Analiza - klasa 3a4 Zestaw 1. 6.9.2021

Wielomiany I

Wielomianem stopnia k o współczynnikach $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$, gdzie $a_k \neq 0$, nazywamy funkcję $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$$w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k.$$

Stopień wielomianu w oznaczamy $\deg w$. Liczbę a_k nazywamy *współczynnikiem wiodącym* wielomianu w. Jeżeli $a_k = 1$, to mówimy, że w jest wielomianem *unormowanym* lub *monicznym.*

Przyjmujemy, że stopień *wielomianu zerowego* $w_0(x) = 0$ jest równy $-\infty$.

Każdą liczbę $\alpha \in \mathbb{C}$ taką, że $w(\alpha) = 0$ nazywamy *pierwiastkiem* wielomianu w.

Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach zespolonych oznaczamy $\mathbb{C}[x]$. Analogicznie definiujemy zbiory $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ i $\mathbb{Z}[x]$. Każdy z tych zbiorów jest zamknięty ze względu na operacje dodawania, odejmowania, mnożenia i składania wielomianów (zob. też zadanie 11).

Lemat. Niech $w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{k-1} x^{k-1} + a_k x^k$, $a_j \in \mathbb{C}$, będzie wielomianem stopnia $k \geqslant 1$. Wówczas istnieje liczba rzeczywista M taka, że
$$|a_k x^k| > |w(x) - a_k x^k|, \qquad \text{gdy } |x| > M.$$

Pierwsze twierdzenie o równości wielomianów. Załóżmy, że wielomiany
$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \quad \text{i} \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$$
gdzie $a_j, b_j \in \mathbb{C}$ i $a_k, b_n \neq 0$, spełniają dla każdego $x \in \mathbb{C}$ równość $f(x) = g(x)$. Wówczas $k = n$ i $a_j = b_j$ dla $j = 0, 1, \ldots, k$.

---

1. Znajdź wielomian dodatniego stopnia o współczynnikach całkowitych, którego pierwiastkiem jest liczba (a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, (b) $\sqrt[5]{2} + \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$

2. Liczba zespolona x_0 jest pierwiastkiem wielomianu $P \in \mathbb{R}[x]$. Wykaż, że liczba $\overline{x_0}$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu.

3. Wielomian f ma współczynniki całkowite i liczby a, b są całkowite. Pokaż, że $a - b \mid f(a) - f(b)$.

4. Udowodnij, że wielomian $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (gdzie $a \neq 0$) przyjmuje dla każdej liczby całkowitej x wartość całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $6a$, $2b$, $a + b + c$ oraz d są całkowite.

5. Wielomian P ma współczynniki całkowite. Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b liczba $P(a + \sqrt{b}) + P(a - \sqrt{b})$ jest całkowita.

6. Wielomian W ma współczynniki wymierne, $p, q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$ i $\sqrt{q}$ jest liczbą niewymierną. Udowodnij, że liczba $p + \sqrt{q}$ jest pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $p - \sqrt{q}$ jest jego pierwiastkiem.

7. Wartości $w(0)$ i $w(1)$ wielomianu w stopnia 3 o współczynnikach całkowitych są nieparzyste. Udowodnij, że w nie ma pierwiastków całkowitych.

8. Zbadaj, czy istnieje wielomian w o współczynnikach całkowitych oraz liczba naturalna k takie, że $w(k) = k + 1$, $w(k + 1) = k + 2$, $w(k + 2) = k$.

9. Czy istnieje wielomian w stopnia 5 o współczynnikach całkowitych taki, że $w(5) = 2$ i $w(-5) = 3$?

10. Niech $n > 1$ i $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że wielomian
$$w(x) = x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - x^{2n-3} + \ldots + x^2 - x + \frac{n}{4}$$
nie ma pierwiastków rzeczywistych.

11. Udowodnij, że wielomian $w(x) = x^3 - 2x$ nie jest różnowartościowy na zbiorze liczb rzeczywistych i jest różnowartościowy na zbiorze liczb wymiernych.

12. Załóżmy, że f i g są wielomianami. Udowodnij, że

(i) funkcja $f + g$ jest wielomianem i $\deg(f + g) \leqslant \max(\deg f, \deg g)$, oraz jeśli $\deg f > \deg g$, to $\deg(f + g) = \deg f$;

(ii) funkcja $f \cdot g$ jest wielomianem i $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$;

(iii) funkcja $f \circ g$ jest wielomianem i $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$.

13. Pokaż, że wielomian $w(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ jest

(i) funkcją nieparzystą wtedy tylko wtedy, $a_k = 0$ dla parzystych k;

(ii) funkcją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy $a_k = 0$ dla nieparzystych k.

14. Udowodnij, że wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych jest funkcją (określoną na $\mathbb{R}$) nieograniczoną z dołu i z góry.

15. Udowodnij, że wielomian stopnia parzystego i dodatniego o współczynnikach rzeczywistych i dodatnim współczynniku wiodącym jest funkcją ograniczoną z dołu i nieograniczoną z góry.

16. Udowodnij, że funkcje $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ nie są wielomianami o rzeczywistych współczynnikach.

Analiza - klasa 3a4 Zestaw 2. 15.9.2021

Wielomiany II

1. Funkcja $f(x) = (x^2 - bx)^2 - (ax^2 + x)^2 + 5(b+1)$ jest wielomianem stopnia 3 i $f(1) = 0$. Wyznacz a i b.
2. Wyznacz współczynniki a i b wielomianu $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, jeżeli dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $w(x-1) - w(x) = -3x^2 + 3x - 6$.
3. Wyznacz sumę współczynników wielomianu
$3(x^4 - 3x^2 - x + 5)^{2018} - 2(-3x^3 - 18x^2 + 10x + 9)^{2017}$
4. Czy wielomian $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ jest kwadratem innego wielomianu o współczynnikach rzeczywistych?
5. Dla jakich a, b wielomian $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1$ jest kwadratem innego wielomianu?
6. Znajdź współczynniki przy nieparzystych potęgach x w wielomianie
$$f(x) = (1 - x + x^2 - \ldots + x^{100})(1 + x + x^2 + \ldots + x^{100}).$$

Twierdzenie o dzieleniu wielomianów. Dla każdej pary wielomianów $f(x)$ i $h(x)$, gdzie $\deg h \geqslant 0$, istnieje dokładnie jedna para wielomianów $q(x)$ i $r(x)$ taka, że
$$f = h \cdot q + r, \quad \text{i} \quad \deg r < \deg h.$$
Mówimy wówczas, że r jest *resztą z dzielenia* wielomianu f przez wielomian h. Jeżeli $r = 0$ (czyli $f = h \cdot q$), to mówimy, że h jest *dzielnikiem* f lub f jest *podzielny* przez h.

Twierdzenie Bézouta. Reszta z dzielenia wielomianu f przez dwumian $x - c$ jest równa $f(c)$. Inaczej mówiąc
$$f(x) = (x - c)q(x) + f(c)$$
dla pewnego wielomianu q takiego, że $\deg q = \deg f - 1$.

Wniosek z tw. Bézouta. Liczba c jest pierwiastkiem niezerowego wielomianu f wtedy i tylko wtedy, gdy dwumian $x - c$ jest dzielnikiem wielomianu f.

---

7. Dla jakich wartośći a, b wielomian $x^3 + ax^2 + bx - 6$ jest podzielny przez $x^2 - 3x + 2$?
8. Liczby $c_1, c_2, \ldots, c_k$ są różnymi pierwiastkami niezerowego wielomianu f. Udowodnij, że wielomian $(x - c_1)(x - c_2) \cdot \ldots \cdot (x - c_k)$ jest dzielnikiem wielomianu f i $\deg f \geqslant k$
9. Wielomian f daje resztę -1 przy dzieleniu przez $x - 1$, resztę 2 przy dzieleniu przez $x - 2$ i resztę 11 przy dzieleniu przez $x - 3$. Wyznacz resztę z dzielenia f przez $(x-1)(x-2)(x-3)$.
10. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $x^{2018} - 2017x^{1009} + x^2 - 5x + 2018$ przez $x^2 - 1$.
11. Liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu w. Pokaż, że wielomian $v(x) = w(x^n)$ jest podzielny przez wielomian $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$.
12. Dane są wielomiany f, g i liczba c takie, że dla każdego x
$$(x - c)f(x) = (x - c)g(x).$$
Udowodnij, że $f = g$.
13. Dla jakich wartości $a, b \in \mathbb{R}$ wielomian $ax^4 + bx^3 + 1$ jest podzielny przez $(x-1)^2$?
14. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ wielomian (a) $(x-1)^n - x^n - 1$, (b) $(x+1)^n - x^n - 1$ jest podzielny przez $x^2 + x + 1$?
15. Dla jakich liczb całkowitych a wielomian $(x - a)(x - 10) + 1$ jest iloczynem dwóch wielomianów stopnia 1 o współczynnikach całkowitych?
16. Wyznacz wszystkie wielomiany $f \in \mathbb{R}[x]$ takie, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$
$$x \cdot f(x-1) = (x+1) \cdot f(1).$$
17. Wyznacz wszystkie wielomiany $f \in \mathbb{R}[x]$ takie, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$
$$(x+1) \cdot f(x) = (x - 10) \cdot f(x+1).$$

Analiza - klasa 3a4 Zestaw 3. 29.9.2021

Wielomiany III

Tw. Niech $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ i $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$, $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{C}$. Wówczas istnieje dokładnie jeden wielomian p stopnia nie większego od n taki, że $p(x_j) = y_j$ dla $j = 0, 1, \dots, n$.

Wniosek (Drugie tw. o równości wielomianów) Jeżeli wielomiany p, q stopnia nie większego niż n przyjmują te same wartości dla $n+1$ różnych argumentów, to $p = q$.

Schemat Hornera. Dla danego wielomianu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ i liczby c istnieje dokłądnie jeden wielomian $g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ taki, że $f(x) = (x-c)g(x) + f(c)$. Współczynniki b_k i wartość $f(c)$ można sprawnie wyznaczyć za pomocą algorytmu zwanego *schematem Hornera*:

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0
c	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1}$	$\dots$	$b_0 = a_1 + cb_1$	$f(c) = a_0 + cb_0$

1. Udowodnij, że nie istnieje wielomian p taki, że $p(x) = \sin x$ dla każdego $x \in [0, \pi]$.

2. Definiujemy wielomiany

$$\binom{x}{0} = 1, \qquad \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} \qquad \text{dla } k = 1, 2, 3 \dots.$$

(a) Pokaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\binom{x+1}{k+1} = \binom{x}{k} + \binom{x}{k+1}.$$

(b) Pokaż, że $\binom{x}{k}$ jest liczbą całkowitą dla $x \in \mathbb{Z}$.

(c) Niech w będzie wielomianem stopnia n. Pokaż, że $w(x) \in \mathbb{Z}$ dla każdego $x \in \mathbb{Z}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby całkowite $a_0, a_1, \dots, a_n$ takie, że

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \binom{x}{k}.$$

3. Niech p będzie wielomianem stopnia n takim, że $p(k) = \dfrac{k}{k+1}$ dla k $= 0, 1, 2, \dots, n$. Oblicz $p(n+1)$.

4. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $x^{2021} - 1$ przez wielomian $(x^2+1)(x^2+x+1)$.

5. Dane są różne liczby całkowite a i b. Pokaż, że wielomian $(x-a)^2(x-b)^2+1$ nie jest iloczynem dwóch wielomianów o współczynnikach całkowitych dodatniego stopnia.

6. Liczby całkowite $a_1, a_2, \dots, a_n$ są różne. Pokaż, że wielomian

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) - 1$$

nie jest iloczynem dwóch wielomianów o współczynnikach całkowitych dodatniego stopnia.

7. Stosując schemat Hornera oblicz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu

(a) $f(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1$ przez $x - 1$,

(b) $g(x) = 4x^5 + 3x^3 - 2x + 1$ przez $x + 2$,

(c) $h(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{2}{3}x - 2$ przez $x + \frac{1}{3}$.

8. Zapisz wielomian $f(x)$ jako sumę potęg $(x-c)^k$. Zastosuj schemat Hornera:

(a) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 10x - 9$, $c = 2$,

(b) $f(x) = x^5$, $c = 1$,

(c) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $c = 3$.

9. Zapisz wielomian $3x^4 - 4x^2 + 7x - 12$ jako sumę $\sum_{k=0}^{4} c_k \binom{x}{k}$.

10. Wyznacz najmniejszą wartość wielomianu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^3(x^3+1)(x^3+2)(x^3+3).$$

Wielomiany IV

Algorytm dzielenia wielomianów z resztą: Dla danych wielomianów w i q, gdzie $\deg w \geqslant \deg q$, szukamy wielomianów v i r takich, że $w = p \cdot v + r$ i $\deg(r) < \deg(q)$:

Niech $w_0(x) = w(x)$, $v_0(x) = 0$.

Jeżeli mamy już wyznaczone wielomiany w_k i v_k, to v_{k+1} otrzymujemy dodając do v_k iloraz najwyższych stopniem wyrazów wielomianów w_k i p: $v_{k+1}(x) = v_k(x) + c_k x^{j_k}$. Następnie wyznaczamy $w_{k+1}(x) = w_k(x) - c_k x^{j_k} \cdot p(x)$. Wówczas $\deg(w_{k+1}) - \deg(w_k)$.

Powtarzamy tak długo, aż $\deg(w_k) < \deg(q)$. Wtedy $v = v_k$ i $r = w_k$.

Wyznaczanie pierwiastków wymiernych wielomianów o współczynnikach całkowitych:

Niech $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n \neq 0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych.

I twierdzenie o pierwiastkach wymiernych. Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze, jest pierwiastkiem wielomianu f, to $p \mid a_0$ oraz $q \mid a_n$.

Wniosek. Każdy wymierny pierwiastek unormowanego wielomianu o współczynnikach całkowitych jest liczbą całkowitą.

II twierdzenie o pierwiastkach wymiernych. Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze, jest pierwiastkiem wielomianu f i b jest liczbą całkowitą taką, że $f(b) \neq 0$, to $p - bq \mid f(b)$.

---

1. Udowodnij, że iloraz z dzielenia wielomianu o współczynnikach całkowitych przez dwumian $x - c$, gdzie c jest liczbą całkowitą, jest wielomianem o współczynnikach całkowitych.

2. Wykonaj dzielenie wielomianu z resztą:

(a) $x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ przez $x^2 + 2x$,

(b) $x^6 + 1$ przez $x^2 + x - 2$

(c) $3x^7 - x^6 + 2x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x - 2$ przez $x^2 + 1$

(d) x^8 przez $x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$

3. Wyznacz wszystkie pierwiastki wymierne wielomianów:

(a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$,

(b) $x^4 + 4x^3 - 25x^2 - 16x + 84$,

(c) $11x^4 + 9x^3 - 35x^2 - 27x + 6$,

(d) $15x^4 - 19x^3 + 16x^2 - x - 3$,

(e) $18x^6 + 27x^5 - 5x^4 - 18x^2 - 27x + 5$,

(f) $9x^4 - 48x^3 + 10x^2 + 24x + 5$,

(g) $x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 26x^2 + 36x - 72$.

4. Udowodnij, że liczby $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ i $\sqrt[3]{3} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ są niewymierne.

5. Wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartości nieparzyste dla dwóch kolejnych liczb całkowitych. Udowodnij, że f nie ma pierwiastków całkowitych.

6. Wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartość 1 dla trzech różnych liczb całkowitych. Udowodnij, że nie ma on pierwiastków całkowitych.

7. Wielomian $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, ma współczynniki całkowite. Załóżmy, że liczby a_n, a_0 i $f(1)$ są nieparzyste. Udowodnij, że f nie ma pierwiastków wymiernych.

8. Liczby 1 i 2 są pierwiastkami wielomianu f o współczynnikach całkowitych. Udowodnij, że pewien współczynnik wielomianu f jest mniejszy od -1.

9. Niech $k, p \in \mathbb{N}$ i wielomian $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ma współczynniki całkowite. Udowodnij, że jeżeli $p + 1$ nie dzieli żadnej z liczb $f(k), f(k+1), \ldots, f(k+p)$, to wielomian f nie posiada pierwiastków wymiernych.

10. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $\sqrt[3]{3} + \dfrac{k}{\sqrt[3]{3}}$ jest niewymierna.

11. Niech $n \geqslant 2$. Udowodnij, że wielomian

$$p(x) = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} + 1$$

nie ma pierwiastków wymiernych.

Analiza - klasa 3a4 Zestaw 5. 3.11.2021

Wielomiany V

Zasadnicze twierdzenie algebry. Każdy wielomian o współczynnikach zesolonych dodatniego stopnia ma pierwiastek zespolony.

(Dowód tego twierdzenia pomijamy – na razie ...)

Wniosek 1. Każdy wielomian $p \in \mathbb{C}[z]$, $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ stopnia $n > 1$, ma dokładnie n pierwiastków zespolonych $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ (niekoniecznie różnych) i $p(z) = a_n(z - z_0)(z - z_1)\ldots(z - z_{n-1})$.

Wniosek 2. Każdy wielomian z $\mathbb{R}[x]$ dodatniego stopnia jest iloczynem wielomianów z $\mathbb{R}[x]$ stopnia 1 i wielomianów z $\mathbb{R}[x]$ stopnia 2 nie mających pierwiastków rzeczywistych.

Wniosek 3. Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych nieparzystego stopnia ma pierwiastek rzeczywisty.

Twierdzenie (Wzory Viete'a). Liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są wszystkimi zespolonymi pierwiastkami wielomianu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_i \in \mathbb{C}$ i $a_n \neq 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są równości

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$
$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} x_i x_j x_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k} = (-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

Uwaga: W powyższym twierdzeniu nie zakładamy, że pierwiastki $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są różne.

---

1. Wielomian $w(x) = x^3 + px + q$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, x_3, przy czym $x_1 = x_2$ i $x_3 = x_1 - 6$. Wyznacz p i q.

2. Liczby 2 i 3 są pierwiastkami wielomianu $2x^3 + kx^2 - 13x + m$. Wyznacz współczynniki k i m oraz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

3. Niech x_1, x_2, x_3 oznaczają pierwiastki wielomianu $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Oblicz wartości wyrażeń

(a) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}$,
(b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$,
(c) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$,
(d) $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$,
(e) $\dfrac{1}{x_1x_2} + \dfrac{1}{x_2x_3} + \dfrac{1}{x_3x_1}$.

4. Liczby x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu $x^3 + 6x^2 + 11x - 6$. Znajdź wielomian stopnia 3, którego pierwiastkami są liczby (a) x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1, (b) $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$, $x_3 + x_1$

5. Znajdź pierwiastki wielomianu $x^4 - 10x^3 + 32x^2 - 34x + 7$, wiedząc, że suma pewnych dwóch jego pierwiastków jest równa 4.

6. Wielomian $p(x) = x^5 - 10x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 32$ ma pięć pierwiastków dodatnich. Wyznacz współczynniki a, b, c.

7. Wielomian $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste. Udowodnij, że $b^2 \geqslant ac$ i $c^2 \geqslant bd$. Czy jest prawdziwe twierdzenie odwrotne?

8. Liczby x, y, z, u, v, w spełniają warunki

$$x + y + z = u + v + w, \quad xyz = uvw, \quad 0 < u \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant w, \quad u \leqslant v \leqslant w.$$

Udowodnij, że $u = x, v = y, w = z$.

9. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunki $xyz > 1$ i $x + y + z < \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$. Udowodnij, że dokładniej jedna z liczb x, y, z jest mniejsza od 1.

10. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20 \end{cases}$$

11. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$ i załóżmy, że $a + b + c > 0$, $ab + bc + ca > 0$, $abc > 0$. Udowodnij, że $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

12. Liczby x, y, z, a spełniają równości

$$x + y + z = a, \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}.$$

Udowodnij, że jedna z liczb x, y, z jest równa a.

13. Dane są liczby wymierne p, q, r takie, że każda z liczb

$$p + q + r, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}, \quad pqr$$

jest całkowita. Udowodnij, że liczby p, q, r są całkowite.

14. Dla danych liczb zespolonych a, b, c niech $A_k = a^k + b^k + c^k$. Zakładając, że $A_1 = 0$, udowodnij równości:

$$A_3 = 3abc, \quad 2A_4 = (A_2)^2, \quad \frac{A_5}{5} = \frac{A_2}{2}\cdot\frac{A_3}{3}, \quad \frac{A_7}{7} = \frac{A_2}{2}\cdot\frac{A_5}{5}.$$

Analiza - klasa 3a4 Zestaw 6. 10.11.2021

Wielomiany VI

Definicja. Mówimy, że wielomian $p \in \mathbb{K}[x]$ (gdzie $\mathbb{K} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) jest rozkładalny w $\mathbb{K}[x]$ (nad $\mathbb{K}$), jeżeli istnieją wielomiany $q, r \in \mathbb{K}[x]$ dodatnich stopni takie, że $p = q \cdot r$.

Kryterium Eisensteina nierozkładalności wielomianów w $\mathbb{Z}[x]$. Dany jest wielomian $f \in \mathbb{Z}[x]$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ i $a_n \neq 0$. Załóżmy, że istnieje liczba pierwsza p taka, że

$$p \nmid a_n, \qquad p \mid a_k \text{ dla } k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \text{oraz} \quad p^2 \nmid a_0.$$

Wówczas wielomian f nie jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

---

1. Opisz wielomiany nierozkładalne w $\mathbb{R}[x]$ i $\mathbb{C}[x]$.

2. Rozłóż wielomiany na czynniki w $\mathbb{Z}[x]$:

(a) $(x+1)^3 + (x-1)^3$,
(b) $x^6 + 1$,
(c) $x^9 + x^4 - x - 1$,
(d) $x^4 + 4$,
(e) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$,
(f) $8x^3 - 5x^2 - 24x + 15$,
(g) $x^5 + x^3 - x^2 - 1$,
(h) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 6x - 12$,
(i) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 9x - 15$,
(j) $x^5 + x^4 + x^3 - 1$
(k) $x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1$
(l) $x^8 + x^4 + 1$,
(m) $x^10 + x^5 + 1$,
(n) $(x^2 + x + 1)^2 + 3(x^2 + x + 1) + 2$
(o) $2x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$
(p) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2 - x^5$

3. Niech $p \in \mathbb{Z}[x]$ i $\deg p > 1$. Udowodnij, że wielomian $f(x) = p(x + p(x))$ jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

4. Udowodnij, że wielomian $2x^{17} - 18x^{12} + 24x^9 + 243x^6 - 30x^3 - 6$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

5. Czy wielomian $P(x) = 2 + \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}x^k$ jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$?

6. Udowodnij, że wielomian $x^6 + x^3 + 1$ nie jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

7. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ i $P(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$. Pokaż, że wielomian P jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$ wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą złożoną.

Wskazówka: Dla ($\Leftarrow$) pokaż, że $P(x+1)$ nie jest rozkładalny, stosując kryterium Eisensteina.

8. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje nieskończenie wiele **dwumianów** stopnia n o współczynnikach całkowitych nierozkładalnych w $\mathbb{Z}[x]$

9. Udowodnij, że wielomian $p(x) = x^{101} + 101x^{100} + 102$ nie jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

10. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że wielomian $x^{2^n} + 1$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

11. Czy wielomian $x^{105} - 9$ jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

12. Niech $a \in \mathbb{Z}$ i $5 \nmid a$. Udowodnij, że wielomian $P(x) = x^5 - x + a$ jest nierozkładalny nad $\mathbb{Z}$.

13. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n > 1$. Udowodnij, że wielomian $P(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ jest nierozkładalny nad $\mathbb{Z}$.

14. **[Lemat Gaussa]** Udowodnij, że jeśli wielomian $p \in \mathbb{Z}[x]$ jest rozkładalny w $\mathbb{Q}[x]$, to jest też rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

Wielomainy VII - Powtórzenie

Poniższe zadania proszę traktować jedynie jako uzupełnienie zestawów 1 - 6.

---

1. Uzadadnij, że zbiór wartości wielomianu $p \in \mathbb{C}[x]$ dodatniego stopnia jest nieskończony.

2. Czy istnieje wielomian $P \in \mathbb{Z}[x]$ i trzy różne liczby całkowite a, b, c takie, że

$$P(a) = b, \quad P(b) = c, \quad P(c) = a?$$

3. Wielomina $p(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + x - 3$ po podzieleniu przez wielomian $x^3 + 2x^2 - x - 2$ daje resztę $2x^2 + x - 3$. Wyznacz współczynniki a, b, c.

4. Wyznacz rzeczywiste rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 + xyz = x^4 + y^4 + z^4 + 1 \end{cases}$$

5. Dla jakich wartości współczynnika $a \in \mathbb{R}$ pierwiastki zespolone x_1, x_2, x_3 wielomianu $x^3 + ax^2 - 3x - 19$ spełniają warunek $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3$?

6. Dla danych liczb a, b, c wyznacz wielomian stopnia 3, którego pierwiastki są sześcianami pierwiastków wielomianu $x^3 + ax^2 + bx + c$.

7. Udowodnij, że wielomian $ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $2 \nmid ad$ i $2 \mid bc$, nie może mnieć trzech pierwiastków wymiernych.

8. Wielomian $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \neq 0$, ma współczynniki całkowite i $7 \mid f(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$. Udowodnij, że każda z liczb a, b, c, d, e jest podzielna przez 7.

9. Dany jest wielomian $f \in \mathbb{Z}[x]$ taki, że dla pewnej liczby całkowitej k każda z liczb $f(k), f(k+1), f(k+2)$ jest podzielna przez 3. Udowodnij, że $3 \mid f(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$.

10. Dany jest wielomian $p \in \mathbb{Z}[x]$ stopnia 7, który dla 7 różnych całkowitych argumentów przyjmuje wartość 1 lub -1. Udowodnij, że wielomian p nie jest rozkładalny nad $\mathbb{Z}$.

11. Wyznacz wszystkie wielomiany $p \in \mathbb{C}[x]$ takie, że $p(p(x)) = p(x)^m$ dla każdego $x \in \mathbb{C}$ i pewnego $m \in \mathbb{N}$.

12. Rozłóż na czynniki wielomiany

(a) $9x^3 - 15x^2 + 4x + 4$,

(b) $x^6 + 2x^5 + x^4 - x^2 + 2x - 1$,

(c) $x^6 - 5x^2 - 2x + 2$.

Analiza - klasa 3a4 Zestaw 8. 15.12.2021

Układy równań nieliniowych II

Rozwiąż układy równań:

1. $\begin{cases} x - y = 6 \\ x^3 - y^3 = 126 \end{cases}$

2. $\begin{cases} xy + 24 = \dfrac{x^3}{y} \\ xy - 6 = \dfrac{y^3}{x} \end{cases}$

3. $\begin{cases} (x - y)(y - 1) = 6 \\ (x + 2)(y + 2) = 24 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 7x^3 + 11xy^2 = 6 \\ x^3 + x^2y + y^3 = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} (x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1) = 3 \\ (1 - x)(1 - y) = 6 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{xy}{x + 2y} + \dfrac{x + 2y}{xy} = 2 \\ \dfrac{xy}{x - 2y} - 6\dfrac{x - 2y}{xy} = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ xy + x + y = 5 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) = 1 + y^7 \\ (1 + y)(1 + y^2)(1 + y^4) = 1 + x^7 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = \dfrac{9}{2} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2 + y^2 = x + y \\ x^4 + y^4 = \dfrac{(x + y)^2}{2} \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{x + y}{xyz} = 3 \\ \dfrac{y + z}{xyz} = 4 \\ \dfrac{z + x}{xyz} = 5 \end{cases}$

Analiza - klasa 3a4 Zestaw 9. 5.1.2022

Kresy zbiorów

Definicje. Niech $A \subset \mathbb{R}$.

- Zbiór A jest *ograniczony z góry* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $b \in \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $a \in A$ zachodzi nierówność $a \leqslant b$. Każdą taką liczbę b nazywamy *ograniczeniem górnym* zbioru A.
- Liczba $b \in \mathbb{R}$ jest *kresem górnym* (*supremum*) zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

  (i) b jest ograniczeniem górnym zbioru A;
  (ii) jeżeli c jest ograniczeniem górnym zbioru A, to $b \leqslant c$.

  Kres górny zbioru A oznaczamy $\sup A$.

Analogicznie definujemy zbiór *ograniczony z dołu*, *ograniczenie dolne* i *kres dolny* (*infimum*) zbioru A, oznaczany $\inf A$.

Jeżeli niepusty zbiór A nie jest ograniczony z góry, piszemy $\sup A = +\infty$, jeżeli A nie jest ograniczony z dołu, to piszemy $\inf A = -\infty$.

Przyjmujemy, że $\inf \emptyset = +\infty$ i $\sup \emptyset = -\infty$.

Jeżeli $a = \sup A$ i $a \in A$, to mówimy, że a jest *elementem maksymalnym* zbioru A i stosujemy oznaczenie $a = \max A$. Podobnie definiujemy *element minimalny* $\min A$.

Stw. Niech $A \subset \mathbb{R}$. Wówczas

(i) Liczba $b \in \mathbb{R}$ jest kresem górnym zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy b jest ograniczeniem górnym zbioru A oraz

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{a\in A}\ b-\varepsilon < a.$$

(ii) Liczba $b \in \mathbb{R}$ jest kresem dolnym zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy b jest ograniczeniem dolnym zbioru A oraz

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{a\in A}\ a < b+\varepsilon.$$

Aksjomat ciągłości (Dedekinda). Każdy niepusty i ograniczony z góry zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma kres górny.

Stw. Każdy niepusty i ograniczony z dołu zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma kres dolny.

Stw. Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest nieograniczony z góry.

Stw. (istnienie pierwiastków z liczb nieujemnych). Jeżeli $a \geqslant 0$ i $n \in \mathbb{N}$, to istnieje dokładnie jedna liczba $b \geqslant 0$ taka, że $b^n = a$.

Tw. (Zasada Archimedesa) Dla każdej liczby rzeczywistej a istnieje liczba naturnalna $n > a$.

Tw. (o gęstości $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$) Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, $a < b$. istnieje liczba $x \in \mathbb{Q}$ taka, że $a < x < b$.

Definicja. Jeżeli zbiory $A, B \subset \mathbb{R}$ są niepuste, $\lambda \in \mathbb{R}$, to przyjmujemy, że

$A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$, $A-B = \{a-b : a \in A, b \in B\}$, $\lambda\cdot A = \{\lambda a : a \in A\}$

oraz $-A = (-1)\cdot A$.

---

1. Znajdź kresy zbiorów i zbadaj, czy zbiory mają elementy maksymalne i minimalne.

(a) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\right\}$;
(b) $\left\{\frac{n^2+2n-3}{n+1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\right\}$;
(c) $\left\{x + \frac{2}{x} \in \mathbb{R} : x > 0\right\}$;
(d) $\left\{\frac{x-1}{x+1} \in \mathbb{R} : x > -1\right\}$;
(e) $\left\{\frac{x}{1+x^2} \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\right\}$;
(f) $\left\{x - \frac{1}{x} : 1 \leqslant x \leqslant 2022\right\}$;

2. Niech $A, B \subset \mathbb{R}$ i dla dowolnych $a \in A$ i $b \in B$ zachodzi $a \leqslant b$. Udowodnij, że $\sup A \leqslant \inf B$. Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne?

3. Udowodnij, że dla każdej liczby $a < 0$ i liczby nieparzystej n istnieje dokładnie jedna liczba $b < 0$ taka, że $b^n = a$.

4. Niech $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ i $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Udowodnij, że istnieje liczba wymierna q taka, że $a < qx < b$.

5. Wyznacz kresy zbiorów

(a) $\left\{\frac{n-k}{n+k} \in \mathbb{R} : n, k \in \mathbb{N}\right\}$;
(b) $\left\{\frac{(-1)^n - m}{n+m}\right\}$
(c) $\left\{\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{N},\ n \neq m\right\}$;
(d) $\left\{\frac{1}{k} + \frac{1}{l} - \frac{1}{m} \in \mathbb{R} : k, l, m \in \mathbb{N}\right\}$;

6. Znajdź kresy zbiorów

(a) $\left\{\frac{nm}{2n^2+m^2} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$
(b) $\left\{\frac{xy}{2x^2+y^2} : x, y > 0\right\}$

7. Znajdź kresy zbiorów

(a) $\{xy : x + y = 4 \text{ i } 0 \leqslant x, y \leqslant 4\}$
(b) $\{xyz : x + y + z = 6 \text{ i } 0 \leqslant x, y, z \leqslant 6\}$

8. Niech A oznacza zbiór wszystkich liczb niewymiernych z przedziału $(0, 1)$. Udowodnij, że $A + A = (0, 2)$.

9. Niech $A \subset \mathbb{R}$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, $b = \inf A$, $c = \sup A$. Wyznacz kresy zbioru $\lambda \cdot A$.

10. Zbiory $A, B \subset \mathbb{R}$ są niepuste. Udowodnij równości:

(i) $\sup(-A) = -\inf A$,

(ii) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,

(iii) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$,

(iv) $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$,

(v) $\sup(A \cdot B) = \max(\sup A \cdot \sup B, \sup A \cdot \inf B, \inf A \cdot \sup B, \inf A \cdot \inf B)$.

11. Wyznacz kresy zbioru $\{a^2 - ab : a, b \in (0,1)\}$.

12. Wyznacz kresy zbiorów

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \sin x \cdot \cos y : 0 \leqslant x, y \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}, \\ B &= \left\{ \sin(x+y) + \cos(x-y) : 0 \leqslant x, y \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}. \end{aligned}$$

13. Wyznacz kres górny zbioru $\left\{ \dfrac{x(1+\sqrt{y})}{x^2+y^2} : 0 < x \leqslant y < 1 \right\}$.

14. Wyznacz kres dolny zbioru

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} : n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

15. Liczba x jest niewymierna. Udowodnij, że dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ takich, że $0 < a < b < 1$ istnieje liczba naturalna n taka, że $a < nx - \lfloor nx \rfloor < b$.

Analiza - klasa 3a4 Zestaw 10. 19.1.2022

Granica ciągu I

Definicja granicy ciągu. Liczba g jest granicą ciągu liczbowego $(a_n)_n$, jeżeli dla każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N taka, że dla wszystkich $n > N$ spełniona jest nierówność

$$|a_n - g| < \varepsilon.$$

Piszemy wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, $a_n \xrightarrow{n} g$ lub po prostu $a_n \to g$.

W zapisie z użyciem kwantyfikatorów, liczba g jest granicą ciągu $(a_n)_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n>N} \; |a_n - g| < \varepsilon.$$

Jeżeli liczba g jest granicą ciągu $(a_n)_n$, to mówimy, że ciąg $(a_n)_n$ *jest zbieżny do* g. Ciąg, który nie ma granicy, nazywamy *ciągiem rozbieżnym.*

Stw. 1 (jednoznaczność granicy). Ciąg liczbowy (a_n) ma nie więcej niż jedną granicę.

Stw. 2. Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = ca$ dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$,

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$.

---

1. Wykaż, korzystając z definicji granicy ciągu, że

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, gdy $|q| < 1$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} n^k q^n = 0$, gdy $k \in \mathbb{N}$, $|q| < 1$.

2. Zbadaj zbieżność ciągu $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

3. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $a > 1$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n}.$$

Następnie udowodnij, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

4. Wykaż, że każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

5. Wykaż, że poniższe ciągi są rozbieżne:

(a) $a_n = n$,

(b) $b_n = (-1)^n$,

(c) $c_n = \frac{q^n}{n^k}$, gdzie $|q| > 1$, $k \in \mathbb{N}$,

(d) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$,

(e) $b_n = \frac{n^n}{n!}$.

6. Załóżmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. Co można powiedzieć o zbieżności (i granicach) ciągów $(a_{n+1} - a_n)_n$ oraz $(a_{n+1} + a_n)_n$?

7. Wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - g| = 0$.

8. Załóżmy, że $a_n \to a$. Wykaż, że $|a_n| \to |a|$. Podaj przykład, że nie zachodzi implikacja w drugą stronę.

9. Ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > a$. Wykaż, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n > a$ dla $n > N$.

10. Ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Wykaż, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n > b_n$ dla $n > N$.

11. Ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne i istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n \leqslant b_n$ dla $n > N$. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Podaj przykład ciągów $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ takich, że $a_n < b_n$ dla wszystkich n oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

12. Powiemy, że ciąg liczb zespolonych $(z_n)_n$ jest zbieżny do liczby zespolonej z wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$

Wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re} z_n = \mathrm{Re} z$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im} z_n = \mathrm{Im} z$.

13. Zbadaj zbieżność ciągu $z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$.

Analiza - klasa 3a4 Zestaw 11. 16.2.2022

Granica ciągu II

Stw. 1. Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony. (zob. zad. 4 w zestawie 10)

Tw. o trzech ciągach. Dane są trzy ciagi liczbowe $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ i $(c_n)_n$, przy czym $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$ oraz istnieje liczba $N > 0$ taka, że dla każdego $n > N$ spełniona jest nierówność

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n.$$

Wówczas ciąg $(b_n)_n$ jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.

Stw. 2. Ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne i $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Wówczas ciąg $(a_nb_n)_n$ też jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = ab$.

Stw. 3. Ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny, $a_n \neq 0$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = g \neq 0$. Wówczas ciąg $\left(\frac{1}{a_n}\right)_n$ też jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{g}$.

Stw. 4. Niech $k \in \mathbb{N}$, ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty} a_n = g$. Jeżeli $2 \mid k$ i $a_n \geqslant 0$ dla każdego n, lub $2 \nmid k$
to ciąg $(\sqrt[k]{a_n})_n$ jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{g}$.

---

1. Załóżmy, że $a_n \to g$. Wykaż, że ciąg $b_n = \frac{\lfloor na_n \rfloor}{n}$ też jest zbieżny do g.

2. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

3. Ciąg $(a_n)_n$ jest ograniczony, a ciąg $(b_n)_n$ jest zbieżny do 0. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = 0$.

4. Oblicz granice ciągów:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n-2}{2n+8}$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(4n-3)^2}{3n^2+7n-6}$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 3^{n+1} - 2\cdot 2^{2n}}{5\cdot 3^n - 4^{n+2}}$,

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2^n-7\cdot 3^n}{3^n+2}$,

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 7^n + n^7 5^n}{n^7 7^n + n^5 5^n}$,

(f) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n}\right)$,

(g) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^2}$,

(h) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k}\binom{n+k}{n}$, $k \in \mathbb{N}$,

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!+(n-1)!}{(n+1)!-(n-1)!}$,

(j) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+\sqrt{n}} - \sqrt{n^2-\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

5. Ciąg $(a_n)_n$ jst zbieżny do g i $(n_k)_k$ jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Wykaż, że ciąg $(a_{n_k})_k$ jest zbieżny do g.

6. Wykaż, że ciągi są zbieżne i znajdź ich granice.

(a) $\sqrt[n]{2\cdot 3^n + 7\cdot 8^n}$,

(b) $\sqrt[n]{n+3^n}$,

(c) $\sqrt[n]{2n + \frac{(-1)^n}{n}}$,

(d) $\sqrt[n^2]{n}$,

(e) $\sqrt[n+2]{n-2}$, $n \geqslant 2$,

(f) $\sqrt[n^2]{5^n-4}$,

(g) $\sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n-1})$,

(h) $\frac{n}{n^2+1}\sin(n!)$.

7. Wykaż, że dla dostatecznie dużych n wyrazy ciągów $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są dodatnie:

$$a_n = 5^{n-1} - 7\cdot 2^{2n} - 100, \qquad b_n = n^5 8^n - n^8 5^n.$$

Oblicz granice $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ i $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n}$.

8. Oblicz granice:

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k}\right)$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \left(n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}\right)$.

9. Niech $a > 0$. Oblicz granice:
(a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^n$, (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n}$, (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$, (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$.

10. Załóżmy, że $a_n > 0$ i $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

11. Załóżmy, że $a_n \geqslant 0$ i $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

12. Niech $(F_n)_n$ to ciąg Fibonacciego. Oblicz granice

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{F_n}.$$

13. Dla $n \in \mathbb{N}$ liczby naturalne a_n i b_n spełniają równość

$$a_n + b_n\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^n.$$

Oblicz $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

14. Ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny do g. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = g.$$

15. Ciąg $(a_n)_n$ ma wyrazy dodatnie i jest zbieżny do g. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} = g.$$

Granica ciągu III (powtórzenie)

1. Udowodnij, że liczba rzeczywista a jest kresem górnym (dolnym) zbioru $A \subset \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy a jest ograniczeniem górnym(dolnym) zbioru A i istnieje ciąg $a_n \in A$ taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

2. Wyznacz kresy zbiorów

(a) $A = \{ab + bc + ca : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ i } a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$,

(b) $B = \left\{\min\left(x, \frac{1}{y}, y + \frac{1}{x}\right) : x, y > 0\right\}$,

(c) $C = \left\{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} : x, y > 0 \text{ i } x + y = 1\right\}$,

(d) $D = \left\{\frac{1-x}{1+x} + \frac{1-y}{1+y} + \frac{1-z}{1+z} : x, y, z > 0 \text{ i } x + y + z = 1\right\}$,

(e) $E = \left\{\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor : n \in \mathbb{N}\right\}$.

3. Wyznacz kresy zbioru wartości wyrażeń

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b},$$

gdzie a, b, c są długościami boków trójkąta.

4. Oblicz granice ciągów:

(a) $\dfrac{3n^4 - 10n^3 - 2n^2 + 7}{9n^4 - 5n^2 + 19n}$

(b) $\dfrac{n^3 - 8n^2 + 12n}{10n^3 + 2^n - 5}$

(c) $\dfrac{2\sqrt{n} - 3\sqrt[3]{n}}{3\sqrt{n} - 2\sqrt[3]{n}}$,

(d) $\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 4} - \sqrt[3]{n^3 + 1}$,

(e) $n^3\left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n^4 + 1}} - n\sqrt{2}\right)$,

(f) $\sqrt[n]{3^n + 6 \cdot 5^n + 8 \cdot 10^n}$,

(g) $\sqrt[n]{7^n - 3 \cdot 5^n - 12}$,

(h) $\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$,

(i) $\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$,

(j) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,

(k) $\dfrac{n!}{2^{n^2}}$,

(l) $\dbinom{2n}{n}^{-1}$,

(m) $\dfrac{2^n n!}{n^n}$.

5. Dany jest ciąg liczb dodatnich $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = g$. Wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$.

6. Korzystając z poprzedniego zadania, oblicz granice ciągów:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$, (b) $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$, (c) $\sqrt[n+2]{(n-3)^5 7^n - n^{10} 3^{n+1}}$,

7. Dana jest liczba naturalna k oraz ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, \ldots, k\}$. Niech

$$b_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n}, \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Załóżmy, że w ciągu (b_n) wystepuje nieskończenie wiele wyrazów całkowitych. Wykaż, że wszystkie wyrazy ciągu (b_n) sa całkowite.

Wskazówka: Skorzystaj z tw. o trzech ciągach.

Analiza - klasa 3a4 Zestaw 13. 23.3.2022

Granica ciągu IV

Tw. 1. Niech $(a_n)_n$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych, który jest
(i) niemalejący i ograniczony z góry
lub
(ii) nierosnący i ograniczony z dołu.
Wówczas ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

Lemat 1. Dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Lemat 2. (z pierwszej klasy) Jeśli $n \in \mathbb{N}$, to

$$2 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{oraz} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3\cdot\frac{n+1}{n+2} < 3.$$

Tw. 2. (Stała Eulera) Ciąg $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony z góry, więc zbieżny. Jego granicę, czyli liczbę

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

nazywamy *stałą Eulera.*

Tw. 3. $e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Lemat 3. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje liczba $\theta_n \in (0,1)$ taka, że $e = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{\theta_n}{nn!}$.

Tw. 4. Liczba e jest niewymierna.

---

1. Wykaż zbieżność ciągów

$$\text{(a) } a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}, \quad \text{(b) } b_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right), \quad \text{(c) } c_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

2. Niech $x_1 > 0$ i $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$. Wykaż, że ciąg $(x_n)_n$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

3. Dany jest ciąg $(a_n)_n$ taki, że $a_1 > 0$ i

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3 \ldots.$$

Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

4. Niech $a_1 > b_1 > 0$ i

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}, \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wykaż, że ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne i wyznacz ich granice.

5. Niech $a_1 > b_1 > 0$ i

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_nb_n}, \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wykaż, że ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne do tej samej granicy (zwanej *srednią arytmetyczno – geometryczną* liczb a_1, b_1).

6. Ciąg $(a_n)_n$ spełnia warunki $0 < a_n < 1$ i $a_n(1-a_{n+1}) > \frac{1}{4}$ dla $n \geqslant 1$. Wykaż, że ciąg ten jest zbieżny i znajdź jego granicę.

7. Niech $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ i $b_{n+2} = \sqrt{b_n} + \sqrt{b_{n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wykaż, że ciąg ten jest zbieżny i znajdź jego granicę.

8. Wykaż, że $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$

9. Oblicz granice

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, (b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$, (c) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, (d) $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e}-1)$.

10. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty}(2\sqrt[n]{a}-1)^n = a^2$ dla $a \geqslant 1$, oraz $\lim_{n\to\infty}\frac{(2\sqrt[n]{n}-1)^n}{n^2} = 1$.

11. Oblicz $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+1)!}$.

12. Niech $x_n > 0$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n} = 1$.
Wskazówka: $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

13. Niech $(\theta_n)_n$ to ciąg zdefiniowany w lemacie 3. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty}\theta_n = 1$.

14. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi en!)$.

15. Ciąg $(a_n)_n$ jest ograniczony z góry i $a_{n+1} - a_n > -\frac{1}{n^2}$ dla każdego n. Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

16. Niech $a_n = \frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}$. Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

Analiza - klasa 3a4 Zestaw 14. 20.4.2022

Granica ciągu V – granice niewłaściwe

Definicja. Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ jest *rozbieżny do* $+\infty$ *($-\infty$)* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{M>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n>N}\ \ a_n > M \quad (a_n < -M).$$

Piszemy wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ lub $a_n \to +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ lub $a_n \to -\infty$).

Definicja. Mówimy, że ciąg $(a_n)_n$ ma granicę, jeżeli jest on zbieżny (wtedy ma granicę skończoną) lub rozbieżny do $\pm\infty$ (wtedy ma granicę nieskończoną).

Stw. Załóżmy, że $a_n \to +\infty$. Wówczas

- jeśli ciąg $(b_n)_n$ jest ograniczony z dołu, to $a_n + b_n \to +\infty$;
- jeśli $b_n \to b \in \mathbb{R}$, to $a_n + b_n \to +\infty$;
- jeśli istnieje stała $c > 0$ taka, że $b_n > c$ dla prawie wszystkich n, to $a_n b_n \to +\infty$;
- jeśli $b_n \to b \in (0, +\infty)$, to $a_n b_n \to +\infty$;
- jeśli istnieje stała $c < 0$ taka, że $b_n < c$ dla prawie wszystkich n, to $a_n b_n \to -\infty$;
- jeśli $b_n \to b \in (-\infty, 0)$, to $a_n b_n \to -\infty$;
- jeśli $b_n \to +\infty$, to $a_n + b_n \to +\infty$, $a_n b_n \to +\infty$;

Stw. Jeśli $a_n \to 0$ i $a_n > 0$ dla prawie wszystkich n, to $\dfrac{1}{a_n} \to +\infty$.

Stw. Jeżeli $a_n \to +\infty$ i $b_n \geqslant a_n$ dla prawie wszystkich n, to $b_n \to +\infty$.

Wyrażenia nieoznaczone:

- $\infty - \infty$, np. $(n+1) - n$, $n^2 - n$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
- $0 \cdot \infty$, np. $\dfrac{1}{n} \cdot n$, $\dfrac{1}{2^n} \cdot n^4$, $\dfrac{1}{2^n} \cdot n!$,
- $\dfrac{0}{0}$, np. $\dfrac{(\frac{1}{2})^n}{(\frac{1}{3})^n}$, $\dfrac{\frac{1}{n}}{(\frac{1}{2})^n}$,
- $\dfrac{\infty}{\infty}$, np. $\dfrac{n}{n+1}$, $\dfrac{2^n}{n}$, $\dfrac{n}{2^n}$,
- 1^∞, np. $(\sqrt[n]{2})^n$, $(\sqrt[n]{2})^{n^2}$, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$,
- ∞^0, np. $n^{1/n}$, $(2^n)^{1/n}$.

1. Oblicz granice lub wykaż, że nie istnieją:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4 - 5n^3 + 17n^2 - 9n - 2}{12n^3 - 5n^2 + 10n - 7}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{2n} - 3^n}{3^n - 2^n}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n + n^3 - 5}{n^4 + 2^n \cdot n}$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$,

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$,

2. **Suma nieskończonego ciągu geometrycznego.** W zależności od $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wyznacz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$.

3. Niech $a_n \to +\infty$, $b_n = \dfrac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)$, $c_n = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$ (gdy $a_k > 0$). Udowodnij, że $b_n \to +\infty$ i $c_n \to +\infty$.

4. Dany jest ciąg $(a_n)_n$ taki, że $a_n > 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$. Udowodnij, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = +\infty$.

5. Znajdź granice

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(2n)! - 2n!}$,

6. Zbadaj zbieżność ciągów $\sqrt[n!]{n}$, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$, $\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)^n$, $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2^n}$.

7. Wykaż, że poniższe granice istnieją i zbadaj, czy są one równe 0 lub $+\infty$.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{2^k}\right)$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)$,

8. Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1} = +\infty.$$

Analiza - klasa 3a4 Zestaw 16. 11.05.2022

Granica ciągu VI

Twierdzenie Bolzano - Weierstrassa. Z każdego ciągu ograniczonego liczb rzeczywistych można wybrać podciąg zbieżny.

Tw. (Warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu) Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{m,n>N} \; |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

---

1. Korzystając z warunku Cauchy'ego, zbadaj zbieżność ciągów:

(a) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$,

(b) $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$,

(c) $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{\lfloor k/2 \rfloor}}{k}$,

2. Dany jest nierosnący ciąg liczb dodatnich $(a_n)_n$ taki, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Wykaż, że ciąg

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$$

jest zbieżny.

3. Niech $(a_n)_n$ to ciąg liczb rzeczywistych. Załóżmy, że istnieje stała $\lambda \in (0,1)$ taka, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqslant \lambda |a_{n+1} - a_n|.$$

Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

4. Niech $k \in \mathbb{N}$ i $k > 1$. Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ spełnia warunki

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0,$$

oraz

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n,m>N} \; |a_{kn} - a_{km}| < \varepsilon.$$

Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

Podaj przykłady, że z żadnego z tych warunków osobno nie wynika zbieżność ciągu.

5. **Granica górna i dolna ciągu.** Dla danego ciągu liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ niech $G \subset \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ oznacza zbiór granic wszystkich podciągów ciągu $(a_n)_n$. Wówczas

- $\sup G$ nazywamy *granicą górną* ciągu $(a_n)_n$ i oznaczamy $\limsup_{n\to\infty} a_n$,
- $\inf G$ nazywamy *granicą dolną* ciągu $(a_n)_n$ i oznaczamy $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Udowodnij, że każdy ciąg $(a_n)_n$ zawiera podciągi zbieżne do swej granicy górnej i dolnej.

6. Udowodnij, że ciąg ograniczony $(a_n)_n$ jest rozbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera podciągi zbieżne do różnych granic.

7. Ciąg liczb dodatnich $(a_n)_n$ spełnia dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$ warunek

$$a_{m+n} \leqslant a_m + a_n.$$

Wykaż, że ciąg $\left(\frac{a_n}{n}\right)_n$ jest zbieżny.

8. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ taki, że ciąg $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ jest zbieżny. Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie bijekcją taką, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $|f(k) - k| \leqslant 2019$. Wykaż, że ciąg

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_{f(k)}$$

jest zbieżny.

9. Wykaż, że każdy ciąg zbieżny zawiera wyraz najmniejszy lub największy.

10. Wykaż, że z każdego ograniczonego ciągu liczb zespolonych można wybrać podciąg zbieżny.

11. Udowodnij **Lemat Sierpińskiego:** Z każdego ciągu ograniczonego liczb rzeczywistych można wybrać podciąg monotoniczny.

Uwaga: Lemat Sierpińskiego można udowodnić, korzystając z tw. Bolzano – Weierstrassa. Ale można również najpierw udowodnić Lemat Sierpińskiego i za jego pomocą udowodnić tw. Bolzano – Weierstrassa.

Analiza - klasa 3a4 Zestaw 16. 20.5.2022

Granica ciągu – zadania powtórzeniowe

1. Zbadaj zbieżność ciągu określonego w następujący sposób:

$$x_0 > 1 \quad \text{oraz} \quad x_{n+1} = \frac{2x_n}{1+x_n}.$$

2. Niech $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{2a_n+1}{a_n+1}$, $b_1 = 2$, $b_{n+1} = \dfrac{2b_n+1}{b_n+1}$. Udowodnij, że

$$\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

3. Dany jest ciąg $(a_n)_n$ taki, że $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = a$. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = a.$$

4. Niech $x \in \mathbb{R}$. Wyznacz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \ldots + \lfloor nx\rfloor}{n^2}.$$

5. Udowodnij, że ciąg $(\sin n)_{n=1}^{\infty}$ nie ma granicy.

6. Oblicz granice ciągów

(a) $\left(\dfrac{3n-1}{3n+1}\right)^{n+4}$, (b) $\left(\dfrac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{2n^2+5}$, (c) $\left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)^{\binom{n}{2}}$.

7. Niech $k \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n = e^k$ i $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{k}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e^k}$.

8. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \ldots + \sqrt[n]{e^n}}{n}$.

9. Ciąg $(a_n)_n$ jest zadany rekurencyjnie: $a_1 = 1$, $a_n = n(a_{n-1}+1)$. Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \prod \dfrac{a_k+1}{a_k}$.

10. Ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zdefiniowany następująco $x_0 = 5$, $x_1 = 0$, $x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1}+x_n}{6}$.

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

11. Dany jest ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb dodatnich taki, że $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = +\infty$. Udowodnij, że

$\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k) = +\infty$.

12. Zbadaj zbieżność ciągów

(a) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{\sqrt{k+1}}$, (c) $c_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{3^k}\right)$,

(b) $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$ (d) $d_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{(-1)^k}{2^k}\right)$.

Wskazówki: (c): $\frac{k}{3^k} < \frac{1}{2^k}$ dla dostatecznie dużych k, (d): zbadaj ciągi $(d_{2n})_n$, $(d_{2n-1})_n$ i $(\frac{d_n}{d_{n+1}})_n$.

---

13. Oblicz granice

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n(n+1)}{(n+2)^2}\right)^{3n-2}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2}{3n^2-1}\right)^{n^2}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2}{3n^2-1}\right)^{n}$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2}{3n^2-1}\right)^{n^3}$

14. Zbadaj zbieżność ciągów zadanych przez warunki

(a) $a_0 = 3$, $a_{n+1} = \sqrt{3a_n+4}$,

(b) $b_0 = 2$, $b_{n+1} = \dfrac{2b_n}{1+b_n}$,

(c) $c_0 = 5$, $c_{n+1} = \dfrac{(c_n-2)^2}{5}$.

15. Zbadaj zbieżność ciągów

(a) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}}$,

(b) $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{2k+1} - \sqrt[3]{2k}\right)$

(c) $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\sqrt[3]{2k+1} - \sqrt[3]{2k}\right)$

(d) $b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt[3]{2k+1} - \sqrt[3]{2k} \right)^3$

16. Znajdź granice

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!}\binom{2n}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right)^n}{n!}.$$

17. Niech $a \in (0,2)$. Ciąg $(x_n)_n$ spełnia zależność rekurencyjną

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + (1-a)x_n.$$

Wyznacz granicę ciągu $(x_n)_n$ w zależności od x_0, x_1, a.

18. Wyznacz wszystkie liczby $a \geqslant 0$ takie, że ciąg

$$x_0 = 0, \qquad x_{n+1} = a + x_n^2$$

jest zbieżny.

19. Niech a, b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi,

$$a_1 = a, \quad a_2 = b, \qquad a_{n+1} = \frac{n-1}{n}a_n + \frac{1}{n}a_{n-1} \text{ dla } n \geqslant 2.$$

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

20. Ciąg $(a_n)_n$ jest określony w następujący sposób:

$$0 < a_1 < 1, \qquad a_{n+1} = a_n(1-a_n).$$

Udowodnij, że $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 1$.

Analiza - klasa 3a4 Zestaw 16. 20.5.2022

Granica ciągu – zadania dodatkowe

1. Oblicz granice

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{(n+2)^2}\right)^{3n-2}$,

(b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2}{3n^2-1}\right)^{n^2}$,

(c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2}{3n^2-1}\right)^{n}$,

(d) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2}{3n^2-1}\right)^{n^3}$

(e) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^{2n^2+5}$

2. Zbadaj zbieżność ciągów zadanych przez warunki

(a) $a_0=3$, $a_{n+1}=\sqrt{3a_n+4}$,

(b) $b_0=2$, $b_{n+1}=\frac{2b_n}{1+b_n}$,

(c) $c_0=5$, $c_{n+1}=\frac{(c_n-2)^2}{5}$.

3. Zbadaj zbieżność ciągów

(a) $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}}$,

(b) $b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{2k+1}-\sqrt[3]{2k}\right)$

(c) $b_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\sqrt[3]{2k+1}-\sqrt[3]{2k}\right)$

(d) $b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{2k+1}-\sqrt[3]{2k}\right)^3$

4. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\binom{2n}{n}.$$

5. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10\cdot 11\cdot\ldots\cdot(n+9)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}.$$

6. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right)^n}{n!}.$$

7. Niech $a\in(0,2)$. Ciąg $(x_n)_n$ spełnia zależność rekurencyjną

$$x_{n+2}=ax_{n+1}+(1-a)x_n.$$

Wyznacz granicę ciągu $(x_n)_n$ w zależności od x_0,x_1,a.

8. Wyznacz wszystkie liczby $a\geqslant 0$ takie, że ciąg

$$x_0=0,\qquad x_{n+1}=a+x_n^2$$

jest zbieżny.

9. Ciąg $(a_n)_n$ jest określony w następujący sposób:

$$0<a_1<1,\qquad a_{n+1}=a_n(1-a_n).$$

Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} na_n=1$.

Analiza - klasa 3a4 Zestaw 18. 15.6.2022

Twierdzenie Stolza

Poniższe twierdzenie bywa przydatne do wyznaczania granic typu $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$.

Twierdzenie Stolza. Ciągi liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ spełniają warunki

(i) ciąg $(b_n)_n$ jest ściśle monotoniczny i $b_n \neq 0$ dla każdego n,

(ii) istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = g$,

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ lub $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g$.

---

1. Oblicz granice

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$,

2. Niech $p \in \mathbb{N}$. Oblicz granice

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1}\right)$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(p+k)!}{k!}$.

3. Dane są ciągi zbieżne $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$:

$$a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right), \qquad b_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2^k}\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

oraz $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Wykaż, że istnieje skończona granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a-a_n}{b_n-b}.$$

4. Wykaż, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, $b_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, oraz

$$\lim_{n\to\infty} (b_1+b_2+\ldots+b_n) = +\infty,$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} = g.$$

5. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $(x_n)_n$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} (x_{2n}+x_{2n+1}) = 2022, \qquad \lim_{n\to\infty} (x_{2n-1}+x_{2n}) = 117.$$

Wykaż, że ciąg $\left(\frac{x_{2n}}{x_{2n+1}}\right)_n$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

6. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1.$$

Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n \sqrt[3]{3n} = 1.$$