +\infty)$ jest rosnąca dla $a > 1$ i malejąca dla $a < 1$, a jej obrazem jest cały zbiór liczb rzeczywistych.

Tw. 5. (Zmiana podstawy logarytmu) Niech $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $x > 0$. Wówczas

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

---

1. Czy liczba niewymierna podniesiona do potęgi niewymiernej może dać liczbę wymierną?

2. Wykaż, że dla $a_1, a_2, \ldots, a_k > 0$, $a_i \neq 1$

$$\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \ldots \cdot \log_{a_{k-1}} a_k \cdot \log_{a_k} a_1 = 1.$$

3. Wykaż, że dla $a, b > 0$, $a \neq 1$, oraz $p \neq 0$

$$\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b.$$

4. Uprość wyrażenia

(a) $\log_{3\sqrt{3}} 27$

(b) $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$

(c) $(\sqrt{2})^{\log_2 9}$

(d) $\left(\sqrt[3]{9}\right)^{\frac{1}{5 \log_5 3}}$

(e) $\log 5 \cdot \log 20 + (\log 2)^2$

(f) $\log_{\sqrt{2}} 27 \cdot \log_9 16$

(g) $\log_{16} \sqrt{5} \cdot \log_{25} \sqrt[3]{7} \cdot \log_{\frac{1}{49}} 32$

(h) $\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$

5. Dla jakich par liczb naturalnych m, n, gdzie $m > 1$, liczba $\log_m n$ jest wymierna?

6. Znajdź granice ($a > 0$ i $a \neq 1$)

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\log_a(n+1) - \log_a n)$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n^t}$, $t > 0$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_n x$, $x > 0$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log_a n}$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\log_a n}}$,

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_n(n+1)$.

7. Wykaż, że jeśli $0 < a < 1 < b$, to

$$\log_a b + \frac{1}{4} \log_b a + 1 \leqslant 0.$$

8. Wykaż, że dla $x, y > 0$

$$\frac{1 - x^{-y}}{y} \leqslant \ln x \leqslant \frac{x^y - 1}{y}.$$

9. Niech $a, b, c, x > 0$ i $a, b, c, abc \neq 1$. Wiedząc, że $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$, $\log_c x = 6$, oblicz $\log_{abc} x$.

10. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n, a > 0$ i $x_1 x_2 \ldots x_n = a$. Udowodnij, że

$$(\log_a x_1)^2 + (\log_a x_2)^2 + \ldots + (\log_a x_n)^2 \leqslant \frac{1}{n}.$$

11. Niech $n \geqslant 2$. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n > 1$

$$\log_{a_1}(a_2) + \log_{a_2}(a_3) + \ldots + \log_{a_{n-1}}(a_n) + \log_{a_n}(a_1) \geqslant n.$$

12. Niech $n \geqslant 2$. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n, x > 1$

$$\log_{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}(x) \leqslant \sqrt[n]{\log_{a_1}(x) \cdot \log_{a_2}(x) \cdot \ldots \cdot \log_{a_n}(x)}.$$

Analiza - klasa 4a Zestaw 3. 21.9.2022

Funkcje wykładnicza i logarytmiczna III

1. Niech $x > 0$. Udowodnij nierówność $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$.

2. Dany jest ciąg liczb dodatnich (a_n) taki, że $a_n \neq 1$ i $a_n \to 1$. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{a_n - 1} = 1.$$

3. Oblicz granicę ciągu o wyrazach

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n^2}\right).$$

4. **Sinus i cosinus hiperboliczny**. Niech

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Udowodnij, że funkcja $\cosh x$ maleje na półprostej $(-\infty, 0]$ i rośnie na $[0, +\infty)$, natomiast funkcja $\sinh x$ jest ściśle rosnąca.

(b) Wyznacz funkcję odwrotną do $\cos hx$ na $[0, +\infty)$ i funkcję odwrotną do $\sinh x$.

(c) Udowodnij tożsamość zwaną *jedynką hiperboliczną*: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

(d) Udowodnij tożsamości:

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

5. **Tangens hiperboliczny**. Niech

$$\mathrm{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Udowodnij, że funkcja $\mathrm{tgh} x$ jest rosnącą bijekcją $\mathbb{R}$ na przedział $(-1, 1)$ i wyznacz jej funkcję odwrotną.

6. Rozwiąż równania:

(a) $7^{x-5} = 9^{5-x}$,

(b) $7^{x+1} + 7^x = 56$,

(c) $x^{x^2-5x+6} = 1$.

(d) $8^x - 3\cdot 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$,

(e) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$,

(f) $2^{3x} \cdot 7^{x-2} = 4^{x-1}$,

(g) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$,

(h) $8^x(3x+1) = 4$,

(i) $\sqrt{x^x} = x^{\sqrt{x}}$,

(j) $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$.

7. Rozwiąż równanie $2^{-|x|} = \frac{|x+1| + |x-1|}{2}$.

8. Rozwiąż równanie $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

9. Rozwiąż równania

(a) $\log_{(x+2)} 16 = 2$,

(b) $\log_x 7 + \log_{x^2} 7 = 6$,

(c) $\log_4\left(2\log_3\left(1 + \log_2(1+\log_2 x)\right)\right) = \frac{1}{2}$

(d) $\frac{1}{5 - 4\log x} + \frac{4}{1+\log x} = 3$,

(e) $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

(f) $\log_4(x+2) \cdot \log_x 2 = 1$,

(g) $x^{\frac{1}{4}(\log x + 7)} = 10^{\log x + 1}$

(h) $x^{\ln x} = e$

(i) $x^{1/\log x} = 10^{x^4}$

(j) $x^{\log^2 x + \log(x^3) + 3} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{1+x}-1} - \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}}$

10. Dla danych liczb rzeczywistych $a, b > 0$, $b \neq 1$ rozwiąż równanie

$$1 + \log_b(2\log a - x)\cdot \log_x b = \frac{2}{\log_b x}.$$

11. Dla danej liczby $a > 0$ rozwiąż równanie

$$1 + \log_x \frac{4-x}{10} = \big(\log(\log a) - 1\big) \cdot \log_x 10.$$

Analiza - klasa 4a Zestaw 4. 23.9.2022

Funkcje wykładnicza i logarytmiczna IV

1. Rozwiąż nierówności

(a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} \leqslant 8$

(b) $\frac{1}{3^{x^2}} \cdot 9^{x+1} > \frac{1}{729}$

(c) $8^x - 2 \leqslant 18 \cdot 4^{x-1} - 3 \cdot 2^{x+1}$

(d) $x^2 \cdot 2^x + x \cdot 2^{x-1} > 0$

(e) $\frac{1}{2^x - 1} > \frac{1}{1 - 2^{x-1}}$

(f) $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2^{x+1} \geqslant 1$

(g) $3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} > 4^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

(h) $x^{\frac{3}{4}x} < (\sqrt{x})^{x^2-x+1}$

(i) $(x^2 + x + 1)^x < 1$

(j) $|x|^{x^2-x-2} < 1$

2. Rozwiąż nierówności

(a) $\log_3(x^2 - 1) < 1$

(b) $\ln(x + 1) - \ln x < 2$

(c) $\log_{(2x-3)} x \leqslant 1$

(d) $\log_x(x - 1) \geqslant 2$

(e) $\log_{(x-3)} \frac{x-2}{x-4} \geqslant 1$

(f) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x+1} < 1 + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{4 - x^2}$

(g) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 > (\log_{4x} 2)^2$

(h) $\frac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} > 3$

3. Niech $a \in (0, 1)$. Rozwiąż nierówność

$$\log_a x > 6 \log_x a - 1.$$

4. Niech $a > 1$. Rozwiąż nierówność

$$2 \log_x a + \log_{ax} a + 3 \log_{a^2x} a > 0.$$

5. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji

$$f(x) = 2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

6. Niech $a \in (0, 1)$. Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = a^x + (1 - a)^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Rozwiąż nierówności $f(x) < 1$ i $f(x) > 1$.

7. Wykaż, że jeśli $x, y > 1$, to

$$\ln x \cdot \ln y \leqslant \ln \sqrt{xy} \cdot \ln \frac{x+y}{2}.$$

8. Wyznacz największą wartość funkcji $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \ln(x) + \ln(1 - x).$$

9. Wykaż, że dla $x > 0$

$$\ln x \leqslant \frac{1}{2}(x^2 - 1).$$

10. Liczba rzeczywista x spełnia warunek $\log_2(\log_{10}(x - 1)) > 0$. Określ znaki liczb $\log_3(\log_{10}(x - 1))$ i $\log_2(\log_9(x - 1))$.

Analiza - klasa 4a Zestaw 5. 30.9.2022

Funkcje wykładnicza i logarytmiczna V (powtórzenie)

1. Rozwiąż równania

(a) $16^x + 1 = 2^8 + 8^4$,

(b) $\log(x+5) + \log(x-4) = \log(x-3) + \log(x-2)$,

(c) $\log(\frac{1}{2} + x) = \log\frac{1}{2} - \log x$,

(d) $x + \log(1+2^x) = x\log 5 + \log 6$,

(e) $(2x+1)^{\ln(2x+1)-3} = \dfrac{1}{e^2}$.

2. Rozwiąż nierówności

(a) $5^{2x+1} > 5^x + 4$,

(b) $2^{x^2-6x+3} \geqslant \dfrac{1}{4}$

(c) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x < 2$,

(d) $\log_x \dfrac{x+3}{x-1} > 1$.

3. Oblicz wartość wyrażenia

$$\frac{\log_6^2 3 + \log_6 16}{\log_6^3 \cdot \log_6 48 + \log_6^2 4}.$$

4. Niech $a, b > 0$, $ab \neq 1$ i $\log_{ab} a = 4$. Oblicz $\log_{ab} \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$.

5. Niech $a, b, c > 0$ i $a, b, ab \neq 1$. Oblicz wartość wyrażeń

(a) $(\log_{ab} a)(\log_{ab}(ab^2)) + (\log_{ab} b)^2$,

(b) $a^{\sqrt{\log_a b}} + b^{\sqrt{\log_b a}}$.

6. Oblicz granice ciągów

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+e^n)}{n}$, (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \cdot \sinh\frac{1}{n}$, (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\cosh\frac{1}{n} - 1\right)$.

7. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\frac{\cosh x + \cosh y}{2} \geqslant \cosh\frac{x+y}{2},$$

natomiast dla $x, y \geqslant 0$ zachodzi także nierówność

$$\frac{\sinh x + \sinh y}{2} \geqslant \sinh\frac{x+y}{2}.$$

8. Udowodnij, że jeśli $x \in \mathbb{R}$, to

$$\cosh x \geqslant 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

9. Oblicz granice ciągów

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (1 + \ln(n+1) - \ln n)^n$,

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(3n+1)\cdot 3^n + n2^n}{n \cdot 3^{n+1} - n2^n}\right)^n$,

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n+2} + n\sqrt{n+1} - (n+1)\sqrt{n}}{n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}\right)^n$,

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)\sqrt[n]{e^2} - 1}{n}\right)^n$

Wskazówka: Skorzystaj z tego, że jeśli $x_n \to x$, to $\left(1 + \dfrac{x_n}{n}\right)^n \to e^x$.

10. Udowodnij, że

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(\ln n)^{2022}} = +\infty$,

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \log_n(2022) = +\infty$,

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) < +\infty$.

Analiza - klasa 4a   Zestaw 6.   12.10.2022

Granica funkcji

Definicja. Niech $A \in \mathbb{R}$. Mówimy, że liczba $b \in \mathbb{R}$ jest *punktem skupienia* zbioru A, jeżeli istnieje ciąg liczb $a_n \in A \setminus \{b\}$ taki, że $a_n \to b$. Przyjmujemy, że $+\infty$ jest punktem skupienia zbioru A niegoraniczonego z góry, a $-\infty$ jest punktem skupienia zbioru A niegoraniczonego z dołu. Umawiamy się, że $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$.

Przykłady:

- Każda liczba z przedziału $[a, b]$ jest punktem skupienia przedziału (a, b) jak i przedziału $[a, b]$.
- Jedyne punkty skupienia zbioru $\mathbb{Z}$ to $\pm\infty$.
- Każda liczba rzeczywista jest punktem skupienia zbioru liczb wymiernych $\mathbb{Q}$.

Definicja Heinego (ciągowa) granicy funkcji w punkcie. Niech $A \subset \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A i $f : A \to \mathbb{R}$. Mówimy, że $g \in \overline{\mathbb{R}}$ jest granicą funkcji f w punkcie b, jeżeli dla każdego ciągu $a_n \in A \setminus \{b\}$, takiego że $a_n \to b$ zachodzi $f(a_n) \to g$. Piszemy wówczas

$$\lim_{x\to b} f(x) = g \qquad \text{lub} \qquad f(x) \xrightarrow{x\to b} g.$$

Przykłady:

$$\lim_{x\to 0}(x^2+1) = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|} = +\infty,\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2,\ \lim_{x\to -\infty} e^x = 0,\ \lim_{x\to\infty} \ln x = +\infty.$$

$\lim_{x\to 1^-} \lfloor x\rfloor = 0,$

Funkcja $f(x) = \lfloor x\rfloor$ nie ma granicy w żadnym punkcie $b \in \mathbb{Z}$.

Definicja granic jednostronnych. Mówimy, że g jest granicą prawostronną (lewostronną) funkcji f w punkcie $b \in \mathbb{R}$ jeżeli dla każdego ciągu $a_n \in A \cap (b, +\infty)$ ($a_n \in A \cap (-\infty, b)$) takiego, że $a_n \to b$ zachodzi $f(a_n) \to g$. Piszemy wówczas

$$\lim_{x\to b^+} f(x) = g \text{ (granica prawostronna)} \qquad \text{i } \lim_{x\to b^-} f(x) = g \text{ (granica lewostronna).}$$

Przykłady: $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty,\ \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty,\ \lim_{x\to 1^+}\lfloor x\rfloor = 1,$

Stw. 1. Niech $A \subset \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A i $f : A \to \mathbb{R}$. Wówczas $\lim_{x\to b} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x\to b^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = g$.

Stw. 2. (Własności arytmetyczne granicy funkcji) Niech $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A i istnieją granice

$$\lim_{x\to b} f(x) = c, \qquad \lim_{x\to b} g(x) = d, \qquad b, c \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Wówczas

(i) jeśli jest określona suma $c + d$, to $\lim_{x\to b}(f(x) + g(x)) = c + d$.

(ii) jeśli jest określona różnica $c - d$, to $\lim_{x\to b}(f(x) - g(x)) = c - d$.

(iii) jeśli jest określony iloczyn $c \cdot d$, to $\lim_{x\to b} f(x)g(x) = c \cdot d$.

(iv) jeśli jest określony iloraz $\frac{c}{d}$, to $\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c}{d}$.

Stw. 3. (Granica złożenia funkcji) Niech $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$. Jeżeli

- $f(A) \subset B$,
- $a \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A, $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$ i $f(x) \neq b$ dla x dostatecznie bliskich a,
- b jest punktem skupienia zbioru B i $\lim_{y\to b} g(y) = c \in \overline{\mathbb{R}}$,

to $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.

Tw. 4. (Definicja Cauchy'ego granicy funkcji) Niech $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ jest punktem skupienia zbioru A, $f : A \to \mathbb{R}$ i $g \in \mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne:

(i) Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie a.

(ii) $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in A\setminus\{a\}} \ |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - g| < \varepsilon$.

---

1. Udowodnij, korzystając z definicji granicy funkcji w punkcie, że

(a) $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ (b) $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ (c) $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ (d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$

2. Ważne granice. Udowodnij, że

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (c) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ (e) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ (d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[k]{x+1}-1}{x} = \frac{1}{k}$ (f) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

3. Udowodnij, że dla każdego $a > 0$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^a} = +\infty$ i $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a} = 0$

4. Oblicz granice, o ile istnieją, badając odpowiednie granice jednostronne.

(a) $\lim_{x\to 0}\lceil x\rceil$ (c) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\lfloor x\rfloor$

(b) $\lim_{x\to 0} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$ (d) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+\lfloor x\rfloor}$

5. Oblicz granice

(a) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ (c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ (d) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+2x^5}$

(f) $\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2+\ldots+x^{2022}-2022}{x^2-1}$

(g) $\lim_{x\to 1} \frac{x^{257}-257x+256}{(x-1)^2}$

(h) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}+\sqrt[8]{x}+\sqrt[10]{x}}{\sqrt{961x+1024}}$

(i) $\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt{x\sqrt{x}}-8}{\sqrt[4]{x}-2}$

(j) $\lim_{x\to -32} \frac{\sqrt{17-x}-7}{2+\sqrt[5]{x}}$

(k) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{27+6x-14x^7}-3}{x+x^2+x^3}$

(l) $\lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{3})\ldots(1-\sqrt[99]{x})}{(1-x)^{99}}$

(m) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}$

(n) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$

6. Oblicz granice

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}$, $\alpha,\beta\neq 0$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+\sin x}-\sqrt[3]{x-\sin x}}{\sqrt[3]{x}}$

(d) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\cdot\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(e^x-1)}{\ln^2(1+\sin x)}$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos^2 x)}{e^{2x}-2e^x+1}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$, $a>0$

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a-1}{x}$, $a\in\mathbb{R}$

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^{3x^2}-1)}{\operatorname{tg}^2(\sin(5x))}$

(j) $\lim_{x\to 0^+} (1+\sin x)^{\frac{a}{x}}$, $a>0$

7. Oblicz granice $\lim_{x\to 0^+} x^x$, $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$, $\lim_{x\to 0^+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$.

8. Sformułuj i udowodnij warianty definicji Cauchy'ego granicy funkcji (tw. 4) dla przypadków gdy $b=\pm\infty$ lub $g=\pm\infty$.

9. Wykaż, że **funkcja Dirichleta** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{gdy } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{gdy } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

nie ma granicy w żadnym punkcie.

10. Wykaż, że **funkcja Riemanna** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{gdy } x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\},\ x=\frac{p}{q},\ \text{gdzie } p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N},\ \mathrm{NWD}(p,q)=1\\ 0 & \text{gdy } x\notin\mathbb{Q} \text{ lub } x=0\end{cases}$$

ma w każdym punkcie $a\in\mathbb{R}$ granicę równą 0.

11. Funkcja $f:(-a,a)\setminus\{0\}\to(0,+\infty)$ spełnia warunek

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)=2.$$

Udowodnij, że $\lim_{x\to 0} f(x)=1$.

12. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest monotoniczna i $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=1$. Udowodnij, że $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(cx)}{f(x)}=1$ dla każdego $c>0$.

13. Niech $f:[0,1]\to[-M,M]$, $a,b>1$ i $f(ax)=bf(x)$ dla $x\in[0,\frac{1}{a}]$. Udowodnij, że $\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$.

Analiza - klasa 4a Zestaw 7. 28.10.2022

Funkcje ciągłe I

Wszędzie I, J to przedziały (skończone lub nie) zawarte w $\mathbb{R}$.

Definicja. Funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $c \in I$, jeżeli $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Funkcja f jest ciągła (na I) jeżeli jest ciągła w każdym punkcie $c \in I$.

Ciągłość funkcji f w punkcie c jest równoważna warunkowi:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in(c-\delta,c+\delta)} |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Stw. Jeżeli funkcje $f, g : I \to \mathbb{R}$ są ciągłe w punkcie $c \in I$, to funkcje $f+g$ i $f \cdot g$ też są ciągłe w punkcie c. Ponadto, jeżeli $f(c) \neq 0$ to funkcja $1/f$ jest określona na pewnym przedziale otwartym zawierającym punkt c i jest ciągła w c.

Wniosek. Każdy wielomian jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$. Każda funkcja wymierna jest ciągła na całej swojej dziedzinie.

Stw. Jeżeli $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$, funkcja f jest ciągła w punkcie $c \in I$ i funkcja g jest ciągła w punkcie $f(c)$, to funkcja $g \circ f$ jest ciągła w punkcie c.

Stw. Funkcje $f, g : I \to \mathbb{R}$ są ciągłe i $f(x) = g(x)$ dla każdego $x \in I \cap \mathbb{Q}$. Wówczas $f = g$.

---

1. Udowodnij ciągłość poniższych funkcji zmiennej x:

(a) x^a, $x \geqslant 0$, $a > 0$
(b) $\sqrt[2n+1]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$
(c) $\sin x$, $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$
(d) $\operatorname{tg} x$, $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
(e) a^x, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$
(f) $\log_a x$, $a > 0$, $x > 0$

2. Dla jakich $a, b \in \mathbb{R}$ ciągła jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos ax}{x^2} & \text{gdy } x \neq 0 \\ b & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$$

3. Dla jakich $a, b, c \in \mathbb{R}$ ciągła jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x)}{\sin(\sin(ax))} & \text{gdy } x < 0 \\ b & \text{gdy } x = 0 \\ x + c & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$$

4. Funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Udowodnij, że funkcja $|f|$ też jest ciągła. Czy prawdziwa jest implikacja odwrotna?

5. Funkcje $f, g : I \to \mathbb{R}$ są ciągłe. Czy funkcja $h(x) = \max(f(x), g(x))$ jest ciągła?

6. Znajdź zbiory punktów ciągłości funkcji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ \sin|x| & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}(\pi x) & \text{gdy } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 0 & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

7. Liczby $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$, spełniają warunki: $a_0 = 0$ i funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} a_n + \sin(\pi x) & \text{gdy } x \in [2n, 2n+1],\ n \in \mathbb{Z} \\ b_n + \cos(\pi x) & \text{gdy } x \in (2n-1, 2n),\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

jest ciągła. Wyznacz liczby a_n i b_n.

8. Znajdź zbiory punktów ciągłości funkcji $f(x) = \lfloor x \rfloor \sin(\pi x)$ i $g(x) = \lfloor x^2 \rfloor \sin(\pi x)$, $x \in [0, +\infty)$.

9. Udowodnij, że funkcja Riemanna jest ciągła w każdym punkcie niewymiernym i nie jest ciągła w każdym punkcie wymiernym.

10. Zbadaj ciągłość funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x = 0 \text{ lub } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ \dfrac{qx}{q+1} & \text{dla } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ \mathrm{NWD}(p,q) = 1. \end{cases}$$

11. Dla jakich $a, b > 0$, $c \in \mathbb{R}$ ciągła jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} & \text{gdy } x \neq 0 \\ c & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$$

12. Udowodnij, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ okresowa, ciągła i różna od stałej ma okres podstawowy (czyli minimalny okres dodatni).

13. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągłe w 0 i takie, że $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$.

14. Wykaż, że jedyną funkcją ciągłą $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taką, że $f(x+y) = f(x)f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $f(1) = e$, jest funkcja $f(x) = e^x$.

15. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągłe w 0 i takie, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ spełniona jest równość $2f(2x) = f(x) + x$.

Analiza - klasa 4a Zestaw 8. 9.11.2022

Funkcje ciągłe II

Definicja. *Kresy górny i dolny funkcji* $f : A \to \mathbb{R}$ definiujemy odpowiednio jako kres górny i dolny zbioru $f(A) \subset \mathbb{R}$. Kresy to zapisujemy jako $\sup\limits_{x\in A} f(x)$ i $\inf\limits_{x\in A} f(x)$ lub $\sup\limits_{A} f$ i $\inf\limits_{A} f$.

Tw. Weierstrassa o kresach Jeżeli funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieją $c, d \in [a,b]$ takie, że $f(c) = \sup\limits_{[a,b]} f$ i $f(d) = \inf\limits_{[a,b]} f$.

Wniosek. Każdy wielomian parzystego stopnia o dodatnim (ujemnym) współczynniku wiodącym przyjmuje wartość najmniejszą (największą).

Wniosek. Jeżeli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i okresowa, to f przyjmuje wartość nawiększą i najmniejszą.

Definicja. Niech $I \subset \mathbb{R}$ to przedział. Mówimy, że funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ ma *własność Darboux* (*własność przyjmowania wartości pośrednich*), jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in I$ i dowolnej liczby y leżącej pomiędzy $f(x_1)$ i $f(x_2)$ istnieje liczba t leżąca pomiędzy x_1 i x_2 i taka, że $f(t) = y$.

Twierdzenie. Funkcja ciągła $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ma własność Darboux.

Przykład. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} x = 0 \end{cases}$$

ma własność Darboux, ale nie jest ciągła w 0.

Wniosek. Jeżeli funkcja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to dla każdego przedziału domkniętego $[c,d] \subset (a,b)$ jego obraz $f([c,d]) \subset \mathbb{R}$ również jest przedziałem domkniętym.

Wniosek. Każdy wielomian nieparzystego stopnia ma pierwiastek rzeczywisty.

Wniosek. Funkcja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ciągła i różnowartościowa jest ściśle monotoniczna.

Twierdzenie. Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Jeżeli funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest ciągła i róznowartościowa, to funkcja $f^{-1} : f(I) \to I$ jest ciągła.

---

1. Dane są wielomiany P i Q takie, że $\deg P$ jest liczbą nieparzystą, Q nie ma pierwiastków rzeczywistych i $\deg P < \deg Q$. Udowodnij, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, przyjmuje wartość największą i najmniejszą.
2. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i okresowa. Udowodnij, że funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) \cdot x \cdot e^{-|x|}$ przyjmuje wartość największą i najmniejszą.
3. Funkcja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągła, funkcja $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest określona wzorem
$$g(x) = \sup\{f(t) : 0 \leqslant t \leqslant x\}.$$
Udowodnij, że funkcja g jest ciągła i niemalejąca.
4. Podaj przykład funkcji ograniczonej na przedziale $[0,1]$, która
(a) nie przyjmuje swego kresu górnego i dolnego,
(b) nie przyjmuje kresu górnego i dolnego na żadnym przedziale $[a,b] \subset (0,1)$.
5. Funkcja $f : [0,1] \to [0,1]$ jest ciągła. Udowodnij, że istnieje $c \in [0,1]$ takie, że $f(c) = c$.
6. Funkcje $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe, $f(a) < g(a)$ i $f(b) > g(b)$. Udowodnij, że istnieje $c \in (a,b)$ takie, że $f(c) = g(c)$.
7. (a) Udowodnij, że równanie $2x = \sin x + 1$ ma rozwiązanie w przedziale $(0,1)$.
(b) Udowodnij, że równanie $e^x = 3x$ ma co najmniej dwa rozwiązania.
(c) Udowodnij, że równanie $2^x = \frac{1}{x}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
8. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i malejąca. Udowodnij, że istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie, że $f(c) = c$.
9. Funkcja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest ciągła i
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x+\frac{1}{3}) + f(x+\frac{2}{3})}{x} = 1.$$
Udowodnij, że istnieje punkt $x_0 \in [0,1]$ takie, że $f(x_0) = 0$.
10. Funkcja $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ jest ciągła i $f(0) = f(2)$. Udowodnij, ze istnieją punkty $a, b \in [0,2]$ takie, że $b - a = 1$ i $f(a) = f(b)$.
11. Podaj przykład funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która przyjmuje każdą wartość dokładnie trzy razy. Czy istnieje funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która przyjmuje każdą wartość dokładnie dwa razy?
12. Funkcja $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągłą i nieograniczona z góry i z dołu. Udowodnij, że f przyjmuje każdą wartość nieskończenie wiele razy.
13. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i różnowartościowa i istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że n-ta iteracja funkcji f jest identycznością, czyli $f^n(x) = x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że
(a) jeśli f jest rosnąca, to $f(x) = x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$,
(b) jeśli f jest malejąca, to $f^2(x) = x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.
14. Dana jest funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca warunki
$$f(1000) = 999, \qquad f(x) \cdot f(f(x)) = 1 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$
Oblicz $f(500)$.

Analiza - klasa 4a Zestaw 9. 18.11.2022

Funkcje ciągłe III

Twierdzenie. Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Jeżeli funkcja $f: I \to \mathbb{R}$ jest ciągła i różnowartościowa, to funkcja $f^{-1}: f(I) \to I$ jest ciągła.

Definicja (funkcje cyklometryczne).

(i) Funkcja $s: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, $s(x) = \sin x$, jest bijekcją. Dla $y \in [-1,1]$ definiujemy $\arcsin y = s^{-1}(y)$.

(ii) Funkcja $c: [0,\pi] \to [-1,1]$, $c(x) = \cos x$ jest bijekcją. Dla $y \in [-1,1]$ definiujemy $\arccos y = c^{-1}(y)$.

(iii) Funkcja $t: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $t(x) = \operatorname{tg} x$ jest bijekcją. Dla $y \in \mathbb{R}$ definiujemy $\operatorname{arctg} y = t^{-1}(y)$.

(iv) Funkcja $u: (0,\pi) \to \mathbb{R}$, $u(x) = \operatorname{ctg} x$ jest bijekcją. Dla $y \in \mathbb{R}$ definiujemy $\operatorname{arc\,ctg} y = u^{-1}(y)$.

Stw. Funkcje cyklometryczne są ciągłe.

---

1. Dana jest funkcja $f(x) = x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że f ma funkcję odwrotną i wyznacz granice

$$\lim_{x\to 0} f^{-1}(x), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f^{-1}(x)}{x}.$$

2. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2+x^6}}$, $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że f ma funkcję odwrotną i oblicz granicę

$$\lim_{y\to 0} \frac{f^{-1}(y)}{\sqrt[3]{y}}.$$

3. Które z funkcji cyklometrycznych są rosnące, malejące, parzyste, nieparzyste?

4. Udowodnij, że dla $x > 0$

$$\operatorname{arctg} x < x < \arcsin x.$$

5. Oblicz granice funkcji $\operatorname{arctg} x$ i $\operatorname{arc\,ctg} x$ w $\pm\infty$.

6. Oblicz granice

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$.

7. Udowodnij tożsamości

(a) $\cos(\arcsin x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, $\quad x \in [-1,1]$

(b) $\arccos x = \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)$, $\quad x \in [0,1]$

(c) $\arccos x = \dfrac{\arccos(2x^2-1)}{2}$, $\quad \arcsin x = \dfrac{\arccos(1-2x^2)}{2}$, $\quad x \in [0,1]$

(d) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\quad \cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\quad x \in \mathbb{R}$

(e) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \dfrac{\pi}{2}$, $\quad x \in \mathbb{R}$

(f) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, $\quad x > 0$

8. Zbadaj istnienie granicy

$$\lim_{x\to 1} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}.$$

9. Wielomiany Czebyszewa 1-go rodzaju. Dla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiujemy funkcje $T_n: [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

(a) Udowodnij wzór rekurencyjny $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$. Wykaż, że T_n jest wielomianem stopnia n. Wyznacz współczynniki wiodący wielomianu T_n.

(b) Dla $n \geqslant 1$ wyznacz pierwiastki wielomianu T_n i punkty, w których przyjmuje on wartość najwiekszą i najmniejszą na przedziale $[-1,1]$.

(c) Udowodnij, że dla $|x| \geqslant 1$

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n\right).$$

Przyjmujemy, że T_n są zadane wzorami z podp. (a).

(d) Wykaż, że dla $n \geqslant m$

$$2T_n(x)T_m(x) = T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x).$$

(e) Wykaż, że dla $n, m \geqslant 0$

$$T_n(T_m(x)) = T_{nm}(x).$$

Analiza - klasa 4a Zestaw 10. 23.11.2022

Powtórzenie

1. Oblicz granice

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4+3x^2-4}{x+1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$

(d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\sin x-\cos x}$

(e) $\lim\limits_{x\to \operatorname{tg} 1} \dfrac{\operatorname{arctg} x-1}{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}-1}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[7]{x^2+1}-1}{\ln(\cosh x)}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{1-\cos x}-1}{\operatorname{arctg}^2 x}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x\cdot \sin\left(\frac{x-\sin x}{\sin x}\right)}{x-\sin x}$

(k) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

(l) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{2x^2+1}+\sqrt[3]{x^3-x+2}$

(m) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x(x+1)^2}-\sqrt[3]{x(x-1)^2}$

(n) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin\sqrt{x+2}\cdot(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

2. Czy można określić $f(0)$ tak, aby otrzymać funkcję ciągłą $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, jeśli dla $x\neq 0$ (a) $f(x)=\exp(\frac{1}{x})$, (b) $f(x)=\exp(\frac{1}{x^2})$, (c) $f(x)=\exp(-\frac{1}{x^2})$?

3. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dana wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{e^{2\operatorname{arctg} x}-1} & \text{gdy } x\neq 0,\\ a & \text{gdy } x=0.\end{cases}$$

Dla jakich wartości $a\in\mathbb{R}$ funkcja f jest ciągła?

4. Czy funkcja $f(x)=e^{-|x|}\sin x$ przyjmuje na $\mathbb{R}$ wartość największą i najmniejszą?

5. Udowodnij, że
(a) równanie $e^{\sin x}=2\cos x$ ma co najmniej 2 rozwiązania w przedziale $(0,2\pi)$
(b) równanie $10\sqrt{x}=e^x$ ma co najmniej 2 rozwiązanie w przedziale $(0,+\infty)$.

6. Funkcja $f:[0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ jest dana wzorem $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$. Wyznacz obraz funkcji f i udowodnij, że istnieje funkcja odwrotna $f^{-1}: f([0,\frac{\pi}{2}))\to[0,\frac{\pi}{2})$. Oblicz granice

$$\lim_{x\to 1^+} f^{-1}(x) \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{f^{-1}(x)}{x-1}.$$

Dowód zasadniczego twierdzenia algebry

Definicja. Ciąg liczb zespolonych (z_n) jest zbieżny do liczby zespolonej a wtedy i tylko wtedy, gdy $|z_n - a| \to 0$.

- $z_n \to a \iff \mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(a)$ i $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(a)$.
- Jeżeli $z_n \to a$, to $|z_n| \to |a|$.
- Z własności arytmetycznych granic ciągów liczb rzeczywistych wynikają identyczne własności arytmetyczne granic ciągów liczb zespolonych.

Stw. Z każdego ograniczonego ciągu liczb zespolonych można wybrać podciąg zbieżny.

Definicja. . Funkcja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest ciągła w punkcie $a \in \mathbb{C}$, jeżeli dla dowolnego ciągu $z_n \to a$, $z_n \neq a$, zachodzi $f(z_n) \to f(a)$. Funkcja f jest ciągła, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie a.

Przykłady: Funkcja $f(z) = |z|$ jest ciągła. Jeżeli P jest wielomianem o zespolonych współczynnikach, to P jest funkcją ciągłą. Wówczas funkcja $g(z) = |P(z)|$ też jest ciągła.

Definicja. Zbiór $E \subset \mathbb{C}$ (lub $E \subset \mathbb{R}^2$ lub $E \subset \mathbb{R}$) jest *domknięty*, jeżeli dla każdego ciągu punktów $a_n \in E$ takiego, że $a_n \to a$ zachodzi $a \in E$.

Przykład: Koło $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}$ jest zbiorem domkniętym.

Tw. Weierstrassa o kresach (wersja nad $\mathbb{C}$). Funkcja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, $E \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem domkniętym i ograniczonym. Wówczas istnieją $a, b \in E$ takie, że

$$f(a) = \inf_E f \qquad \text{i} \qquad f(b) = \sup_E f.$$

Lemat. Niech $n \geqslant 1$, $P(z)$ jest wielomianem o zespolonych współczynnikach stopnia n. Wówczas istnieje $z_0 \in \mathbb{C}$ takie, że

$$P(z_0) = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|.$$

Zasadnicze tw. algebry. Każdy wielomian dodatniego stopnia o współczynnikach zespolonych ma pierwiastek zespolony.

Dowód: Za pomocą Lematu pokazujemy, że $\inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| = 0$.

Analiza - klasa 4a Zestaw 12. 30.11.2022

Pochodna funkcji I

Definicja. Mówimy, że funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest rózniczkowalna w puncie $x_0\in(a,b)$, jeżeli istnieje skończona granica

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Liczbę $f'(x_0)$ nazywamy *pochodną* funkcji f w punkcie x_0. Wyrażenie $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ nazywamy *ilorazem róznicowym.*

Stosuje się także oznaczenie $f'(x_0)=\dfrac{df}{dx}(x_0)$.

Stw. Jeżeli funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0\in(a,b)$, to jest ona ciągła w tym punkcie.

Tw. (Arytmetyczne własności pochodnych) Jeżeli funkcje $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie $x_0\in(a,b)$, to

(i) funkcja $f+g$ jest różniczkowalna w x_0 i $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$;

(ii) funkcja $f\cdot g$ jest różniczkowalna w x_0 i $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$;

(iii) gdy $g(x)\neq 0$ na pewnym otoczeniu x_0, to funkcja $\dfrac{f}{g}$ jest różniczkowalna w x_0 i $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Lemat o przybliżaniu funkcją liniową. Funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0\in(a,b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $k\in\mathbb{R}$ i funkcja $\phi:(a,b)\to\mathbb{R}$ takie, że

$$f(x)=f(x_0)+k\cdot(x-x_0)+\phi(x)\cdot(x-x_0)\qquad \text{dla } x\in(a,b)$$

oraz $\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=0$. Wówczas $k=f'(x_0)$.

Tw. (Pochodna złożenia funkcji) Jeżeli funkcja $g:(a,b)\to(c,d)$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0\in(a,b)$ oraz funkcja $f:(c,d)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $g(x_0)=y_0\in(c,d)$, to funkcja $F=f\circ g:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalne w x_0 i

$$F'(x_0)=f'(y_0)\cdot g'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0).$$

Definicja. Pochodne jednostronne funkcji f w punkcie x_0 definiujemy jako

$$f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\qquad \text{pochodna prawostronna}$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\qquad \text{pochodna lewostronna}$$

Jeżeli $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ i istnieje $f'_+(a)$ to mówimy, że f jest różniczkowalna w punkcie a i $f'(a)=f'_+(a)$. Podobnie definujemy różniczkowalność i pochodną funkcji $g:(a,b]$ w punkcie b.

Stw. Funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0\in(a,b)$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieją obie pochodne jednostronne funkcji f w punkcie x_0, są skończone i są sobie równe.

Definicja. Niech $I\subset\mathbb{R}$ oznacza przedział, Mówimy, że funkcja $f:I\to\mathbb{R}$ jest *różniczkowalna*, jeżeli jest ona różniczkowalna w każdym punkcie $x_0\in I$. Funkcję $x\to f'(x)$, $x\in(a,b)$, nazywamy *pochodną* funkcji f.

Stw. (Pochodne funkcji elementarnych)

(i) $(x^a)'=ax^{a-1}$ dla $x\in\mathbb{R}$ i $a\in\mathbb{N}$ lub $x>0$ i $a>0$ lub $x\neq 0$ i $a\in\mathbb{Z}$ lub $x\neq 0$ i $a=\frac{1}{2n+1}$, $n\in\mathbb{N}$;

(ii) $(a^x)'=\ln a\cdot a^x$ dla $a>0$ i $x\in\mathbb{R}$;

(iii) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ dla $x>0$;

(iv) $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$ dla $x\in\mathbb{R}$;

(v) $(\operatorname{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2x$ dla $x\neq\frac{(2k+1)\pi}{2}$, $(\operatorname{ctg}x)'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}$ dla $x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

---

1. Oblicz z definicji pochodną funkcji $f(x)=\sqrt{4x+1}$ w punkcie $x_0=2$.

2. Zbadaj różniczkowalność fukcji $f(x)=|x|$ i $g(x)=\sqrt[3]{x}$ w punkcie $x_0=0$.

3. Wyznacz dziedzinę funkcji, oblicz jej pochodnę i wyznacz dziedzinę pochodnej:

(a) $f(x)=\sqrt[4]{2x-x^2}$

(b) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{x^4-9}$

(c) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x^3}}$

(d) $f(x)=\operatorname{tg}^4(\sin x)$

(e) $f(x)=\left(\sqrt{x^2+\sin^2 x}+1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}}-1\right)$

(f) $f(x)=\dfrac{\log_2(x^2-1)}{\operatorname{arctg}x}$

(g) $f(x)=xe^{x^2}-3\cdot 2^{\cos x}$

(h) $f(x)=x^x$

(i) $f(x)=x^{x^x}$

(j) $f(x)=(\sin\sqrt{x})^{\cos x}$

(k) $f(x)=\log_x e$

(l) $f(x)=\log_{x^2-1}(\cos x+1)$

4. Niech $a>0$ i

$$f(x)=\begin{cases}|x|^a\cdot\sin\dfrac{1}{x} & \text{gdy } x\neq 0\\ 0 & \text{gdy } x=0\end{cases}$$

Dla jakich wartości a funkcja f jest różniczkowalna w 0?

Analiza - klasa 4a Zestaw 13. 2.12.2022

Pochodna funkcji II

Tw. (Pochodna funkcji odwrotnej) Jeżeli funkcja $f : (a,b) \to (c,d)$ jest bijekcją, jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a,b)$, $f'(x_0) \neq 0$ i funkcja odwrotna $f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$, to funkcja f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ i

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Pochodne funkcji cyklometrycznych:

- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$
- $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$
- $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

---

1. Określ parametry a, b, c, d tak, aby funkcja f miała pochodną na całym zbiorze liczb rzeczywistych:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla } x \leqslant 1, \\ ax^2 + c & \text{dla } 1 < x \leqslant 2, \\ \dfrac{dx^2+1}{x} & \text{dla } x \geqslant 2. \end{cases}$$

2. Wyznacz pochodne funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x}$ i $g(x) = \ln x$ korzystając z tw. o pochodnej funkcji odwrotnej.

3. Oblicz pochodne

(a) $f(x) = \sin(\arccos x)$

(b) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$

(c) $f(x) = \operatorname{arctg}(e^{5x})$

(d) $f(x) = \ln^3(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2})$

4. Liczba x_0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu P i $k > 1$. Wykaż, że x_0 jest $(k-1)$-krotnym pierwiastkiem wielomianu P'.

5. Funkcja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ jest rózniczkowalna w $x_0 \in (a,b)$. Wykaż, że

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x_0).$$

Czy z istnienia powyższej granicy wynika różniczkowalność funkcji f w x_0?

6. Znajdź wzory dla sumy $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ke^{kx}$.

7. Funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie a. Oblicz granice

(a) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x-a}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x-a}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x-a}$, $n \in \mathbb{N}$

8. Funkcja f jest różniczkowalna w 0 i $f'(0) \neq 0$. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)e^x - f(0)}{f(x)\cos x - f(0)}.$$

9. Funkcje $f_1, f_2, \ldots, f_k : (a,b) \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie $x_0 \in (a,b)$. Znajdź wzór na $(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k)'(x_0)$.

10. Załóżmy, że $f(a) > 0$ i f jest różniczkowalna w a. Oblicz granice

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^{\frac{1}{n}}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{\ln x - \ln a}}$, $a > 0$

11. Niech $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx$, gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że jeśli $|f(x)| \leqslant |\sin x|$ dla $x \in \mathbb{R}$, to

$$|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \leqslant 1.$$

12. Niech $f(0) = 0$, funkcja f jest różniczkowalna w 0 i $k \in \mathbb{N}$. Znajdź granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \sum_{j=1}^{k} f\left(\frac{x}{j}\right).$$

Pochodna funkcji III (twierdzenia o wartości średniej)

Lemat Fermata. Jeżeli funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $c\in(a,b)$ i ma w tym punkcie ekstremum lokalne, to $f'(c)=0$.

Tw. Rolle'a. Funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b). Jeżeli $f(a)=f(b)$, to istnieje $\xi\in(a,b)$ takie, że $f'(\xi)=0$.

Tw. Cauchy'ego o wartości średniej. Funkcje $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ są ciągłe na $[a,b]$ i różniczkowalne na (a,b) oraz $g'(x)\neq 0$ dla $x\in(a,b)$. Wówczas istnieje $\xi\in(a,b)$ takie, że

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Tw. Lagrange'a o wartości średniej. Funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b). Wówczas istnieje $\xi\in(a,b)$ takie, że

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

Wniosek. Funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b) oraz $f'(x)=0$ dla każdego $x\in(a,b)$. Wówczas funkcja f jest stała.

Tw. Funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Wówczas funkcja f' ma własność Darboux.

---

1. Wielomian W o współczynnikach rzeczywistych ma n różnych pierwiastków rzeczywistych. Wykaż, że wielomian W' ma co najmniej $n-1$ różnych pierwiastków rzeczywistych.

2. Dwóch zawodników dotarło do jednocześnie do mety wyścigu. Udowodnij, że w pewnym momemncie obaj biegli z taką samą prędością.

3. Funkcja $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,+\infty)$ i różniczkowalna na $(a,+\infty)$ oraz $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(a)$. Wykaż, że istnieje $\xi\in(a,+\infty)$ takie, że $f'(\xi)=0$.

4. Wielomian P stopnia n ma n różnych pierwiastków rzeczywistych. Wykaż, że dla dowolnej liczby $a\neq 0$ wielomian $P'(x)+aP(x)$ ma n różnych pierwiastków rzeczywistych.

5. Funkcje $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ są ciągłe na $[a,b]$ i różniczkowalne na (a,b) oraz $f(a)=f(b)=0$. Udowodnij, że istnieje $\xi\in(a,b)$ takie, że

$$g'(\xi)f(\xi)+f'(\xi)=0.$$

6. Liczby rzeczywiste $a_0,a_1,\ldots,a_n$ spełniają równość

$$a_0+\frac{a_1}{2}+\ldots+\frac{a_n}{n+1}=0.$$

Udowodnij, że wielomian $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ ma pierwiastek w przedziale $(0,1)$.

7. Niech $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b_1,b_2,\ldots,b_n\in\mathbb{R}$ oraz $b_j\neq b_j$ dla $i\neq j$. Udowodnij, że równanie

$$a_1x^{b_1}+a_2x^{b_2}+\ldots+a_nx^{b_n}=0$$

ma co najwyżej $n-1$ pierwiastków dodatnich.

8. Funkcja : $(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna oraz $\inf f'>0$. Udowodnij, że $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$.

9. Udowodnij tożsamości:

(a) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{\pi}{4}$ dla $x\in(-1,+\infty)$;

(b) $3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$ dla $x\in[-\frac12,\frac12]$.

10. Podaj przykład funkcji różniczkowalnej, której pochodna nie jest ciągła.

11. Udowodnij nierówności:

(a) $|\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y|\geqslant|x-y|$ dla $x,y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$;

(b) $|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|\leqslant|x-y|$ dla $x,y\in\mathbb{R}$;

(c) $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$ dla $0<b<a$.

12. Stosując tw. Cauchy'ego o wartości średniej udowodnij nierówności:

(a) $1-\dfrac{x^2}{2!}<\cos x$ dla $x\neq 0$,

(b) $x-\dfrac{x^3}{3!}<\sin x$ dla $x>0$,

(c) $\cos x<1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}$ dla $x\neq 0$,

(d) $\sin x<x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$ dla $x>0$.

13. Funkcja $f:(a,+\infty)$ jest różniczkowalna i $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=c$. Udowodnij, że

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=c.$$

14. Niech $\alpha>1$ i funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełnia warunek

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|^{\alpha}$$

dla dowolnych $x,y\in\mathbb{R}$. Udowodnij, że funkcja f jest stała.

15. Funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b) i f nie jest funkcją liniową. Wykaż, że istnieją $x,y\in(a,b)$ takie, że

$$f'(x)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(y).$$

16. Załóżmy, że $b-a>\pi$ i funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Wykaż, że istnieje $\xi\in(a,b)$ takie, że $f'(\xi)<1+f(\xi)^2$.

Analiza - klasa 4a Zestaw 15. 21.12.2022

Pochodna funkcji IV

Tw. 1. Załóżmy, że funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna na (a, b).

(i) Jeżeli $f'(x) \geqslant 0$ dla $x \in (a, b)$, to funkcja f jest niemalejąca.

(ii) Jeżeli $f'(x) > 0$ dla $x \in (a, b)$, to funkcja f jest rosnąca.

(iii) Jeżeli $f'(x) \leqslant 0$ dla $x \in (a, b)$, to funkcja f jest nierosnąca.

(iv) Jeżeli $f'(x) < 0$ dla $x \in (a, b)$, to funkcja f jest malejąca.

Tw. 2. Załóżmy, że funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalne, $c \in (a, b)$ oraz $f'(c) = 0$

(i) Jeżeli istnieje $\delta > 0$ takie, że $f'(x) \leqslant 0$ dla $x \in (c-\delta, c)$ i $f'(x) \geqslant 0$ dla $x \in (c, c+\delta)$, to f ma w c minimum lokalne.

(ii) Jeżeli istnieje $\delta > 0$ takie, że $f'(x) \geqslant 0$ dla $x \in (c-\delta, c)$ i $f'(x) \leqslant 0$ dla $x \in (c, c+\delta)$, to f ma w c maksimum lokalne.

Jeżeli nierówności są ostre, to odp. ekstrema są właściwe.

---

1. Udowodnij nierówności Bernoulliego:

(a) $(1 + x)^r \geqslant 1 + rx$ dla $x \geqslant -1$ i $r \geqslant 1$;

(b) $(1 + x)^r \leqslant 1 + rx$ dla $x \geqslant -1$ i $0 \leqslant r \leqslant 1$;

2. Udowodnij nierówności:

(a) $2x\operatorname{arctg} x \geqslant \ln(1 + x^2)$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(b) $\ln(1 + x) > \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1 + x}$ dla $x > 0$;

(c) $\ln x \leqslant \dfrac{x}{e}$ dla $x > 0$;

(d) $\cos x < \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ dla $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$;

(e) $xe^{x/2} < e^x - 1$ dla $x > 0$;

(f) $e^x < (1 + x)^{1+x}$ dla $x > 0$;

(g) $\ln(1 + x) < \dfrac{x}{\sqrt{1 + x}}$ dla $x > 0$;

(h) $\left(\dfrac{x + 1}{2}\right)^{x+1} \leqslant x^x$ dla $x > 0$;

(i) $\dfrac{1}{3}\operatorname{tg} x + \dfrac{2}{3}\sin x > x$ dla $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$;

(j) $\sin x \cdot \operatorname{tg} x \geqslant x^2$ dla $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$.

3. Która z liczb jest większa: e^π czy π^e?

4. Wykaż, że jeśli $x, y \geqslant 0$ i $\alpha \geqslant 1$, to

$$(x + y)^\alpha \geqslant x^\alpha + y^\alpha.$$

5. Udowodnij, że dla $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$

$$\frac{\operatorname{tg} a}{a} < \frac{\operatorname{tg} b}{b}.$$

6. Wykaż, że dla dowolych liczb dodatnich a, b takich, że $a \neq b$ zachodzą nierówności

$$\sqrt{ab} < \frac{b - a}{\ln b - \ln a} < \frac{a + b}{2}.$$

Liczbę $\frac{b-a}{\ln b - \ln a}$ nazywamy *średnią logarytmiczną* liczb a i b.

7. Załóżmym, że $a, b, x > 0$ i $a \neq b$. Udowodnij nierówność

$$\left(\frac{a + x}{b + x}\right)^{b+x} > \left(\frac{a}{b}\right)^b.$$

8. Udowodnij, że jeśli $b > a > 1$ i $c > 0$, to

$$\log_a b > \log_{a+c}(b + c).$$

9. Wyznacz przedziały monotonicznośc, ekstrema lokalne i kresy funkcji

(a) $f(x) = xe^{-x^2}$,

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$,

(c) $f(x) = \sin(\sin x)$,

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x + 1} \cdot \sqrt[5]{x^2 - 2x + 1}$,

(e) $f(x) = x^x$.

10. Znajdź ekstrema lokalne funkcji $f(x) = x^m(1 - x)^n$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$.

11. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ na przedziale $[-1, 1]$.

12. Wyznacz kres górny zbioru $\{2^{-x} + 2^{-1/x} : x > 0\}$.

13. Ile pierwiastków ma równanie $6\ln(1 + x^2) = e^x$?

14. Wyznacz liczbę pierwiastków równania $a^x = x$ w zależności od $a > 0$.

15. Udowodnij, że dla $x > y > 1$ zachodzi nierówność

$$x^{y^x} > y^{x^y}.$$

16. Załóżmy, że $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Udowodnij nierówność

$$a^c \cdot b^a \cdot c^b \geqslant a^b \cdot b^c \cdot c^a.$$

Analiza - klasa 4a Zestaw 16. 25.1.2023

Pochodna funkcji V - powtórka

1. Okno na poddaszu ma mieć kształt trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa i ramiona mają długość po 40 cm. Jaką długość powinna mieć dłuższa podstawa tego trapezu, aby okno miało największe pole powierzchni?

2. Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa.

3. Parabola o równaniu $y = 2 - \frac{x^2}{2}$ przecina oś OX w punktach A i B. Rozpatrujemy wszystkie trapezy $ABCD$ takie, że punkty C i D leżą na tej paraboli w górnej połowie układu współrzędnych. Znajdź współrzędne punktów C i D, dla których pole trapezu $ABCD$ jest największe.

4. Trójkąty prostokątne o obwodzie 1 obracamy wokół przeciwprostokątnej. Czy dla któregoś z nich objętość otrzymanej bryły będzie największa? Jeśli tak, to znajdź tę największą objętość.

5. Oblicz pochodną funkcji we wszystkich punktach, w których istnieje:

(a) $\arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$,

(b) $\sin^2(\sqrt{x})$,

(c) $\ln(1 + \sqrt[3]{\sin x})$.

6. Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych a, b takie, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} ax + b\cos x & \text{dla } x \geqslant 0 \\ \dfrac{1-\cos x}{x \sin x} & \text{dla } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna na przedziale $(-\pi, \infty)$.

7. Udowodnij, że funkcja $f(x) = e^x + x$ ma różniczkowalną funkcję odwrotną. Wyznacz $f^{-1}(1)$ i $(f^{-1})'(1)$.

8. Zbadaj przebieg zmienności funkcji i wyznacz ich ekstrema lokalne oraz kresy.

(a) $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot \ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x$,

(b) $f(x) = \frac{\sqrt{|x^2-2|}}{x^2+x+1}$

9. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2+bx+3}{\sqrt{1+x^2}}$. Wyznacz liczbę i rodzaj ekstremów funkcji f w zależności od parametru $b \in \mathbb{R}$.

10. Wyznacz liczbę pierwiastków rzeczywistych trójmianu $x^3 - px + q$ w zależności od wartości parametrów $p, q \in \mathbb{R}$.

11. Udowodnij nierówności:

(a) $\sqrt[3]{1+x} > 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$, $x > 0$,

(b) $\frac{2}{2x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$, $x > 0$,

(c) $\sin(\operatorname{tg} x) \geqslant x$, $x \in [0, \frac{1}{4}\pi]$.

(d) $x^3 - \frac{x^5}{10} < 3\sin x - 3x\cos x < x^3$, $x \in (0, \frac{1}{2}\pi)$.

12. Niech $x \in (0,1)$ i $0 < \alpha < \beta$. Udowodnij nierówność

$$\frac{1-x^\beta}{1-x^\alpha} > \frac{\beta}{\alpha}x^{\beta-\alpha}.$$

13. Funkcja różniczkowalna $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ma własność

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Udowodnij, że istnieje ciąg $x_n \to +\infty$ taki, że $f'(x_n) \to 0$.

14. Sformułuj i udowodnij

(a) Lemat Fermata, tw. Rolle'a i tw. Cauchy'ego o wartości średniej.

(b) Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej.

Analiza - klasa 4a Zestaw 17. 3.2.2023

Pochodna funkcji VI

Przypomnienie: **Tw. Stolza.** Ciągi liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ spełniają:
(i) ciąg $(b_n)_n$ jest ściśle monotoniczny i $b_n \neq 0$ dla każdego n,
(ii) istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = g$,
(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ lub $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.
Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = g$.

Tw. (Reguła de l'Hospitala) Niech $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Funkcje $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne, $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a,b)$,

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0 \quad \text{lub} \quad \lim_{x\to b} g(x) = +\infty$$

oraz istnieje granica

$$\lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = C \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}.$$

Wówczas

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = C.$$

Lemat. Niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, gdzie $b \in \mathbb{R}\cup +\infty$ i dla każdego ciągu rosnącego $(x_n)_n$ takiego, że $x_n \to b$ zachodzi $f(x_n) \to c$. Wówczas $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$.

1. Korzystając z reguły de l'Hospitala lub nie, oblicz granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - x}{\sin x - 2x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin x - x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$,

(e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x$,

(f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{2x-1}$,

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x$,

(h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin x - \cos x}$,

(i) $\lim\limits_{x\to 1} (x^2-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$,

(j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{2\sin^2 x - 1}$,

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$,

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,

(m) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)$,

(n) $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^{2x} + x\right)^{\frac{1}{x}}$,

(o) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{\sin^3 x}\right)$,

(p) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$,

(q) $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)\operatorname{tg}(\pi x/2)$,

(r) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(e^x + x)\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x - e\right)$

2. Niech $f(x) = x - \sin x$, $g(x) = 2x + \sin x$. Znajdź granicę $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ i wykaż, że granica $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ nie istnieje.

3. Niech $a > 0$. Znajdź granice

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^a}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^a}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^a}$.

4. Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin(x^4)} - \cos(x^2)}{(\operatorname{tg} x - \sin x)(\ln(1 + \arcsin x))}$.

5. Oblicz granice

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x}\right)$, (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}\left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x}\right)$, (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\operatorname{ctg}^2 x - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

6. Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(2\sin\sqrt{x} + \sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}\right)^x$.

7. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, granica $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ istnieje i jest skończona oraz istnieje granica $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x)$. Udowodnij, że wówczas

$$\lim_{x\to+\infty} xf'(x) = 0.$$

8. Funkcja $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, $a > 0$ oraz

$$\lim_{x\to+\infty} (af(x) + f'(x)) = b \in \mathbb{R}.$$

Udowodnij, że

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{b}{a}.$$

9. Dla danej liczby $\lambda \geqslant 1$ niech $f(\lambda)$ oznacza (jedyne) rozwiązanie równania $x(1+\ln x) = \lambda$. Udowodnij, że

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\ln\lambda \cdot f(\lambda)}{\lambda} = 1.$$

Pochodne wyższych rzędów I

Definicja. Załóżmy, że $I \subset R$ jest przedziałem i $f : I \to R$. Pochodną rzędu 0 funkcji f nazywamy samą funkcję f. Możemy pisać $f^{(0)} = f$.

Pochodną rzędu n funkcji f w punkcie $a \in I$ definiujemy jako pochodnę funkcji $f^{(n-1)}$ w punkcie a, czyli
$$f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a).$$

Jeżeli ta pochodna (jako odp. granica) istnieje, to mówimy, że funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w punkcie a. Jeżeli funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w każdym punkcie $x \in I$, to mówimy, że jest ona n-krotnie różniczkowalna (na przedziale I). Funkcję $x \mapsto f^{(n)}(x)$, $(x \in I)$ nazywamy wówczas n-tą pochodną funkcji f lub pochodną rzędu n funkcji f.

Tw. (Wzór Taylora z resztą Lagrange'a) Załóżmy, że funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ma w przedziale (a, b) pochodne do rzędu $n + 1$ włącznie. Niech $c \in (a, b)$ Wówczas dla dowolnego $x \in (a, b)$, istnieje punkt ξ leżący pomiędzy c i x, że
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - c)^{n+1}.$$

Uwaga: Występujący w powyższym wzorze wielomian $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k$ nazywamy *n-tym wielomianem Taylora* funkcji f w punkcie c, funkcję $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ nazywamy *n-tą resztą Taylora* funkcji f w punkcie c.

---

1. Wyznacz funkcję $f^{(n)}(x)$ dla (a) $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$, (b) $f(x) = \ln(a + x)$, $a > 0$, (c) $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$, (d) $f(x) = \sin(ax)$, $a \neq 0$, (e) $f(x) = \log_a(x)$, $a > 0$, (f) $f(x) = a^x$, $a > 0$.
2. **Wzór Leibniza.** Załóżmy, że funkcje $f, g : I \to \mathbb{R}$ są n-krotnie różniczkowalne w punkcie $a \in I$. Udowodnij, że
$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a)g^{(n-k)}(a).$$
3. Oblicz n-tą pochodną funkcji (a) $f(x) = xe^x$, (b) $g(x) = x^3 \sin(5x)$.
4. Niech
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$
Wykaż, że $f^{(n)}(0) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} P_n(1/x)$ dla $x \neq 0$, gdzie P_n jest wielomianem o współczynnikach całkowitych.
5. **Wielomiany Hermite'a.** Niech $f(x) = e^{-x^2}$ i dla $n = 0, 1, 2, \ldots$
$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \cdot f^{(n)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$
(a) Wykaż, że dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ funkcja H_n jest wielomianem stopnia n.
(b) Udowodnij zależność rekurencyjną $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$.
6. **Wielomiany Laguerre'a.** Wykaż, że dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ funkcja
$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \cdot (x^n e^{-x})^{(n)}, \qquad x \in \mathbb{R}$$
jest wielomianem stopnia n.
(a) Wykaż zależność rekurencyjną $L_{n+1}(x) = \dfrac{(2n + 1 - x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)}{n + 1}$.
(b) Udowodnij wzór $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \dfrac{(-1)^k}{k!} x^k$. (c) Oblicz $L_n(0)$ i $L_n'(0)$.
7. Załóżmy, że P jest wielomianem stopnia n. Udowodnij, że dla dowolnych $c, x \in \mathbb{R}$
$$P(x) = P(c) + \frac{P'(c)}{1!}(x - c) + \frac{P''(c)}{2!}(x - c)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n.$$
Wyznacz k-ty wielomian Taylora wielomianu P w punkcie c.
8. Udowodnij, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ prawdziwe są wzory:
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n + 1)!}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$
9. Wyznacz n-ty wielomian i resztę Taylora w zerze funkcji z zadania 4.
10. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej $x > 0$ zachodzą nierówności
$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 < \sqrt{1 + x} < 1 + \frac{1}{2}x.$$
11. Znajdź przybliżenie wymierne liczby $\sqrt{e}$ z dokładnością 10^{-3}.
12. Udowodnij, że
$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$
13. Wykaż, że dla $x > 0$ prawdziwe są oszacowania
$$0 < 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{\sqrt{1 + x}} < \frac{5}{16}x^3.$$
14. Wykaż, że dla $n \in \mathbb{N}$ i $x \geqslant 0$
$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant \frac{xe^x}{n}.$$
15. Wykaż, że jeśli $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$, to $\mathrm{tg}(\sin x) \geqslant x$.

Funkcje wypukłe

Niech $I \subset \mathbb{R}$ bedzie przedziałem, półprostą lub prostą. Mówimy, że funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest *wypukła*, jeżeli dla wszystkich $x, y \in I$ i dowolnego $\lambda \in (0, 1)$ zachodzi nierówność

$$f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y),$$

zwana *nierównością Jensena.* Jeżeli ta nierówność jest ostra dla dowolnych x, y, t j.w. to mówimy, że f jest *ściśle wypukła.* Jeżeli nierówność Jensena zachodzi w przeciwną stronę, to mówimy, że f jest *wklęsła.*

Uwaga: Funkcja f jest (ściśle) wypukła wtw. gdy $-f$ jest (sciśle) wklęsła.

Interpretacja geometryczna. Funkcja f jest ściśle wypukła wtw. gdy każda cięciwa łącząca dwa punkty należące do wykresu f leży nad tym wykresem lub się z nim pokrywa.

Nierówność Jensena. Jeżeli $f : I \to \mathbb{R}$ jest wypukła, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, 1]$ i $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1$, to

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k).$$

Lemat. Funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest wypukła wtw. gdy dla dowolnych $x, c, y \in I$, $x < c < y$ zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant \frac{f(y)-f(c)}{y-c}.$$

W przypadku funkcji ściśle wypukłych nierówność jest ostra.

Tw. 2. Funkcja różniczkowalna $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest wypukła (ściśle wypukła) wtw. gdy funkcja f' jest niemalejąca (ściśle rosnąca). Funkcja f jest wklęsła (ściśle wklęsła) wtw. gdy f' jest nierosnąca (ściśle malejąca)

Wniosek. Funkcja 2-krotnie różniczkowalna $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest wypukła (ściśle wypukła) wtw. gdy funkcja f" jest nieujmena (dodatnia); f jest wklęsła (ściśle wklęsła) wtw. gdy f" jest niedodatnia (ujemna).

---

1. Zbadaj, na jakich przedziałach są wklęsłe / wypukłe funkcje (a) $f(x) = xe^x$, (b) $\sin x$, (c) $\operatorname{tg} x$, (d) $f(x) = x^4 - 7x^2 + 6x$ (e) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

2. Jak jest maksymalna liczba przedziałów wklęsłości / wypukłości wielomianu stopnia n?

3. Wykaż, że funkcja $f(x) = \sqrt{1+x^2} - \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$ jest rosnąca i wklęsła na $(0, +\infty)$

4. **Uogólniona nierówność Cauchy'ego:** Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$ i $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \geqslant x^{\alpha_1} \cdot x^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x^{\alpha_n}.$$

5. Niech $a > 1$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$. Wykaż, że

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^a \leqslant \frac{x_1^a + x_2^a + \ldots + x_n^a}{n}.$$

6. Udowodnij **Nierówność Younga:** Jeśli $p, q > 1$ i $p^{-1} + q^{-1} = 1$, to dla dowolnych $x, y \geqslant 0$

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

7. Udowodnij **Nierówność Höldera:** Jeśli $n \in \mathbb{N}$, $p, q > 1$ i $p^{-1} + q^{-1} = 1$, to dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ spełniona jest nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Oblicz granicę prawej strony, gdy $p \to +\infty$.

8. Stosując nierówność Höldera udowodnij, **nierówność Minkowskiego**: Jeśli $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ i $p \geqslant 1$, to

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

9. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \pi)$ i $x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$. Udowodnij nierówności

$$\text{(a)} \prod_{k=1}^{n} \sin x_k \leqslant (\sin x)^n, \qquad \text{(b)} \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin x_k}{x_k} \leqslant \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n.$$

10. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Wykaż, że

$$1 + \sqrt[4]{e^a e^b e^c e^d} \leqslant \sqrt[4]{(1+e^a)(1+e^b)(1+e^c)(1+e^d)}.$$

11. Niech $x, y, z \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Wykaż, że

$$\left(1 - \operatorname{tg}\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\right)^3 \geqslant (1 - \operatorname{tg} x)(1 - \operatorname{tg} y)(1 - \operatorname{tg} z).$$

12. Funkcja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest wypukła i $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$. Udowodnij, że funkcja $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ jest rosnąca na $(0, +\infty)$.

13. Udowodnij, że funkcja wypukła $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest ciągła.

Powtórzenie

1. Oblicz granice

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1}$,

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1-\sin x)^{\frac{1}{x}}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\operatorname{ctg} x-1}{x^2}$.

2. Oblicz n-tą pochodną funkcji $f(x)=(x^3+x^2)e^{2x}$.

3. Funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest 2-krotnie różniczkowalna i f'' jest ciągła w punkcie x. Udowodnij, że

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x).$$

4. Udowodnij, że dla $x\in\mathbb{R}$

$$\ln(1+e^x)\leqslant \ln 2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{24}x^2,$$

5. Wyznacz przedziały wklęsłości i wypukłości funkcji

(a) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

(b) $f(x)=x+\sin x$.

6. Niech $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$ i $a=x_1+x_2+\ldots+x_n$. Udowodnij nierówność

$$a\cdot\operatorname{arctg}\frac{a}{n}\leqslant\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot\operatorname{arctg} x_k.$$

7. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich u,v zachodzi nierówność

$$\frac{\sqrt[3]{uv}}{1+\sqrt[3]{uv}}\geqslant\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{u}{1+u}+\frac{v}{1+v}\right).$$

Wskazówka: każda liczba dodatnia jest postaci e^x.

8. Funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest 2-krotnie różniczkowalna, f'' jest funkcją ograniczoną i $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. Udowodnij, że $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$

Analiza - klasa 4a   Zestaw 21.   12.4.2023

Całka nieoznaczona I

Operacja odwrotna do różniczkowania funkcji nazywana jest *całkowaniem*: mając daną funkcję f szukamy funkcji F takiej, że $F' = f$. Niestety, w odróżnieniu od różniczkowania, które w zasadzie jest czynnością mechaniczną, całkowanie funkcji bywa trudne, wymaga pomysłowości i nie zawsze jest wykonalne.

Definicja. Załóżmy, że zbiór $D \subset \mathbb{R}$ jest sumą rozłącznych przedziałów i dana jest funkcja $f : D \to \mathbb{R}$. Każdą funkcję $F : D \to \mathbb{R}$ taką, że dla każdego $x \in D$ zachodzi $F'(x) = f(x)$ nazywamy *całką nieoznaczoną* lub *funkcją pierwotną* funkcji f. Piszemy

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Najważniejsze funkcje pierwotne:

$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+a}x^{a+1} + C$ dla $a \neq 1$ i każdego x, dla którego określona jest funkcja x^a,

$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$, $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$, $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$, $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$,

$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C$, $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C$,

$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} x + C$.

Występująca w powyższych wzorach stała C jest nazywana *stałą całkowania*. Jeżeli dziedzina funkcji składa się z więcej niż jednego przedziału, na każdym przedziale wartość stałej całkowania może być inna. (Ściśle: na każdej składowej spójności dziedziny stała całkowania może mieć inną wartość).

Tw. 1. Jeżeli $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem i funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to funkcja f ma funkcję pierwotną. (dowód pomijamy)

Stw. 2. Jeżeli $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, $f : I \to \mathbb{R}$ i F jest funkcją pierwotną funkcji f, to F jest funkcją ciągłą.

Stw. 3. (liniowość całki). Jeżeli funkcje $f, g : D \to \mathbb{R}$ mają funkcje pierwotne i $a, b \in \mathbb{R}$, to

$$\int \big(af(x) + bg(x)\big)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Stw. 4. (podstawienie liniowe). Jeżeli $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ oraz $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, to

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Tw. 5. (Wzór na całkowanie przez części). Jeżeli funkcje $f, g : A \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne, to

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Oblicz całki nieoznaczone:

1. $\int (x^4 + 2x^3 - x^2 - 7)\,\mathrm{d}x$,

2. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$,

3. $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$, $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

4. $\int (4\sin(5x) - 5\cos(4x))\,\mathrm{d}x$,

5. $\int |x|\,\mathrm{d}x$,

6. $\int \sqrt{|x|}\,\mathrm{d}x$,

7. $\int a^x\,\mathrm{d}x$, $a > 0$,

8. $\int \frac{1}{3-2x}\,\mathrm{d}x$,

9. $\int \frac{1}{4+9x^2}\,\mathrm{d}x$,

10. $\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

11. $\int \ln_a x\,\mathrm{d}x$, $a > 0$,

12. $\int xe^x\,\mathrm{d}x$,

13. $\int \sin x \cdot e^x dx$,

14. $\int x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$,

15. $\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x$,

16. $\int x^3 \sin x\,\mathrm{d}x$,

17. $\int x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$,

18. $\int x^2\cos^2 x\,\mathrm{d}x$,

19. $\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$,

20. $\int x \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$,

21. $\int x\sin xe^x\,\mathrm{d}x$,

22. $\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$,

23. Załóżmy, że $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem i funkcja $f : I \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ jest różniczkowalna. Udowodnij, że

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C.$$

Oblicz całki nieoznaczone:

24. $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$

25. $\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$,

26. $\int \frac{x^2}{1-x^3}\,\mathrm{d}x$,

27. $\int \frac{e^x}{3+e^x}\,\mathrm{d}x$,

28. $\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$,

29. $\int \frac{1}{\arccos x \cdot \sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Całka nieoznaczona II

Funkcje hiperboliczne. Przypomnijmy:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Łatwo wyprowadzić tożsamości

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad \text{(tzw. jedynka hiperboliczna)},$$
$$\cosh(2x) = 2\sinh^2 x - 1,$$
$$\sinh(2x) = 2\cosh x \cdot \sinh x.$$

Łatwo sprawdzić, że $\int \sinh x \, \mathrm{d}x = \cosh x + C$ i $\int \cosh x \, \mathrm{d}x = \sinh x + C$.
Sinus i cosinus hiperboliczny mają swoje funkcje odwrotne:

$$\operatorname{arsinh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right),\ y \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{arcosh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right),\ y \geqslant 1$$

oraz

$$(\operatorname{arsinh} y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}, \qquad (\operatorname{arcosh} y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}},\ y > 1.$$

Mamy więc kolejne ważne funkcje pierwotne:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh} x + C, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x + C.$$

Tw. o całkowaniu przez podstawienie. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła, funkcja g jest różniczkowalna i g' jest ciągła, oraz F jest funkcją pierwotną funkcji f. Wówczas

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = F(g(x)) + C.$$

Do całkowania funkcji wymiernych przydatne jest twierdzenie:

Tw. o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste. Każda funkcja wymierna F jest sumą pewnego wielomianu i pewnej liczby ułamków prostych, czyli funkcji wymiernych postaci

$$\frac{A}{(x-a)^k},\ A, a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}, \qquad \frac{Ax+B}{((x-a)^2+b^2)^k},\ A, B, a \in \mathbb{R}, b > 0, k \in \mathbb{N}.$$

Mianowniki tych ułamków prostych są dzielnikami mianownika F.

1. Oblicz całki, stosując tw. o całkowaniu przez podstawienie:

(a) $\int x e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$

(b) $\int x\sqrt{4-x^2} dx$

(c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$

(d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$

(e) $\int e^{\sqrt{x}} dx$

(f) $\int \frac{\ln^5 x}{x} dx$

(g) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

(h) $\int \sqrt{1-x^2} dx$

(i) $\int \sqrt{x^2-1} dx$

(j) $\int \sqrt{1+x^2} dx$

(k) $\int \frac{dx}{\cosh x}$,

(l) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$,

(m) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}$

(n) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$,

(o) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}$.

2. Oblicz całki

$$\int \arcsin x \, \mathrm{d}x, \quad \int \operatorname{arsinh} x \, \mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x}.$$

3. Oblicz całki z funkcji wymiernych:

(a) $\int \frac{dx}{1+x^3}$

(b) $\int \frac{dx}{x+x^3}$

(c) $\int \frac{x}{1+x^3} dx$

(d) $\int \frac{dx}{x^4+4}$

(e) $\int \frac{x^3}{x^4+1} dx$

(f) $\int \frac{x^2}{1-x^4} dx$

4. Udowodnij istnienie funkcji pierwotnej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ \sin\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \end{cases}$$

Analiza - klasa 4a   Zestaw 23.   17.4.2023

Całka Newtona

Definicja. Niech $a < b$ i $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. *Całka Newtona (całka oznaczona)* funkcji f na przedziale $[a,b]$ jest to liczba

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji f. Ten sam wzór uznajemy za definicję całki oznaczonej w przypadku $a > b$.

Stw. 1. (Liniowość całki Newtona) Jeżeli funkcje $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to $\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Stw. 2. (Wzór na całkowanie przez części) Jeżeli funkcje $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne i funkcje f', g' są ciągłe, to

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Stw. 3. (Wzór na całkowanie przez podstawienie) Niech $g : [a,b] \to I \subset \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną taką, że funkcja g' jest ciągła i $f : I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(g(b)) - F(g(a)),$$

gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji f.

Stw. 4. (Monotoniczność całki) Jeżeli funkcje $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe i $f \geqslant g$ na $[a,b]$, to $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Stw. 5. (Tw. o wartości średniej dla całek) Jeżeli funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to dla pewnego $\xi \in (a,b)$ zachodzi $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)$.

Tw. 6. (Przybliżanie całki sumami całkowymi) Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $\delta > 0$, że dla dowolnych punktów $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ takich, że $x_i - x_{i-1} < \delta$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ zachodzi

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon.$$

Interpretacja geometryczna całki Newtona: Jeżeli $f : [a,b] \to [0, +\infty)$ jest funkcją ciągłą, to całka $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jest równa polu pod wykresem funkcji f.

1. Oblicz całki (a) $\displaystyle\int_{1/e}^{e} \ln x\,\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$, (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$. (d) $\displaystyle\int_{-1}^{2} xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

2. Znajdź wzory rekurencyjne dla całek $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$.

3. Funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Udowodnij nierówności

$$(b-a)\inf_{[a,b]} f \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\sup_{[a,b]} f, \qquad \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

4. Funkcja $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Wykaż, że
(a) jeśli f jest parzysta, to $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$,
(b) jeśli f jest nieparzysta, to $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

5. Funkcja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Udowodnij równości
(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

6. Oblicz całkę $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

7. Udowodnij, że $\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n(1-x)^m\,\mathrm{d}x$ dla $m, n \in \mathbb{N}$.

8. Udowodnij nierówność $\displaystyle\frac{17}{18} < \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x < \frac{17}{18} + \frac{1}{600}$.

9. Funkcja f jest ciągła na pewnym przedziale zawierającym liczbę a. Udowodnij, że $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)$.

10. Oblicz granice (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\int_1^x \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{\cos^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$,
(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^2}}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

11. Udowodnij następujące uogólnienie tw. o wartości średniej dla całek: Funkcje $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe i g nie zmienia znaku. Wówczas istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

12. Niech $0 < a < b$ i $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Wyznacz $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\int_{ta}^{tb} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

13. Wyprowadź wzór na pole elipsy o równaniu $\displaystyle\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

14. Oblicz granice (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$, (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+k^2}$.