Analiza - klasa 2a4 Zestaw 1. 08.09.2020

Algebra liniowa I

Układ m równań liniowych o n niewiadomych $x_1, x_2, \dots, x_n$ jest to układ równań postaci

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

gdzie $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{R}$.

Jeżeli układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie, to mówimy, że jest *oznaczony*.

Układy dwóch równań liniowych

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \tag{1}$$

Tw. 1 Układ równań (1) ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $ad - bc \neq 0$.

Definicja. Liczbę $ad - bc$ nazywamy *wyznacznikiem* macierzy kwadrtowej $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ i zapisujemy $\det A$.

Tw. 2 (Wzory Cramera) Jeżeli $ad - bc \neq 0$, to jedynym rozwiązaniem układu (1) są liczby

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} e & b \\ f & d \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \qquad y = \frac{\det \begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

Pierwsza interpretacja geometryczna: Każde z dwóch równań interpetujemy jako prostą na płaszczyźnie. Układ ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy te proste nie są równoległe i wówczas współrzędne ich punktu przeciącia są tym rozwiązaniem. Jeżeli proste się pokrywają, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, a jeśli są równoległe, to jest sprzeczny.

Druga interpretacja geometryczna: Układ (1) zapisujemy w tzw. postaci wektorowej:

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

Jeżeli para (x, y) jest rozwiązaniem, to wektor $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ przeskalowany o x dodany do wektora $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ przeskalowanego o y daje wektor $\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$.

Układ ma jednoznacznie rozwiązanie, jeżeli wektory $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ są oba niezerowe i nie są równoległe. W przeciwnym wypadku układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeżeli wektor $\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ ma ten sam kierunek, co każdy z wektorów $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$.

---

1. Rozwiąż układy równań:

(a) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{y} = 1 \\[2ex] \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{y} = \dfrac{9}{2} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dfrac{6}{x+y} + \dfrac{5}{x-y} = 7 \\[2ex] \dfrac{3}{x+y} - \dfrac{2}{x-y} = -1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2x} + \dfrac{y+1}{3y} = \dfrac{1}{4} \\[2ex] \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} = \dfrac{7}{2} \end{cases}$

(d) $\begin{cases} |x-2| + |y-5| = 1 \\ y - |x-2| = 5 \end{cases}$

2. Zbadaj, dla jakich wartości parametru m układ równań ma rozwiązanie i kiedy jest ono jedyne.

(a) $\begin{cases} x + my = m - 1 \\ mx + y = m + 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x + my = 3 \\ mx + 3y = 3 \end{cases}$

3. Wyznacz liczbę rozwiązań układu równań w zależności od wartości parametru a:

(a) $\begin{cases} |x + y| = 1 \\ |x| + |y| = a \end{cases}$

(b) $\begin{cases} |2x - y| = 1 \\ |x| + |y| = a \end{cases}$

4. Dla jakich wartości parametru k rozwiązanie układu

$$\begin{cases} x - y = k - 1 \\ 2x - y = 3 - k \end{cases}$$

jest (a) parą liczb ujemnych, (b) parą liczb dodatnich, (c) parą liczb o przeciwnych znakach?

5. Udowodnij, że układ dwóch równań z trzema niewiadomymi

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = d \end{cases}$$

albo jest sprzeczny, albo ma nieskończenie wiele rozwiązań.

6. Dwie fabryki powinny według planu wykonać łącznie 550 smartfonów. Pierwsza fabryka przekroczyła plan o 10%, a druga o 8% i wówczas obie fabryki razem wykonały ponad plan 50 smartfonów. Ile smartfonów wykonała każda z fabryk?

7. Obwód prostokąta wynosi 54 cm. Jeżeli dłuższy bok powiększymy o 1 cm, a krótszy zmniejszymy o 1 cm, to pole zmniejszy się o 4 cm^2. Oblicz długości boków prostokąta.

8. 44 tony towaru przewieziono 9 samochodami o ładowności 4 tony i 6 ton. Ile było samochodów mniejszych, a ile większych, jeśli każdy został wykorzystany maksymalnie.

9. W ciągu 20 dni cena spółki wzrosła z 5 zł do 15 zł. Każdego dnia cena rosła 1,20 zł lub malało 0,80 zł. Przez ile dni cena rosła, a przez ile malała?

10. Dwie drukarki 3D mają wykonać partię jednakowych elementów. Gdy pierwsza pracowała przez 7 godziny a druga przez 4, wykonały w sumie 5/9 zamówienia. Po kolejnych 4 godzinach pracy każdej drukarki zostało do wykonania 1/8 zamówienia. Ile czasu potrzebowałaby każda drukarka na wykonanie całego zamówienia?

11. Anatol pływa w środku kwadratowego basenu, Bogdan stoi w jednym z wierzchołków. Bogdan nie umie pływać, ale biega 4 razy szybciej niż Anatol pływa. Anatol biega szybciej niż Bogdan. Czy Anatol może uciec Bogdanowi?

12. Samochody A i B jadą po okrężnej trasie, której 1/4 długości przebiega w mieście. Szybkość A w mieście wynosi $2v$, a poza miastem $9v/4$. Szybkość B w mieście wynosi v a poza miastem $3v$. Samochody razem wjeżdżają do miasta. Który z nich i po jakim czasie dogoni drugiego, jeżeli długość miejskiej drogi wynosi s?

13. Dwa boki równoległoboku zawierają się w prostych $3x+5y-19=0$ i $3x-9y+51=0$, a jedna z przekątnych równoległoboku zawiera się w prostej $3x-2y-5=0$. Oblicz współrzędne wierzchołków równoległoboku.

14. Boki trójkąta zawierają się w prostych $4x+3y-21=0$, $x+2y-4=0$, $3x+y-7=0$.
(a) Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta.
(b) Napisz równania prostych zawierających środkowe trójkąta.
(c) Napisz równania prostych symetralnych boków trójkąta.

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 2. 15.09.2020

Algebra liniowa II

Układy 3 równań z 3 niewiadomymi

Definicja. Wyznacznikiem macierzy 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

nazywamy liczbę

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Taki wyznacznik najłatwiej obliczyć stosując tzw. schemat Sarrusa:

$$\begin{array}{c} + \\ + \\ + \\ \\ \\ \end{array}\begin{matrix} \left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right] \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \end{matrix}\begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ \\ \\ \end{array}$$

Uwaga. Wyznacznik można również zdefiniować dla macierzy kwadratowej większego rozmiaru, ale wówczas powyższy schemat nie ma już zastosowania.

Tw. (Wzory Cramera). Układ 3 równań z 3 niewiadomymi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$ i wówczas

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}}{\det A}, \quad y = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}}{\det A}, \quad z = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}}{\det A}$$

---

1. Wykaż, że układ równań ma jednoznaczne rozwiązanie i znajdź y:

(a) $\begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + 4y + z = 1 \\ 5x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases}$

2. Wyznacz w zależności od $a \in \mathbb{R}$ rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

3. Znajdź współrzędne środka sfery opisanej na czworościanie o wierzchołkach $(-1,-1,-1), (1,0,0), (0,2,0), (0,0,3)$.

Macierze dowolonego rozmiaru

Macierzą (o elementach z $\mathbb{R}$) wymiaru $m \times n$ nazywamy tablicę prostokątną

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

gdzie $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ nazywamy elementami macierzy. Można również stosować bardziej zwarty zapis: $A = [a_{i,j}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$. Jeżeli wymiar macierzy jest znany, to możemy również użyć zapisu $A = [a_{i,j}]_{i,j}$. Przyjmiemy, że pierwszy dolny indeks za nawiasem kwadratowym oznacza numer wiersza, a drugi – kolumny.

Zbiór wszystkich macierzy wymiaru $m \times n$ o elementach z $\mathbb{R}$ będziemy oznaczać symbolem $\mathbb{R}^{m,n}$. Stosuje się także inne oznaczenia, np. $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Macierz wymiaru $n \times 1$ nazywamy *wektorem (n wymiarowym / długości n)*. Zbiór wszystkich takich macierzy oznaczamy $\mathbb{R}^n$. Wektory zapisujemy jako $\vec{a}$.

Macierz zerowa (wymiaru $m \times n$) jest to macierz, której wszystkie elementy są zerami: $0 = [0]_{i,j} \in \mathbb{R}^{m,n}$.

Ciąg pozycji o indeksach (i,i), $i = 1, \dots, \min(m,n)$ w macierzy $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ nazywamy *przekątną* lub *diagonalą* macierzy A.

Mnożenie macierzy przez liczbę. Jeżeli $b \in \mathbb{R}$ oraz $A = [a_{i,j}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{m,n}$, to możemy określić iloczyn macierzy A przez skalar b: $A \cdot b = b \cdot A = [ba_{i,j}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{m,n}$.

Dodawanie macierzy. Dla macierzy $A = [a_{i,j}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B = [b_{i,j}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{m,n}$, możemy określić ich *sumę* $A + B = [a_{i,j} + b_{i,i}]_{i,j}$.

Iloczyn macierzy. Jeżeli $A = [a_{i,j}]_{ij} \in \mathbb{R}^{m,r}$, $B = [b_{i,j}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{r,n}$, to iloczyn macierzy A i B definiujemy jako macierz $C = A \cdot B = [c_{i,j}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{m,n}$, gdzie $c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \ldots + a_{i,r}b_{r,j}$.

Macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ nazywamy macierzą *kwadratową*. Macierz $I_n = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n,n}$, w której $a_{i,i} = 1$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ i $a_{i,j} = 0$ dla $i \neq j$ nazywamy macierzą *jednostkową* (*identycznościową*). Dla dowolnych macierzy $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ i $B \in \mathbb{R}^{n,m}$ zachodzi $A \cdot I_n = A$ i $I_n \cdot B = B$.

Macierz odwracalna. Mówimy, że macierz kwadratowa $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest *odwracalna*, (*nieosobliwa*), jeżeli istnieje macierz $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ taka, że $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Macierz

B zapisujemy jako A^{-1} i nazywamy macierzą *odwrotną* do macierzy A. Jeżeli macierz A jest odwracalna, to macierz A^{-1} też jest odwracalna. Można udowodnić, że jeżeli istnieje macierz $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ taka, że $A \cdot B = I_n$, to także $B \cdot A = I_n$ (i na odwrót).

Potęgowanie macierzy. Jeżeli $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ i $k \in \mathbb{N}$, to A^k oznacza macierz otrzymaną poprzez pomnożenie macierzy A przez siebie k razy. Dodatkowo $A^0 = I_n$, a jeśli macierz A jest odwracalna, to $A^{-k} = (A^{-1})^k$.

Operacje elementarne na wierszach. Niech $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Każde z poniższych przekształceń macierzy A:
(i) pomnożenie pewnego wiersza przez skalar $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
(ii) dodanie do pewnego wiersza innego pomnożonego przez skalar $c \in \mathbb{R}$,
(iii) zamiana dwóch wierszy miejscami,
nazywamy *operacją elementarną* na wierszach macierzy A.

Tw. Każdą operację elementarną na wierszach można zrealizować jako iloczyn $E \cdot A$, gdzie $E \in \mathbb{R}^{m,m}$ jest pewną macierzą nieosobliwą.

---

4. Oblicz

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

5. Niech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}$. Wyznacz macierze

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}^k \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 0 & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & 0 \end{bmatrix}^k$$

6. Niech F_n dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ oznacza n-ty wyraz ciągu Fibonacciego ($F_1 = F_2 = 1$). Znajdź macierz $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ taką, że dla $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}.$$

7. Udowodnij, że mnożenie macierzy jest łączne i rozdzielne względem dodawania, ale nie jest przemienne (także gdy oba czynniki są macierzami kwadratowymi).

8. Podaj przykład niezerowej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, gdzie $n \geqslant 2$, takiej, że $A^2 = 0$.

9. Wyznacz macierze operacji elementarnych na wierszach i uzasadnij, że są one nieosobliwe.

10. Dane są dwie macierze $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ takie, że $AB = BA$. Pokaż, że

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Czy powyższy wzór jest prawdziwy bez założenia $AB = BA$?

11. Niech $\lambda \in \mathbb{K}$, $k = 1, 2, \ldots$. Oblicz A^k dla

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n,n}.$$

12. Niech $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ i załóżmy, że $\det A \neq 0$. Wykaż, że macierz A jest nieosobliwa.

13. Odwróć macierze:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

14. Dana jest macierz $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ taka, że $A^k = 0$ dla pewnej liczby naturalnej k. Udowodnij, że macierz $I - A$ jest nieosobliwa.

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 3. 22.09.2020

Algebra liniowa III

Układ m równań liniowych o n niewiadomych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest to układ równań postaci

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

gdzie $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{R}$. Przyjmując $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\vec{b} = [b_i] \in \mathbb{R}^m$, $\vec{x} = [x_i] \in \mathbb{R}^n$, powyższy układ równań można zapisać w postaci macierzowej $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$. Macierz $[A \mid \vec{b}] \in \mathbb{R}^{m,n+1}$ nazywamy macierzą rozszerzoną powyższego układu równań.

Dwa układy równań są *równoważne*, jeżeli mają te same zbiory rozwiązań.

Układ równań liniowych, który ma dokładnie jedno rozwiązanie nazywamy *oznaczonym*.

Tw. Jeżeli macierz $C \in \mathbb{R}^{m,m}$ jest nieosobliwa, to układy równań o macierzach rozszerzonych $[A \mid \vec{b}]$ i $C \cdot [A \mid \vec{b}] = [C \cdot A \mid C \cdot \vec{b}]$ (czyli układy $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ i $C \cdot A \cdot \vec{x} = C \cdot \vec{b}$) są równoważne.

Eliminacja Gaussa. W celu wyznaczenia wszystkich rozwiązań układu równań $A\vec{x} = \vec{b}$ przekształcamy jego macierz rozszerzoną $[A \mid \vec{b}]$, stosując operacje elementarne na wierszach i / lub przestawienia jej pierwszych n kolumn, do postaci:

$$\left[\begin{array}{cc|c} I_k & C & \vec{d} \\ 0 & 0 & \vec{e} \end{array}\right], \tag{1}$$

gdzie $0 \leqslant k \leqslant \min(m,n)$, $C \in \mathbb{R}^{k,n-k}$, $\vec{d} \in \mathbb{R}^k$, $\vec{e} \in \mathbb{R}^{m-k}$. Przestawienia kolumn odpowiadają zmianie kolejności niewiadomych w równaniach, natomiast operacje elementarne na wierszach nie zmieniają zbioru rozwiązań układu.

Mając układ w postaci (1) rozwiązanie wyznaczamy następująco: jeżeli $\vec{e} \neq 0$, to układ jest sprzeczny, a w innym przypadku możemy wartości niewiadomych odpowiadających pierwszych k kolumnom w prosty sposób uzależnić od wartości niewiadomych odpowiadających pozostałym $n-k$ kolumnom. Dowolne rozwiązanie układu otrzymujemy biorąc dowolne wartości tych $n-k$ niewiadomych i wyznaczając wartości pierwszych k niewiadomych za pomocą otrzymanych wcześniej wzorów.

---

1. Rozwiąż układy równań

(a) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 - 6x_3 = 3 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

(e) $$\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \end{cases}$$

2. Dla jakich wartości a, b układ równań jest (i) sprzeczny, (ii) oznaczony ?

(a) $$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 4y = 1 \\ x + 2y = a \\ 4x + 5y = b \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} -x + y + bz = 2 \\ x + ay + 2z = 3 \\ x - y + az = 1 \\ -x + y + az = -1. \end{cases}$$

3. Wyznacz macierz odwrotną do macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Rozwiąż układy n równań

(a) $$\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-2} + x_n = 1 \\ x_{n-1} = 1 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}$$

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 4. 29.09.2020

Trójmian kwadratowy I

Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$ nazywamy trójmianem kwadratowym, funkcją kwadratową, lub wielomianem stopnia 2 (zmiennej x).

Postać kanoniczna i wyróżnik funkcji kwadratowej. Każdą funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c$ można zapisać w postaci

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \qquad \text{gdzie } \Delta = b^2 - 4ac,$$

zwaną *postacią kanoniczną*. We wzorze powyżej liczba Δ jest nazywana *wyróżnikiem* funkcji kwadratowej f.

Tw. 1. (pierwiastki funkcji kwadratowej). Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ z wyróżnikiem $\Delta = b^2 - 4ac$

(i) ma dwa rózne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, jeżeli $\Delta > 0$, i wówczas

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(ii) ma jeden pierwiastek rzeczywisty x_1, jeżeli $\Delta = 0$, i wówczas $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$.

(iii) nie ma pierwiastków rzeczywistych, jeżeli $\Delta < 0$.

Tw. 2. (przebieg zmienności funkcji kwadratowej). Funkcja $f(x) = ax^2+bx+c$, gdzie $a > 0$, jest malejąca na przedziale $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ i rosnąca na przedziale $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$. W pukcie $x = \frac{-b}{2a}$ funkcja f przyjmuje minimum lokalne.

Jeżeli $a < 0$, to funkcja f jest rosnąca na przedziale $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ i malejąca na przedziale $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$. W pukcie $x = \frac{-b}{2a}$ funkcja f przyjmuje maksimum lokalne.

Tw. 3. (Wzory Viete'a). Rozważamy funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c$. Niech $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne:

(i) Liczby x_1 i x_2 są (wszystkimi) pierwiastkami funkcji f.

(ii) $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$ (*Wzory Viete'a*).

(iii) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (*postać iloczynowa* funkcji kwadratowej).

1. Sprowadź trójmiany kwadratowe do postaci kanonicznej, znajdź ich pierwiastki, wyznacz ich przedziały monotoniczności i określ ich wartość najmniejszą lub największą:

(a) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{6}$,

(b) $-\sqrt{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{6}$,

(c) $x^2 + x - 8$,

(d) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{8}x + 2$.

2. Wyznacz najmniejszą i największą wartość trójmianu kwadratowego na podanych przedziałach:

(a) $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$, na $[-4, 4]$ i $[1, 5]$.

(b) $g(x) = -2x^2 + 11x - 5$, na $[0, 5]$ i $[-1, 1]$.

3. Korzystając ze wzorów Viete'a, wyznacz (w pamięci) pierwiastki trójmianów

$$x^2 - 5x - 6, \quad x^2 - 6x + 8, \quad x^2 + 2x - 3, \quad 2x^2 + x - 1,$$
$$x^2 + 10x + 21, \quad 6x^2 - 5x - 1, \quad x^2 + x - 56, \quad 8x^2 + 2x - 3.$$

4. Rozwiąż równania

(a) $(3x - 2)^2 = 7(2 - 3x)$,

(b) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$,

(c) $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$,

(d) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$,

(e) $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 9$,

(f) $x^2 - 4x + |x - 3| + 3 = 0$.

5. Dla danych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ rozwiąż równanie

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x + a + b}.$$

6. Wyznacz rozwiązania równania $2m(1 + x^2) - (1 + m^2)(x + m) = 0$ w zależności od wartości parametru m.

7. Dla jakich wartości parametru k równanie

$$\frac{x^2 + x + 2}{3x + 1} = k$$

ma rozwiązanie?

8. Niech $a, b, c > 0$. Czy jest możliwe, że każdy z trójmianów

$$ax^2 + bx + c, \quad cx^2 + ax + b, \quad bx^2 + cx + a$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste?

9. Czy istnieje trójmian kwadratowy o współczynnikach wymiernych, którego pierwiastkami są liczby $\sqrt{2}$ i $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$?

10. Dla jakich wartości parametru q jeden pierwiastek trójmianu $x^2 - 6x + q$ jest kwadratem drugiego?

11. Dla jakiej wartości parametru a suma kwadratów pierwiastków trójmianu

$$x^2 - (a-2)x - a - 1$$

jest najmniejsza?

12. Niech $f(x) = x^2 + 12x + 30$ i $n \in \mathbb{N}$. Rozwiąż równanie $f^n(x) = 0$.

13. Dany jest trójmian kwadratowy $f(x) = ax^2 + bx + c$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

(i) $\forall_{n \in \mathbb{Z}}\, f(n) \in \mathbb{Z}$,

(ii) liczby $f(-1)$, $f(0)$ i $f(1)$ są całkowite,

(iii) liczby $2a$, $a+b$ i c są całkowite.

14. Pierwiastki trójmianu $x^2 + ax + b + 1$ są liczbami naturalnymi. Udowodnij, że liczba $a^2 + b^2$ nie jest pierwsza.

15. Dla jakich całkowitych wartości parametru k pierwiastki trójmianu

$$kx^2 - (1-2k)x + k - 2$$

są liczbam wymiernymi.

16. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (a, b) takie, że liczba $a+b$ jest pierwiastkiem trójmianu $x^2 + ax + b$.

17. Rozwiąż równanie $x^2 + x = 1111111122222222$.

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 5. 06.10.2020

Trójmian kwadratowy II

1. Niech $f(x) = ax^2+bx+c$. Sformułuj warunki na współczynniki a, b, c równoważne z poniższymi stwierdzeniami:
(i) Funkcja f przyjmuje tylko wartości dodatnie.
(ii) Funkcja f przyjmuje tylko wartości ujemne.
(iii) Funkcja f przyjmuje tylko wartości większe od -1.

2. Rozwiąż nierówności

(a) $-x^2 + 3x - 2 < 0$,

(b) $\sqrt{3}x^2 - 4x + \sqrt{3} \geqslant 0$,

(c) $(x+4)^2 \leqslant x^2 - 16$,

(d) $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} \geqslant 0$,

(e) $|x^3 - 1| > x^2 + x + 1$,

(f) $|x^2 - 11| < 3x + 7$.

3. Dla jakich wartości parametru a nierówność

$$(a^2 - 1)x^2 + 2(a-1)x + 2 > 0$$

jest spełniona dla każdego x?

4. Dla jakich wartości parametru k funkcja

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2k}{x^2 + x + 2 - k^2}$$

przyjmuje tylko wartości dodatnie?

5. Dla jakich wartości parametru a wszystkie wartości funkcji

$$f(x) = \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1}$$

należą do przedziału $(-3, 2)$?

6. Wyznacz liczbę pierwiatków trójmianu $m^2x^2 + 2(m+1)x + 4$ w zależności od wartości parametru m.

7. Wykaż, że funkcja

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 3x + 2}$$

przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste.

8. Wykaż, że zbiór wartości funkcji

$$f(x) = \frac{x^2 + px + q}{x^2 + rx + s},$$

gdzie $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ i $r^2 < 4s$, nie jest całym zbiorem liczb rzeczywistych.

9. Wyprowadź wzór na odległość punktu na płaszczyźnie o współrzędnych (p, q) od prostej o równaniu $y = ax + b$.

10. (**Własność Darboux funkcji kwadratowej**) Niech $f(x)$ będzie trójmianem kwadratowym, $u, v \in \mathbb{R}$, $u < v$ i załóżmy, że y leży pomiędzy $f(u)$ i $f(v)$. Udowodnij (nie odwołując się do pojęcia ciągłości funkcji), że istnieje $x \in [u, v]$ takie, że $f(x) = y$.

11. Załóżmy, że każdy z trójmianów $x^2 + 2ax + b^2$ i $x^2 + 2bx + c^2$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste. Udowodnij, że trójmian $x^2 + 2cx + a^2$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

12. Wykaż, że dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ funkcja
(a) $f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$,
(b) $g(x) = a(x-b)(x-c) + b(x-c)(x-a) + c(x-a)(x-b)$
ma co najmniej jedno miejsce zerowe.

13. Wykaż, że jeśli współczynniki a, b, c trójmianu kwadratowego ax^2+bx+c są liczbami całkowitymi nieparzystymi, to trójmian ten nie ma pierwiastków wymiernych.

14. Niech $f(x) = ax^2 + bx + c$ i załóżmy, że równanie $f(x) = x$ nie ma rozwiazań rzeczywistych. Pokaż, że równanie $f(f(x)) = x$ też nie ma rozwiązań rzeczywistych.

15. Niech $f(x) = ax^2$. Udowodnij, że na płaszczyźnie istnieje punkt P i prosta k takie, że każdy punkt wykresu funkcji f jest równoodległy od punktu P i prostej k.

Punkt P nazywamy *ogniskiem* paraboli o równaniu $y = ax^2$, prostą k nazywamy *kierownicą* tej paraboli

16. Wyznacz równanie paraboli postaci $F(x, y) = 0$, której ogniskiem jest punkt $P = (1, 1)$, a kierownica k ma równanie $x + y + 1 = 0$.

17. Dane są dwie parabole o równaniach

$$y = a(x-b)^2 \qquad \text{oraz} \qquad y = c(x-d)^2.$$

Wykaż, że jeżeli ognisko pierwszej paraboli leży na drugiej paraboli, to ognisko drugiej paraboli leży na pierwszej paraboli.

18. Drut o długości 8 metrów należy podzielić na dwie cześci i z jednej zrobić kwadrat, a z drugiej trójkąt równoboczny. Jak to zrobić, aby suma pól tych figur była najmniejsza?

19. Znajdź pole i długości boków największego prostokąta zawartego w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a, b, którego boki są równoległe do tych przyprostokątnych.

20. Pierwszy uczeń rozwiązał 60 równań kwadratowych w czasie o 3 godziny krótszym niż drugi. Ile czasu potrzebuje drugi na rozwiązanie 90 równań, jeżeli razem rozwiązują w ciągu godziny 30 równań. (Zakładamy, że uczeń potrzebuje tyle samo czasu na rozwiązanie każdego równania.)

21. Z dwóch miejscowości A i B wyruszyło jednocześnie dwóch turystów idących ze stałymi prędkościami. Pierwszy przeszedł drogę z A do B i wrócił zaraz do A. Drugi poszedł z B do A i wrócił zaraz do B. Turyści minęli się pierwszy raz w odległości a km od A, drugi raz w odległości b kilometrów od B. Jaka jest odległość od A do B?

22. Dwie rury otwarte jednocześnie napełniają w ciągu godziny $3/4$ basenu. Napełnienie basenu do $1/4$ objętości tylko przy pomocy pierwszej rury, a następnie dopełnienie tylko przy pomocy drugiej rury do objętości $3/4$ basenu zajmuje $2,5$ godziny. Jeśli otworzyć pierwszą rurę na godzinę, a drugą na pół godziny, to napełni się ponad połowa basenu. W ciągu ilu godzin napełni basen każda z rur osobno?

23. Dwa samochody wyruszyły jednocześnie naprzeciw siebie z miast odległych o 210 km i jadą ze stałymi prędkościami. W chwili mijania jeden z nich ma jeszcze 2 godziny jazdy, zaś drugi 9/8 godziny jazdy do miasta, z którego wyruszył mijany samochód. Oblicz prędkość każdego samochodu.

24. Po remoncie linii kolejowej średnia prędkość pociągu wzrasta o 10 km/h, zaś czas jazdy na trasie 200 km zmniejsza sie o godzinę. W jakim czasie pociąg przejedzie trasę 200 km po remoncie?

25. Woda wpływa do zbiornika przez kran, zaś wypływa przez odpływ. Gdy otwarty jest kran i odpływ, pusty zbiornik zostanie napełniony wodą w ciągu 12 godzin. Napełnianie zbiornika trwa o godzinę krócej od opróżniania. Ile czasu potrzeba na napełnienie pustego zbiornika z zamkniętym odpływem wodą? Ile czasu trwa opróżnienie zbiornika z zamkniętym kranem?

26. Przednie koło wozu wykonuje na drodze długości 14 km o 3000 obrotów więcej niż koło tylne. Gdyby obwody obu kół powiększyć o pół metra, to na tej samej drodze przednie koło wykona o 2100 obrotów więcej niż koło tylne. Jakie są obwody obu kół?

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 6. 07.10.2020

Powtórzenie przed 1. sprawdzianem

1. Rozważamy układ równań z parametrami $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -2ax + y + (a+1)z = 2 \\ 2x + y + 2z = -2 \\ (a-1)x + y + 2az = b \end{cases}$$

Rozstrzygnij, dla jakich wartości parametrów a i b ten układ równań (i) jest sprzeczny, (ii) ma dokładnie jedno rozwiązanie, (iii) ma wiele rozwiązań.

2. Na płaszczyźnie z kartezjańskim układem współrzędnych dane są trzy punkty $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, przy czym $x_1 < x_2 < x_3$. Wykaż, że istnieje dokładnie jedna funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ taka, że $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $f(x_3) = y_3$.

3. *Wartością własną* macierzy kwadratowej $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ nazywamy taką liczbę $\lambda \in \mathbb{R}$, że istnieje niezerowy wektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, dla którego zachodzi równość $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Mówimy, że $\vec{v}$ jest *wektorem własnym* macierzy A (dla wartości własnej λ).

(a) Wykaż, że jeżeli λ jest wartością własną macierzy A, to układ równań liniowych $(A - \lambda I_n)\vec{x} = 0$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

(b) Wyznacz wartości własne i odpowiadające im wektory własne macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}.$$

Wskazówka: Zacznij od wyznaczenia wartości własnych korzystając z (a) i tw. o wzorach Cramera. Następnie, dla każdej znalezionej wartości własnej λ rozwiąż układ równań $(A - \lambda I_n)\vec{x} = 0$.

4. *Śladem* macierzy kwadratowej $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n,n}$ nazywamy liczbę

$$\mathrm{tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + \ldots + a_{n,n}.$$

Załóżmy, że $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$. Udowodnij, że $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

5. Udowodnij, że macierz kwadratowa $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ jest rozwiązaniem równania macierzowego

$$X^2 - \mathrm{tr}(A) \cdot X + \det(A) = 0, \qquad \text{gdzie } X \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

6. Rozwiąż układy równań liniowych

(a) $$\begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 7 \\ 3x + 4y - 9z = 9 \\ 5x + 2y - 8z = 8 \\ 8x + y - 7z = 12 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 5x_5 = -3 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 8x_4 + 13x_5 = -9 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = -1 \end{cases}$$

7. Wykaż, że jeśli $ad - bc \neq 0$, to

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

8. Rozwiąż równania, w których niewiadoma X to macierz kwadratowa 2×2:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Zastanów się nad taką metodą rozwiązania tych równań, która nie sprowadza się do rozwiązania układu czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi.

9. Dla danego parametru $m \in \mathbb{R}$ dane jest równanie $mx^2 - (m-3)x + 1 = 0$.

(a) Dla jakich wartości m to równanie ma rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunek $|x_1| + |x_2| \leqslant 1$?

(b) Dla jakich całkowitych wartości m iloczyn dwóch różnych rozwiązań tego równania jest liczbą całkowitą?

10. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ równanie $|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = a$ ma więcej niż 3 rozwiązania?

11. Dla jakich wartości parametru p rozwiązania równania $x^2 + 2(p+1)x + 9p - 5 = 0$ są liczbami ujemnymi?

12. Niech $p, q, \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że jeśli równanie $x^2 + px + q$ ma pierwiastki rzeczywiste, to równanie $x^2 + p(a + \frac{1}{a})x + q(a - \frac{1}{a})^2 = 0$, gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, też ma pierwiastki rzeczywiste.

13. Rozwiąż równania:

(a) $2x^4 - x^3 - 11x^2 - x + 2 = 0$,

(b) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$,

(c) $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2 = \dfrac{17}{4}$.

14. Rozwiąż nierówności

(a) $|x^2 - x - 2| \geqslant x$,

(b) $x^4 - 14x^2 + 45 \leqslant 0$,

(c) $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| < 4$,

(d) $\dfrac{x^3 - 4x^2 + 17x - 2}{(x-1)(x^2 - 5x + 6)} \leqslant 1$.

W (d) zastanów się nad sposobem, w którym nie trzeba rozważać przypadków zależnych od znaku mianownika.

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 7. 20.10.2020

Trójmian kwadratowy III

1. Iloraz pierwiastków trójmianu ax^2+bx+c jest równy $\frac{k}{k+1}$. Udowodnij, że

$$\frac{ac}{b^2}=\frac{k(k+1)}{(2k+1)^2}.$$

2. Liczby rzeczywiste x_1, x_2 są pierwiastkami trójmianu $x^2+px-\frac{1}{2p^2}$, gdzie $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Udowodnij, że $x_1^4+x_2^4 \geqslant 2+\sqrt{2}$.

3. Liczby x_1, x_2 są rzeczywistymi pierwiastkami trójmianu x^2-px+p, gdzie $p \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że $x_1^2+x_2^2 \geqslant 2(x_1+x_2)$.

4. Prosta l przecina wykres funkcji $f(x)=x^2$ w punktach o odciętych $x_1, x_2 \neq 0$ i oś Ox w punkcie o odciętej $x_3 \neq 0$/ Udowodnij, że

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_3}.$$

(Jeżeli punkt P ma współrzędne (x,y), to x nazywamy odciętą punktu P, a y rzędną punktu P.)

5. Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami trójmianu x^2+px+1, liczby x_3, x_4 są pierwiastkami trójmianu x^2+qx+1. Udowodnij, że

$$(x_1-x_3)(x_2-x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_4)=q^2-p^2.$$

6. Udowodnij, że trójmiany kwadratowe ax^2+bx+c, bx^2+cx+a, cx^2+ax+b mają wspólny pierwiastek wtedy i tylko wtedy, gdy $a+b+c=0$.

7. Rozwiąż nierówności

(a) $2+\frac{3}{x+1}>\frac{2}{x}$,

(b) $\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}<\frac{6}{x-1}$,

(c) $\frac{2x}{x^2-9} \leqslant \frac{1}{x+2}$,

(d) $-1<\frac{x+1}{x-1}<\frac{3}{x-3}$.

8. Dla jakich wartości parametru a zbiorem rozwiązań nierówności

$$-1<\frac{x^2+ax}{x^2-x+2}<2$$

jest cały zbiór liczb rzeczywistych?

9. Dla jakich wartości parametru m równanie równanie $x^2-2mx+m^2-1=0$ ma pierwiastki rzeczywiste należące do przedziału $[-2,4]$?

10. Dla jakich wartości parametru m pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 równania $2x^2-(m-1)x+m+1=0$ spełniają warunek $|x_1-x_2|=1$?

11. Wyzbacz wartości parametru m, dla których odwrotność sumy kwadratów pierwiastków rzeczywistych trójmianu $x^2-mx+2m-5$ jest największa.

12. Dla jakich wartości parametru k sumą zbiorów rozwiązań nierówności

$$x^2-6kx+5k^2+8k-4>0 \quad \text{i} \quad x^2-4kx+4k^2-k \geqslant 0$$

jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?

13. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x)=x^2+px+q$, gdzie $p,q \in \mathbb{Z}$ i $f(k)>0$ dla każdej liczby całkowitej k. Udowodnij, że $f(x)>0$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

14. Suma liczb wierzchołków dwóch wielokątów wypukłych wynosi 21. Jeden z tych wielokątów ma 2 razy więcej przekątnych niż drugi. Ile wierzchołków ma każdy z tych wielokątów?

15. W 1995 roku pan Nowak wpłacił 10000 zł na dwuletnią lokatę z roczną kapitalizacją odsetek. Po roku bank obniżył roczną stopę procentową o 2 punkty procentowe. Po dwóch latach pan Nowak wypłacił całą kwotę, która wraz z odsetkami wynosiła 16640 zł. Jakie było oprocentowanie lokaty w pierwszym roku, a jakie w drugim? (W latach dziewięćdziesiątych XX w. nie obowiązywał podatek od odsetek bankowych.)

16. Punkt M jest środkiem boku AB prostokąta $ABCD$. Dwusieczna kąta BCD dzieli trójkąt AMD na dwa wielokąty o równych polach. Bok CD ma długość a. Wyznacz długość boku AD.

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 8. 29.10.2020

Nierówność Cauchy'ego – Schwarza

Twierdzenie. Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Ponadto, nierówność ta staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista x taka, że $b_k = x \cdot a_k$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$.

---

1. Udowodnij, że dla liczb nieujemnych a, b zachodzi nierówność

$$(a^3 + b^3)(a + b) \geqslant (a^2 + b^2)^2.$$

2. Niech $a, b \in \mathbb{R}$ i $|a|, |b| \leqslant 1$. Udowodnij nierówność

$$ab + \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)} \leqslant 1.$$

3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ takich, że $a \neq b$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} \leqslant \sqrt{(2a^2 + b^2)(a^2 + 2b^2)}.$$

4. Załóżmy, że $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a + 2b + 3c \geqslant 14$. Udowodnij, że $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 14$.

5. Liczby dodatnie x, y spełniają równość $x^2 + y^2 = 1$. Udowodnij, że

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right) \geqslant 3 + 2\sqrt{2}.$$

6. Załóżmy, że $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a^2 + 2b^2 + 3c^2 \leqslant 6$. Udowodnij, że $|a + b + c| \leqslant \sqrt{11}$.

7. Załóżmy, że $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i $a + 2b + 3c + 4d \geqslant 30$. Udowodnij, że $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 30$.

8. Udowodnij, że dla liczb $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \geqslant 0$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \ldots + \sqrt{a_n b_n} \leqslant \sqrt{a_1 + a_2 + \ldots a_n} \cdot \sqrt{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

9. Liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniają warunek $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$. Udowodnij, że $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant n$.

10. Niech $a, b > c > 0$. Udowodnij, że

$$\sqrt{c(a - c)} + \sqrt{c(b - c)} \leqslant \sqrt{ab}.$$

11. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$a\sqrt{a^2 + c^2} + b\sqrt{b^2 + c^2} \leqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

12. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ i $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 1$ Udowodnij, że

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_{n-1} a_n + a_n a_1 \geqslant -1.$$

13. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1, \ldots, b_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

14. Niech $n \in \mathbb{N}$. Znajdź największą wartość funkcji

$$f(x) = \frac{(x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1)^2}{x^{2n} + x^{2n-2} + \ldots + x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

15. Udowodnij **nierówność Engela**: Jeżeli $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ i $b_1, \ldots, b_n > 0$, to

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

Kiedy nierówność Engela staje się równością?

16. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunek $xyz = 1$. Udowodnij, że

$$\frac{x^2}{y + z} + \frac{y^2}{z + x} + \frac{z^2}{x + y} \geqslant \frac{3}{2}.$$

17. Udowodnij **nierówność Nesbitta**: Jeżeli $a, b, c > 0$, to

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + 1} + \frac{c}{a + b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

18. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_n^2}{a_1} \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

19. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + d} + \frac{c}{d + a} + \frac{d}{a + b} \geqslant 2.$$

20. Udowodnij nierówność Cauchy'ego – Schwarza w nastepujący sposób:

(i) Stosując zasadę indukcji udowodnij nierówność Engela.

(ii) Korzystając z nierówności Engela udowdonij nierówność Cauchy'ego – Schwarza

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 9. 3.11.2020

Układy równań nieliniowych I

Rozwiąż układy równań

1. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^2 + y^2 + xy = 13 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32 \\ 12(x+y) + 7xy = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x + xy + y = 9 \end{cases}$

5. $\begin{cases} |x| - y = 1 \\ x^2 + y^2 + 2y = 7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 + 3 = 2xy \\ 6x^2 - 11y^2 = 10 \end{cases}$

7. $\begin{cases} |xy| = 24 \\ x + y = 10 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x - |y+1| = 1 \\ x^2 + y = 10 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2 + 3xy = 54 \\ xy + 4y^2 = 115 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 4 \\ x^2 + 2x + 1 = y^2 \end{cases}$

11. Wyznacz wartości parametru m, dla których układ równań

$$\begin{cases} x - y = (1 + xy)m \\ 2 + x + y + xy = 0 \end{cases}$$

ma rozwiązania.

12. Zbadaj, dla jakich wartości parametru a istnieje dokładnie jedna para liczb (x, y) spełniająca warunki

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x \leqslant 1 \\ x - y + a = 0 \end{cases}$$

Rozwiąż układy równań

13. $\begin{cases} x(x+y) = 3 \\ x(x+z) = 1 \\ x(y+z) = 2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + xy + y = 1 \\ y + yz + z = 2 \\ z + zx + x = 3 \end{cases}$

15. $\begin{cases} (x+y)z + x^2 = -3 \\ (y+z)x + y^2 = 0 \\ (z+x)y + z^2 = 3 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3xy = 5(x+y) \\ 2xz = 3(x+z) \\ yz = 4(y+z) \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y+z} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z+x} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ xy + yz + zx = 3 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^2 + yz = y + z \\ y^2 + xz = x + z \\ z^2 + xy = x + y \end{cases}$

20. $\begin{cases} y^2 + yz + z^2 = 19 \\ z^2 + zx + x^2 = 28 \\ x^2 + xy + y^2 = 37 \end{cases}$

21. Niech $n \in \mathbb{N}$. Rozwiąż układ równań (zakładamy, że $x_{n+k} = x_k$)

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4 \\ x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_5 \\ \dots \\ x_n^2 + x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 = x_{n+3} \end{cases}$$

22. Niech $n \in \mathbb{N}$. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} (x_1 + x_2)^2 = x_3 \\ (x_2 + x_3)^2 = x_4 \\ \dots \\ (x_{n-2} + x_{n-1})^2 = x_n \\ (x_{n-1} + x_n)^2 = x_1 \\ (x_n + x_1)^2 = x_2 \end{cases}$$

23. Rozwiąż w liczbach dodatnich układ równań

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{1}{x_2} = 4 \\ x_2 + \dfrac{1}{x_3} = 1 \\ x_3 + \dfrac{1}{x_4} = 4 \\ x_5 + \dfrac{1}{x_6} = 1 \\ \dots \\ x_{99} + \dfrac{1}{x_{100}} = 4 \\ x_{100} + \dfrac{1}{x_1} = 1 \end{cases}$$

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 10. 17.11.2020

Ciągi arytmetyczne

Ciągiem liczbowym nieskończonym nazywamy funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ lub $f : \{k, k+1, k+2, \ldots\} \to \mathbb{C}$ (gdzie $k \in \mathbb{Z}$). Wyrazy ciągu to liczby $a_n = f(n)$. Ciąg nieskończony zapisujemy wówczas jako $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n=k}^{\infty}$, $(a_n)_{n\geqslant k}$, $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$.

Jeżeli dziedzina funkcji f jest znana lub nie jest istotna można także stosować zapis $(a_n)_n$ lub po prostu (a_n).

Definicja ciągu arytmetycznego. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{m}$ (gdzie $m > n$ lub $m = \infty$) jest *ciągiem (postępem) arytmetycznym* jeżeli istnieje liczba d taka, że dla każdego n zachodzi $a_{n+1} = a_n + d$. Liczbę d nazywamy wówczas *przyrostem* lub *różnicą* ciągu (a_n).

Tw. 1. Niech $(a_n)_{n=1}^{m}$,gdzie $m \in \mathbb{N}$ i $m > 2$ lub $m = \infty$, będzie ciągiem liczbowym. Następujące warunki są równoważne:

(i) Ciąg $(a_n)_n$ jest arytmetyczny.

(ii) Dla każdego n takiego, że $1 < n < m$.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

(iii) Dla każdego $n \geqslant 1$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Tw. 2. Jeżeli $(a_n)_n$ jest ciągiem arytmetycznym z przyrostem d, to dla $k \geqslant 1$ zachodzi $a_k = a_1 + (k-1)d$ oraz

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n.$$

---

1. Między liczby 1 i 257 wstaw takie liczby x, y, z, aby ciąg $(1, x, y, z, 257)$ był arytmetyczny.

2. Dla jakich wartości x i y ciąg $(3, 2x - y, y - 2x, 9)$ jest arytmetyczny?

3. Oblicz sumę pierwszych stu liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 11 dają resztę 7.

4. Znajdź postęp arytmetyczny, którego suma pierwszych n wyrazów wynosi (a) n^2, (b) $3n^2 - 2n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

5. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ pierwiastki wielomianu $x^4 - (3\alpha + 2)x^2 + \alpha^2$ tworzą ciąg arytmetyczny?

6. Uzupełnij tabelkę w taki sposób, aby liczby w każdym wierszu i każdej kolumnie tworzyły postęp arytmetyczny.

	74			
				186
		103		
0				

7. Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest arytmetyczny. Wykaż, że ciąg o wyrazach (a) $a_n = x_{n+1}^2 - x_n^2$, (b) $b_n = x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+r}$, gdzie $r \in \mathbb{N}$ jest ustalone, też jest ciągiem arytmetycznym.

8. Wykaż, że ciąg liczbowy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, który nie jest stały, jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego trójmianu kwadratowego f i każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = f(n).$$

9. Liczby S_n, S_{2n} i S_{3n} oznaczają sumy początkowych n, $2n$ i $3n$ wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego. Udowodnij, że $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$

10. Niech S_m oznacza sumę początkowych m wyrazów ciągu arytmetycznego $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Wykaż, że jeśli $\dfrac{S_m}{S_n} = \left(\dfrac{m}{n}\right)^2$, to $\dfrac{a_m}{a_n} = \dfrac{2m-1}{2n-1}$.

11. Wyrazy ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ są różne od 0. Wykaż, że (a_n) jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

12. Ciąg arytmetyczny $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ma wszystkie wyrazy dodatnie. Udowodnij, że dla każdego n

$$\sqrt{a_1 a_n} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

13. Wyrazy nieskończonego ciągu arytmetycznego są liczbami naturalnymi i pewien wyraz tego ciągu jest kwadratem. Wykaż, że nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu jest kwadratami.

14. Zbiór liczb naturalnych podzielono na kilka nieskończonych ciągów arytmetycznych. Wykaż, że pierwszy wyraz jednego z tych ciągów jest podzielny przez jego przyrost.

15. Znajdź wszystkie ciągi arytmetyczne z przyrostem 6 składające się z 5 liczb pierwszych.

16. Czy istnieje nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny, którego wszystkie wyrazy są liczbami pierwszymi?

17. Dany jest rosnący ciąg arytmetyczny taki, że iloczyn dowolnych dwóch wyrazów tego ciągu też jest wyrazem tego ciągu. Wykaż, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi.

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 11. 24.11.2020

Ciągi arytmetyczne II

1. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie $a_1 = a$ i przyroście d. Oblicz sumy

(a) $\sum_{k=1}^{n} a_k^2$

(b) $\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1}$

(c) $\sum_{k=1}^{n} k a_k$

(d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$ (dla $a_k > 0$)

2. W pewnej rodzinie każde z pięciorga dzieci dostaje na urodziny, począwszy od piątych, tyle książek, ile w danym dniu kończy lat. Liczby wyrażające wiek dzieci tworzą ciąg arytmetyczny o przyroście 3. Zbiór książek wszystkich dzieci składa się z 325 tomów. Ila lat ma każde z dzieci?

3. Miary kątów pewnego wielokąta tworzą ciąg arytmetyczny. Najmniejszy z nich ma miarę $119°$, największy $169°$. Ile boków ma wielokąt?

4. Pola kwadratowych kartek papieru tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym pierwsza ma pole równe $12\,\mathrm{cm}^2$, a piąta $30\,\mathrm{cm}^2$. Kartki pocięto na kawałki, z których ułożono kwadrat o boku 21 cm. Ile było kartek?

5. Ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny. Wykaż, że $3(a^2+b^2+c^2) = 6(a-b)^2+(a+b+c)^2$.

6. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$. Wykaż, że ciąg (a^2, b^2, c^2) jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $\left(\frac{1}{b+a}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{c+b}\right)$ jest arytmetyczny.

7. Czy istnieje ciąg arytmetyczny, którego pewne trzy wyrazy to liczby $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$?

8. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest arytmetyczny. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a_k = 0.$$

9. Zbiór $A \subset \mathbb{Q}$ jest skończony. Wykaż, że istnieje ciąg arytmetyczny zawierający wszystkie liczby ze zbioru A.

10. Podziel zbiór liczb naturalnych na dwa rozłączne podzbiory w taki sposób, że żaden z tych podzbiorów nie zawiera nieskończonego i rosnącego ciągu arytmetycznego.

11. Dany jest ciąg arytmetyczny $(a_n)_n$ taki, że ciąg $(\lfloor a_n \rfloor)_n$ też jest arytmetyczny. Udowodnij, że przyrost ciągu $(a_n)_n$ jest liczbą całkowitą.

12. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, wyrazy ciągu arytmetycznego $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ są dodatnie i ich suma jest równa S. Wykaż, że

$$\sqrt[3]{a_1a_2a_3} + \sqrt[3]{a_2a_3a_4} + \ldots + \sqrt[3]{a_{n-2}a_{n-1}a_n} \leqslant \frac{n-2}{n}S.$$

13. Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest arytmetyczny i zawiera liczby x_1^2, x_2^2, x_3^2. Wykaż, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi.

14. Udowodnij, że dla każdego $n \geqslant 3$ zbiór

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \ldots\right\}$$

zawiera wyrazy pewnego nie stałego ciągu arytmetycznego długości n. Wykaż, że zbiór A nie zawiera wyrazów nieskończonego nie stałego ciągu arytmetycznego.

15. Udowodnij, że cztery kolejne symbole Newtona

$$\binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}, \binom{n}{k+2}, \binom{n}{k+3}$$

nie tworzą postępu arytmetycznego.

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 12. 26.11.2020

Powtórzenie

1. Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$$

2. Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4xy = 7 \\ 3(x+y) + 2xy = 1 \end{cases}$$

3. Zbadaj, dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ ma rozwiązanie układ równań
$$\begin{cases} xy = a \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

4. Liczby a, b, c są dodatnie. Udowodnij nierówność
$$\frac{a\sqrt{b^2+c^2} + b\sqrt{c^2+d^2} + c\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2+c^2} \leqslant \sqrt{2}.$$

5. Liczby a, b, c są dodatnie. Udowodnij nierówność
$$\frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b} \geqslant 1$$
oraz nierówność
$$\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leqslant 1.$$

6. W piwnicy stoją dwie beczki o pojemności 77 l każda. Pierwsza jest pełna wody, druga jest pusta. Z pierwszej beczki przez otwór w dnie ubyły w pierwszej minucie 4 l. wody, a w każdej następnej minucie ubywa o 0,2 l mniej niż w poprzedniej. Jednocześnie do drugiej beczki wlało się z kranu w pierwszej minucie 1,5 l wody, a w każdej następnej przybywa o 0,5 l. więcej niż w poprzedniej. Po ilu minutach w każdej beczce będzie tyle samo wody?

---

7. Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 91 \\ y^2 = xz \end{cases}$$

8. Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} xy(x+y) = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$$

9. Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} x^2 + 2xy = 3 \\ y^2 + 5xy = 12 \end{cases}$$

10. Udowodnij, że dowolne liczby nieujemne x, y, z spełniają nierówność
$$\sqrt{3x^2+xy} + \sqrt{3y^2+yz} + \sqrt{3z^2+zx} \leqslant 2(x+y+z).$$

11. Liczby $a_1, \ldots, a_n$ są dodatnie i $a_1 + \ldots + a_n = 2$. Udowodnij, że
$$\frac{a_1^2}{a_2+a_3} + \ldots + \frac{a_{n-2}^2}{a_{n-1}+a_n} + \frac{a_{n-1}^2}{a_n+a_1} + \frac{a_n^2}{a_1+a_2} \geqslant 1.$$

12. Ciąg (a^3, b^3, c^3) jest arytmetyczny. Wykaż, że ciąg $\left(\frac{1}{c^2+ca+a^2}, \frac{1}{a^2+ab+b^2}, \frac{1}{b^2+bc+c^2}\right)$ też jest arytmetyczny.

13. Niech S_k oznacza sumę pierwszych k wyrazów postępu arytmetycznego $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ Wykaż, że $S_{5n} - S_n = 2(S_{4n} - S_{2n})$ dla $n \in \mathbb{N}$.

14. Miary kątów pewnego wielokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 6°. Najmniejszy kąt ma miarę 114°. Ile boków może mieć ten wielokąt?

15. Niech $n \geqslant 3$. Wyznacz wszystkie ciągi arytmetyczne $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ takie, że
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n \quad \text{i} \quad |a_1| = |2a_n + 1|.$$

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 13. 8.12.2020

Ciągi geometryczne

Definicja. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=0}^m$ (gdzie $m \in \mathbb{N}$ lub $m = \infty$) jest *ciągiem (postępem) geometrycznym*, jeżeli $a_0 \neq 0$ i istnieje stała $q \neq 0$ taka, że dla każdego n zachodzi $a_{n+1} = qa_n$. Liczbę q nazywamy *ilorazem* ciągu (a_n).

Tw. Ciąg geometryczny $(a_n)_{n=0}^\infty$ z ilorazem q

- jest rosnący, jeśli $a_0 > 0$ i $q > 1$ lub $a_0 < 0$ i $0 < q < 1$;
- jest malejący, jeśli $a_0 > 0$ i $0 < q < 1$ lub $a_0 < 0$ i $q > 1$;
- jest stały, jeśli $q = 1$;
- nie jest monotoniczny, jeśli $q < 0$.

Tw. Jeżeli $(a_n)_{n=0}^\infty$ jest ciągiem geometrycznym z ilorazem q, to dla $k \geqslant 0$ zachodzi $a_k = q^k \cdot a_0$ oraz, gdy $q \neq 1$

$$\sum_{j=0}^{k} a_k = a_0 \frac{q^{k+1}-1}{q-1}.$$

---

1. Ciąg $(a_n)_n$ jest geometryczny. Wyznacz a_1 i iloraz tego ciągu, jeżeli
(a) $a_9 = 3$ i $a_4 = -3$, (b) $a_1 + a_3 + a_5 = 21$ i $a_3 - a_1 = 3$.

2. Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ o wyrazach dodatnich jest geometryczny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego n zachodzi $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$.

3. **Nierówność Euklidesa.** Liczby dodatnie a, b, c, d są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie $q \neq 1$. Udodownij, że $a + d > b + c$.

4. Wyznacz liczby a, b, c, d takie, że ciąg (a, b, c, d) jest geometryczny, $a+b+c+d = 130$ i $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 5044$.

5. Wyznacz liczby a, b, c, d takie, że ciąg (a, b, c, d) jest geometryczny, natomiast ciąg $(a + 1, b + 1, c + 4, d + 13)$ jest arytmetyczny.

6. Ciąg (a, b, c, d) jest geometryczny, $a + d = 10$, $ad = 7$. Oblicz $b^3 + c^3$.

7. Ciąg $(a_n)_n$ jest geometryczny i $a_{m+n} = \alpha$, $a_{m-n} = \beta$. Oblicz a_m i a_n.

8. Boki trójkąta prostokątnego tworzą postęp geometryczny. Znajdź iloraz tego postępu.

9. Boki trójkąta tworzą postęp geometryczny. W jakim przedziale może się zmieniać iloraz tego postępu?

10. Ciąg $(a_n)_n$ jest geometryczny i $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Udowodnij, że $S_n \cdot (S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.

11. Ciąg $(a_n)_n$ jest geometryczny, $a_j \neq 0$ dla każdego j, i $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Udowodnij, że

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = \frac{S_n}{a_1 \cdot a_n}.$$

12. Oblicz sumę $7 + 77 + 777 + \ldots + 77\ldots7$, gdzie ostatnia liczba składa się z n siódemek.

13. Ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ jest geometryczny z ilorazem q. Wyraź sumę $\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k$ przez a_1 i q.

14. Ciąg (a, b, c) jest geometryczny. Wykaż, że $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = abc(a^3 + b^3 + c^3)$.

15. Ciąg $(a_n)_{n=0}^\infty$ jest geometryczny z ilorazem q i $P_n = a_0a_1 \ldots a_n$. Wykaż, że $P_n = a_0^n q^{n(n-1)/2}$ oraz $P_n^2 = (a_0a_{n-1})^n$.

16. Wykaż, że z każdego ciągu arytmetycznego o wyrazach naturalnych można usunąć wyrazy w taki sposób, aby pozostałe wyrazy tworzyły ciąg geometryczny.

17. Ciąg $(a_n)_n$ jest arytmetyczny i nie jest stały, $a_1 = 1$, oraz ciąg (a_2, a_5, a_{11}) jest geometryczny. Oblicz sumę pierwszych 2020 wyrazów ciągu (a_n).

18. Oblicz sumę

$$\sum_{k=0}^{2020} \left\lfloor \frac{2^k}{3} \right\rfloor.$$

19. **Tw. Bernoulliego.** Dane są ciągi arytmetyczny $(a_n)_{n=1}^\infty$ i geometryczny $(b_n)_{n=1}^\infty$ takie, że $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ i $a_n > 0$ dla każdego n. Udowodnij, że $a_n < b_n$ dla każdego $n \geqslant 3$.

20. Znajdź wszystkie pary liczb rzeczywistych α, β takie, że ciąg $(1, \alpha, \beta)$ jest arytmetyczny i ciąg $(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$ jest geometryczny.

21. Ciąg $(a_n)_{n=0}^\infty$ jest arytmetyczny. Wykaż, że istnieją ciągi arytmetyczny $(b_n)_{n=1}^\infty$ i geometryczny $(c_n)_{n=1}^\infty$ takie, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = b_n c_n.$$

22. Dany jest ciąg liczbowy $(b_n)_{n=0}^\infty$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k, \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

i ciąg $(c_n)_{n=0}^\infty$ jest geometryczny i nie jest stały. Wykaż, że ciąg $(b_n)_{n=0}^\infty$ też jest geometryczny.

23. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ istnieją ciągi arytmetyczny $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i geometryczny $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, oba o wyrazach będących liczbami naturalnymi takie, że $b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \ldots < b_n < a_n$.

24. W pewnym konkursie przyznano pewną liczbę nagród o łącznej wartości 1476 zł. Pierwsza nagroda wyniosła 500 zł, a każda kolejna stanowiła pewien stały ułamek poprzedniej. Ostatnia nagroda wyniosła 256 zł. Ile przyznano nagród i jakiej były wysoskości?

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 14. 22.12.2020

Ciągi rekurencyjne

Twierdzenie. Ciąg liczb rzeczywistych $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ spełnia równanie rekurencyjne

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n, \quad p, q \in \mathbb{R},\ q \neq 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Równanie $\lambda^2 = p\lambda + q$ nazywamy *równaniem charakterystycznym* ciągu (x_n). Wówczas

(i) jeżeli równanie charakterystyczne ma 2 różne pierwiastki $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ to istnieją liczby $a, b \in \mathbb{R}$ takie, że $x_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$;

(ii) jeżeli równanie charakterystyczne ma 1 pierwiastek λ_1, to istnieją liczby $a, b \in \mathbb{R}$ takie, że $x_n = (a + bn)\lambda_1^n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

---

1. Znajdź jawne wzory dla ciągów zadanych rekurencyjnie:

(a) $a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_{n+2} = -a_{n+1} + 6a_n$;

(b) $x_0 = 2,\ x_1 = -3,\ x_{n+2} = 6x_{n+1} - 9x_n$;

(c) $y_0 = 0,\ y_1 = 20,\ y_{n+2} = -2y_{n+1} + 8y_n + 10$;

(d) $l_0 = -1,\ l_1 = 2,\ l_{n+2} = l_{n+1} + l_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$;

(e) $u_1 = 0, u_2 = 6,\ u_{n+2} = \dfrac{2(n+1)}{n+2}u_{n+1} + \dfrac{3n}{n+2}u_n$.

2. Na ile sposobów można pokryć prostokąt o wymiarach $2 \times n$ płytkami o rozmiarze 2×1?

3. Na ile sposobów można pokryć prostokąt o wymiarach $2 \times n$ płytkami o rozmiarze 2×1 i 2×2?

4. Na ile sposobów można pokryć prostokąt o wymiarach $3 \times 2n$ płytkami o rozmiarze 2×1?

5. Na ile sposobów można pokryć prostokąt o wymiarach $4 \times 3n$ płytkami o rozmiarze 3×1?

6. Rozstrzygnij, czy istnieje ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, spełniający równanie rekurencyjne $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$, który

(a) ma dokładnie k wyrazów ujemnych, gdzie $k \in \mathbb{N}$,

(b) ma nieskończenie wiele wyrazów dodatnich i nieskończenie wiele wyrazów ujemnych.

7. Wykaż, że nie istnieje ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ taki, że $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$, który ma wszystkie wyrazy dodatnie.

8. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zadany następująco: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ oraz $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Wykaż, że $2^k \mid a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2^k \mid n$.

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 15. 19.01.2020

Ciągi rekurencyjne II

1. Znajdź jawny wzór na n-ty wyraz ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ takiego, że

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n} \text{ dla } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

2. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia zależności

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2} \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Udowodnij, że $a_n > \sqrt[3]{3n}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

3. Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia zależności $a_1 = 2020$ oraz

$$a_{n+2} = \frac{1 + a_{n+1}}{a_n} \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Ile wynosi a_{2021}?

4. Ciąg $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zadany przez warunki $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ oraz

$$\det \begin{bmatrix} u_{n+3} & u_{n+2} \\ u_{n+1} & u_n \end{bmatrix} = n! \qquad \text{dla } n = 0, 2, 3, \ldots.$$

Udowodnij, że każdy wyraz tego ciągu jest liczbą całkowitą.

5. Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zadany przez warunki $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 4$ oraz

$$x_{n+3} = 2x_{n+2} + 2x_{n+1} - x_n.$$

Udowodnij, że każdy wyraz tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.

6. Udowodnij, że każdy wyraz ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ określonego przez warunki

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}} \text{ dla } n = 2, 3, 4, \ldots$$

jest liczbą całkowitą.

7. Znajdź jawny wzórn na n-ty wyraz ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ takiego, że $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{3}$ oraz

$$a_{n+2} = \frac{a_n a_{n+1}}{3a_n + 4a_{n+1}}.$$

8. Ciąg liczb dodatnich $(x_n)_n$ spełnia równanie rekurencyjne

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}.$$

Udowodnij, że pewien wyraz tego ciągu jest liczbą niewymierną.

9. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ spełnia dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych $m \geqslant n$ zależność

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{a_{2m} + a_{2n}}{2}$$

oraz $a_1 = 1$. Wyznacz a_n.

10. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zadany przez warunki $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 337$ oraz

$$a_{n+1} = \frac{2021 + a_n a_{n-1}}{a_{n-2}} \qquad \text{dla } n = 3, 4, 5, \ldots.$$

Udowodnij, że każdy wyraz tego ciągu jest liczbą całkowitą.

11. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zadany przez warunki $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$ oraz

$$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n.$$

Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba a_n jest podzielna przez n.

12. Dany jest ciąg rekurenycjny $(a_n)_{n=1}^{\infty}$: $a_1 = 1$ oraz

$$a_{2n} = a_n + 1, \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{a_{2n}}, \qquad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Udowodnij, że każda liczba wymierna dodatnia wystąpi w tym ciągu dokładnie jeden raz.

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 16. 26.01.2021

Podzielność liczb

Niech $a, b \in \mathbb{Z}$. Mówimy, że liczba a jest dzielnikiem liczby b (liczba b jest podzielna przez a), jeżeli istnieje liczba $c \in \mathbb{Z}$ taka, że $b = a \cdot c$. Piszemy wtedy $a \mid b$. Jeżeli a nie jest dzielnikiem b, piszemy $a \nmid b$.

Przypomnijmy najważniejsze własności podzielności liczb:

(i) $a \mid 0$ oraz $a \mid a$ dla każdej liczby całkowitej a.

(ii) Jeżeli $a \mid b$ i $b \neq 0$, to $|a| \leqslant |b|$.

(iii) Jeżeli $a \mid b$ i $a \mid c$ oraz $x, y \in \mathbb{Z}$, to $a \mid bx + cy$.

(iv) Jeżeli $a \mid b$ i $b \mid c$, to $a \mid c$.

(v) Jeżeli $a \mid b$ i $b \mid a$, to $|a| = |b|$.

(vi) Jeżeli $a \mid b$ i $b \neq 0$, to $\frac{b}{a} \mid b$.

(vii) Jeżeli $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ to $a \mid b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ac \mid bc$.

Tw. o dzieleniu z resztą. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b istnieją jednoznacznie wyznaczone liczby całkowite k i r takie, że $0 \leqslant r \leqslant a - 1$ oraz

$$b = ak + r.$$

Liczbę r nazywamy resztą z dzielenia a przez b.

W dowodzie tw. o dzieleniu z resztą, jak i w dowodach innych twierdzeń z teorii liczb, można skorzystać z następującego twierdzenia:

Zasada minimum. Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb naturalnych zawiera element najmniejszy.

---

1. Znajdź wszystkie liczby $n \in \mathbb{Z}$ takie, że

(a) $n + 1 \mid n^2 + 1$,

(b) $3n + 4 \mid 7n + 1$,

(c) $n - 1 \mid n^5 + 5$

2. Udowodnij, że $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$.

3. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ i $a - c \mid ab + cd$. Wykaż, że $a - c \mid ad + bc$.

4. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba otrzymana z n poprzez usunięcie cyfry jedności w zapisie dziesiętnym jest dzielnikiem n.

5. Niech $n \in \mathbb{Z}$. Jakie są możliwe reszty z dzielenia n^2 przez $3, 4, 7$?

6. Liczby a i b są nieparzyste. Wykaż, że liczba $a^2 + b^2$ nie jest kwadratem.

7. Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{Z}$ i $21 \mid a^2 + b^2$. Udowodnij, że $441 \mid a^2 + b^2$.

8. Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{Z}$ oraz $a + b \mid a^2 + ab + b^2$. Udowodnij, że

$$(a + b)^2 \mid a^4 + b^4.$$

9. Niech $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Wykaż, że $6 \mid a + b + c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $6 \mid a^3 + b^3 + c^3$.

10. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ i

$$d \mid a + b + c \qquad \text{oraz} \qquad d \mid a^2 + b^2 + c^2.$$

Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$d \mid a^{(2^n)} + b^{(2^n)} + c^{(2^n)}.$$

11. Udowodnij, że iloczyn n kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez $n!$.

12. Liczba k jest parzysta. Czy istnieje k liczb naturalnych nieparzystych $n_1, n_2, \ldots, n_k$ takich, że

$$1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_k}?$$

13. Liczba $p > 2$ jest nieparzysta, $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

$$p \mid 1^{p^n} + 2^{p^n} + \ldots + (p - 1)^{p^n}.$$

14. Dla danej liczby naturalnej $n > 3$ niech a_n i b_n to takie liczby naturalne, że $b_n < 10$ i $2^n = 10a_n + b_n$. Udowodnij, że $6 \mid a_n b_n$.

15. Dane są liczby naturalne $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Udowodnij, że

$$a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_n! \mid (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)!.$$

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 17. 2.2.2021

Kongruencje liczbowe

Niech a i b będą liczbami całkowitymi, zaś m liczbą natiralną.

Definicja. Mówimy, że a *przystaje do* b *modulo* m wtedy i tylko wtedy, gdy $m \mid a-b$. Zapisujemy to jako

$$a \equiv b \pmod{m} \iff m \mid a-b$$

i nazywamy *kongruencją / przystawaniem modulo* m.

Zauważmy, że $a \equiv b \pmod{m}$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a i b dają te same reszty po podzieleniu przez m.

Jeżeli a nie przystaje do b modulo m, to piszemy $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Stw. (Podstawowe własności kongruencji) Niech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$.

(i) $a \equiv a \pmod{m}$ (zwrotność),

(ii) $a \equiv b \pmod{m}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b \equiv a \pmod{m}$ (symetria),

(iii) jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ i $b \equiv c \pmod{m}$, to $a \equiv c \pmod{m}$ (przechodniość),

(iv) jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ i $c \equiv d \pmod{m}$, to $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ oraz $a - c \equiv b - d \pmod{m}$;

(v) jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ i $c \equiv d \pmod{m}$, to $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Uwaga. Nie jest prawdą, że jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ oraz $d \mid a$ i $d \mid b$, to $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{m}$.

---

1. Udowodnij, że $10 \mid 53^{53} - 33^{33}$.

2. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n \equiv 3 \pmod{4}$. Udowodnij, że n nie jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.

3. Znajdź resztę z dzielenia liczby 3^{89} przez 7.

4. Niech $x, y \in \mathbb{Z}$. Wykaż, że $7 \mid 10x + y$ wtedy i tylko wtey, gdy $7 \mid x - 2y$. Następnie sprawdź, czy $7 \mid 4\,378\,479$.

5. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wykaż, że $7 \mid 2^{n+2} + 3^{2n+1}$.

6. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $21 \mid 2^{4^n} + 5$.

7. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których $7 \mid 2^n - 1$.

Wykaż, że $7 \nmid 2^n + 1$ dla każdej liczby naturalnej n.

8. Wyznacz dwie ostatnie cyfry dziesiętne liczby $99^{99} - 51^{51}$.

9. Wyznacz resztę z dzielenia przez 7 liczby

$$\sum_{k=1}^{10} 10^{10^k}.$$

10. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $323 \mid 20^{2n} + 16^{2n} - 3^{2n} - 1$.

11. Liczby a, b, c są całkowite i $9 \mid a^2 + b^2 + c^2$. Udowodnij, że

$$9 \mid a^2 - b^2 \quad \text{lub} \quad 9 \mid b^2 - c^2 \quad \text{lub} \quad 9 \mid c^2 - a^2.$$

12. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $3^{6^n} - 2^{6^n}$ jest podzielna przez 35.

13. Udowodnij, że $7 \mid 2222^{5555} + 5555^{2222}$.

14. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

(a) $9 \mid n$ wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr dziesiętnych liczby n jest podzielna przez 9.

(b) $11 \mid n$ wtedy i tylko wtedy, gdy naprzeienna suma cyfr dziesiętnych liczby n jest podzielna przez 11.

15. Niech $m \in \mathbb{N}$ oraz $m > 1$. Udowodnij, że liczba

$$n = a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \ldots + a_k m^k, \quad \text{gdzie } a_0, a_1, \ldots, a_k \in \{0, 1, \ldots, m-1\},$$

jest podzielna przez $m - 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m - 1 \mid a_0 + a_1 + \ldots + a_k$.

16. Niech $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że liczby $2n + 1$ i $3n + 1$ są kwadratami liczb całkowitych. Udowodnij, że $40 \mid n$.

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 18. 9.2.2021

NWW i NWD

Definicja. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$. Każdą liczbę $m \in \mathbb{N}$ taką, że $a_1 \mid m$, $a_2 \mid m$, …, $a_k \mid m$ nazywamy *wspólną wielokrotnością* liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Najmniejsza wspólna wielokrotność liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jest to liczba

$$\mathrm{NWW}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \min\{m \in \mathbb{N} : a_1 \mid m, a_2 \mid m, \ldots, a_k \mid m\}.$$

Uwaga: Liczba $a_1 a_2 \ldots a_k$ jest wspólną wielokrotnością liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k$, więc z zasady minimum powyższa definicja NWW jest poprawna.

Tw. 1. Jeżeli $m \in \mathbb{N}$ jest wspólną wielokrotnością liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k$, to

$$\mathrm{NWW}(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mid m.$$

Największy wspólny dzielnik liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ jest to liczba

$$\mathrm{NWD}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \max\{d \in \mathbb{N} : d \mid a_1, d \mid a_2, \ldots, d \mid a_k\}.$$

Uwaga: Powyższy zbiór liczb naturalnych jest niepusty, bo zawiera 1, oraz ograniczony z góry przez $\max(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, więc ma element maksymalny.

Tw. 2. Jeżeli d jest wspólnym dzielnikiem liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k$, to

$$d \mid \mathrm{NWD}(a_1, a_2, \ldots, a_k).$$

Definicja. Mówimy, że liczby $a, b \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze, jeżeli $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$. Można to zapisać jako $a \perp b$.

Tw. 3. (Algorytm euklidesa) $\mathrm{NWD}(a, b)$, gdzie $a \geqslant b > 0$, można wyznaczyć za pomocą następującego algorytmu: Niech $x_1 = a$, $x_2 = b$. Wykonujemy kolejne dzielenia z resztą, aż do otrzymania zerowej reszty:

$$\begin{aligned}
x_1 &= q_1 x_2 + x_3, && 0 < x_3 < x_2 \\
x_2 &= q_2 x_3 + x_4, && 0 < x_4 < x_3 \\
&\ldots \\
x_{k-2} &= q_{k-2} x_{k-1} + x_k, && 0 < x_k < x_{k-1} \\
x_{k-1} &= q_{k-1} x_k + x_{k+1}, && 0 < x_{k+1} < x_k \\
x_k &= q_k x_{k+1}.
\end{aligned}$$

Wówczas $\mathrm{NWD}(a, b) = x_{k+1}$ (ostatnia niezerowa reszta).

Wniosek (Tożsamość Bezout'a). Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{Z}$ istnieją $u, v \in \mathbb{Z}$ takie, że

$$\mathrm{NWD}(a, b) = ua + bv.$$

1. Niech $a, b \in \mathbb{Z}$ i $d = \mathrm{NWD}(a, b)$. Wykaż, że liczby $\frac{a}{d}$ i $\frac{b}{d}$ są względnie pierwsze.

2. Niech $a, b, c \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$ i $c \mid a$. Wykaż, że $\mathrm{NWD}(b, c) = 1$.

3. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej k liczby $2k + 1$ i $9k + 4$ są względnie pierwsze.

4. Udowodnij, że każda liczba naturalna $n > 6$ jest sumą dwóch liczb naturalnych większych od 1 i względnie pierwszych.

5. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $\mathrm{NWD}(n! + 1, (n + 1)! + 1) = 1$.

6. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $\mathrm{NWD}(6, n) = 1$. Udowodnij, że $24 \mid n^2 - 1$

7. Stosując algorytm Euklidesa oblicz $\mathrm{NWD}(a, b)$ i znajdź $u, v \in \mathbb{Z}$ takie, że $\mathrm{NWD}(a, b) = au + bv$, dla

(a) $a = 329$, $b = 182$,

(b) $a = 1492$, $b = 1066$,

(c) $a = 1745$, $b = 1485$.

8. Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

(a) jeżeli $k \in \mathbb{N}$, to $\mathrm{NWD}(ka, kb) = k \cdot \mathrm{NWD}(a, b)$;

(b) jeżeli $k \in \mathbb{N}$ i $\mathrm{NWD}(k, b) = 1$, to $\mathrm{NWD}(ka, b) = \mathrm{NWD}(a, b)$;

(c) $\mathrm{NWD}(a, b) = \mathrm{NWD}(a - b, \min(a, b))$.

9. Niech $a, b, d \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NWD}(a, d) = 1$ i $d \mid ab$. Udowodnij, że $d \mid b$.

10. Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

$$\mathrm{NWD}(a, b) \cdot \mathrm{NWW}(a, b) = ab.$$

11. Niech $m, n \in \mathbb{N}$ i m jest liczbą nieparzystą. Udowodnij, że liczby $2^m - 1$ i $2^n + 1$ są względnie pierwsze.

12. Niech $a, n \in \mathbb{N}$ i $a > 1$. Udowodonij, że $\mathrm{NWD}\left(\dfrac{a^n - 1}{a - 1}, a - 1\right) = \mathrm{NWD}(a - 1, n)$.

13. Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{Z}$. Pokaż, że $\mathrm{NWD}(5a + 3b, 13a + 8b) = \mathrm{NWD}(a, b)$.

14. Niech $n \in \mathbb{N}$. Pokaż, że $\mathrm{NWW}(1, 2, 3, \ldots, 2n) = \mathrm{NWW}(n + 1, n + 2, \ldots, 2n)$.

15. Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $\mathrm{NWD}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{NWD(a,b)} - 1$.

16. Liczby całkowite a, i b są względnie pierwsze i $m \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że w ciągu arytmetycznym $x_k = a + bk$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, jest nieskończenie wiele liczb względnie pierwszych z m.

17. Liczby całkowite a, i b są względnie pierwsze. Udowodnij, że z ciągu arytmetycznego $x_k = a + bk$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, można wybrać podciąg, którego dowolne dwa wyrazy są względnie pierwsze.

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 19. 16.02.2021

Liczby pierwsze

Definicja. Liczba $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ jest *pierwsza* wtw. gdy dla każdej liczby całkowitej a zachodzi implikacja $a \mid p \Rightarrow a = p$ lub $a = 1$. (Równoważnie, liczby pierwsze to te liczby naturalne, które mają dokładnie dwa różne dzielniki naturalne). Czasami zbiór liczb pierwszych jest oznaczany symbolem $\mathbb{P}$.

Liczbę $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, która nie jest liczbą pierwszą, nazywamy *liczbą złożoną*.

Tw. 1. Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Stw. 2. Liczby pierwsze mają następujące własności:

(i) Jeżeli $p, q \in \mathbb{P}$ i $p \neq q$, to $\mathrm{NWD}(p, q) = 1$.

(ii) Jeżeli $p \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{N}$ i $p \nmid a$, to $\mathrm{NWD}(p, a) = 1$.

(iii) Jeżeli $p \in \mathbb{P}$, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ oraz $p \mid a_1 a_2 \ldots a_k$, to $p \mid a_i$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

(iv) Jeżeli $p, q_1, q_2, \ldots, q_k \in \mathbb{P}$ i $p \mid q_1 q_2 \ldots q_k$, to $p = q_i$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Tw. 3 (Zasadnicze twierdzenie arytmetyki) Każdą liczbę naturalną $n > 1$ można przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych, tzn.

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k,$$

gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{P}$. Ponadto, przedstawienie takie jest jednoznaczne z dokładnością do kolejności czynników.

Wniosek 4. (Postać kanoniczna liczby naturalnej) Każdą liczbę naturalną $n > 1$ można przedstawić jednoznacznie w postaci

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{P}$, $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$, oraz $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$.

Stw. 5. Liczby $a, b \in \mathbb{N}$ zapisano w postaci

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}, \qquad b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k},$$

gdzie $p_i \in \mathbb{P}$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$ oraz $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$. Wówczas

(i) $a \mid b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha_i \leqslant \beta_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$,

(ii) $\mathrm{NWD}(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min(\alpha_k, \beta_k)}$,

(iii) $\mathrm{NWW}(a, b) = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)}$.

---

1. Sprawdź, czy liczby (a) 347, (b) 481 są pierwsze.
2. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczby $4p^2 + 1$ i $6p^2 + 1$ też są pierwsze.
3. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n > 1$. Udowodnij, że każda liczba postaci (a) $4 \cdot 2^{2^n} + 1$, (b) $5 \cdot 3^{3^n} - 2$ jest złożona.
4. Niech $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że liczba $2^n + 1$ jest pierwsza. Udowodnij, że n jest potęgą dwójki.
5. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n > 4$. Udowodnij, że n jest liczbą złożoną wtedy i tylko wtedy, gdy $n \mid (n-1)!$.
6. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje n kolejnych liczb naturalnych złożonych.
7. Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych p, q takie, że liczby $7p + q$ i $pq + 11$ też są pierwsze.
8. Liczba p jest pierwsza. Wykaż, że $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$.
9. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczby $p + 2$ i $p + 4$ też są pierwsze.
10. Liczby p i $p^2 + 2$ są pierwsze. Wykaż, że liczba $p^3 + 2$ też jest pierwsza.
11. Udowodnij, że liczb pierwszych postaci $4k + 3$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, jest nieskończenie wiele.
12. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ liczba $n^5 + n^4 + 1$ jest złożona.
13. Znajdź wszystkie trójki liczb pierwszych p, q, r takie, że
$$pq + qr + rp > pqr.$$
14. Udowodnij, że każda liczba naturalna jest różnicą dwóch liczb naturalnych mających tyle samo dzielników pierwszych.
15. Dane sa dwie różne liczby pierwsze p, q. Udowodnij, że dla pewnych $k, l \in \mathbb{N}$ średnia arytmetyczna wszystkich dzielników liczby $p^k \cdot q^l$ jest całkowita.
16. Liczba $p > 2$ jest pierwsza, $a \in \mathbb{N}$ i $p \mid a + 1$. Udowodnij, że $p^{n+1} \mid a^{p^n} + 1$ dla każdej liczby całkowitej nieujemnej n.
17. Znajdź liczby $a, b, c \in \mathbb{N}$ takie, że $\mathrm{NWW}(a, b, c) \cdot \mathrm{NWD}(a, b, c) \neq abc$.
18. Niech $a, b, c \in \mathbb{N}$. Udowodnij tożsamość
$$\mathrm{NWW}(a, b, c) \cdot \mathrm{NWD}(ab, bc, ca) = abc.$$
19. Niech $a, b, c \in \mathbb{N}$. Udowodnij tożsamość
$$\mathrm{NWW}(a, b, c)^2 \cdot \mathrm{NWD}(a, b) \cdot \mathrm{NWD}(b, c) \cdot \mathrm{NWD}(c, a) = \\ = \mathrm{NWD}(a, b, c)^2 \cdot \mathrm{NWW}(a, b) \cdot \mathrm{NWW}(b, c) \cdot \mathrm{NWW}(c, a).$$
20. Liczby p, q, r są pierwsze, $n \in \mathbb{N}$, oraz
$$p^n + q^n = r^2.$$
Udowodnij, że $n = 1$.

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 20. 25.02.2021

Teoria liczb – zadania różne

---

1. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi $n^2 \mid (n+1)^n - 1$.

2. Niech $k, n \in \mathbb{N}$ i liczba k jest nieparzysta. Udowodnij, że

$$1 + 2 + \ldots + n \mid 1^k + 2^k + \ldots + n^k.$$

3. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n takie, że $3 \mid n \cdot 2^n + 1$.

4. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że $n \mid 2^n + 1$.

5. Udowodnij, że $2^n \nmid 3^n + 1$ dla każdej liczby naturalnej $n > 1$.

6. Niech $a, m, n \in \mathbb{N}$, $a > 1$ i $a^m + 1 \mid a^n + 1$. Udowodnij, że $m \mid n$.

7. Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{N}$ i dla każdego $k \in \mathbb{N}$

$$a^{2k-1} \mid b^{2k}, \quad \text{oraz} \quad b^{2k} \mid a^{2k+1}.$$

Udowodnij, że $a = b$.

8. Niech $n, m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Wykaż, że jeśli

$$a \equiv b \pmod{m} \qquad \text{i} \qquad a \equiv b \pmod{n},$$

to $a \equiv b \pmod{\mathrm{NWW}(m,n)}$.

9. Niech $m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Wykaż, że jeśli $a \equiv b \pmod{m}$, to

$$\mathrm{NWD}(a, m) = \mathrm{NWD}(b, m).$$

10. Niech $d, m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NWD}(d, m) = 1$ i $a, b \in \mathbb{Z}$. Wykaż, że jeśli $ad \equiv bd \pmod{m}$, to $a \equiv b \pmod{m}$.

11. Niech $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ Wykaż równoważność warunków

(i) $\mathrm{NWD}(a, m) = 1$,

(ii) Istnieje liczba całkowita b taka, że $ab \equiv 1 \pmod{m}$.

Uwaga: Liczbę b nazywamy odwrotnością liczby a modulo m.

12. Liczba p jest pierwsza i $q_1, q_2, \ldots, q_{p-1} \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ to odwrotności liczb $1, 2, \ldots, p-1$ modulo p. Wykaż, że liczby $q_1, q_2, \ldots, q_{p-1}$ są różne.

13. Niech $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Udowodnij, że

$$\mathrm{NWD}(a, b, c) = \mathrm{NWD}(\mathrm{NWD}(a, b), c) \quad \text{i} \quad \mathrm{NWW}(a, b, c) = \mathrm{NWW}(\mathrm{NWW}(a, b), c).$$

14. Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_k$ istnieją liczby całkowite $x_1, x_2, \ldots, x_k$ takie, że

$$\mathrm{NWD}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k.$$

15. Liczby naturalne $n, a_1, a_2, \ldots, a_n$ są nieparzyste. Udowodnij, że

$$\mathrm{NWD}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathrm{NWD}\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \ldots, \frac{a_{n-1} + a_n}{2}, \frac{a_n + a_1}{2}\right).$$

16. Niech $k > 1$, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ to pierwsze k liczb pierwszych i $m = p_1p_2 \ldots p_k$. Udowodnij, że liczby $m - 1$ i $m + 1$ nie są kwadratami.

17. Udowodnij, że liczb pierwszych postaci $3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, jest nieskończnenie wiele.

18. Liczba p jest pierwsza, $k \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Udowodnij, że

$$(a + b)^{p^k} \equiv a^{p^k} + b^{p^k} \pmod{p}.$$

19. Dane są liczby całkowite a, b takie, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $2^na + b$ jest kwadratem. Udowodnij, że $a = 0$.

20. Liczba n jest parzysta, liczby $a, b \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze oraz $a + b \mid a^n + b^n$. Wyznacz a i b.

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 21. 9.3.2021

Wzór Legendre'a

Definicja. Niech $p \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$ i $\nu_p(n)$ oznacza największy wykładnik k taki, że $p^k \mid n$. Liczbę $\nu_p(n)$ nazywamy *wykładnikiem p-adycznym* liczby n.

Tw. (Wzórr Legendre'a) Jeżeli p jest liczbą pierwszą i $n \in \mathbb{N}$, to

$$\nu_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots.$$

---

1. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że 2^n nie dzieli $n!$, ale 2^n dzieli $(2n)!/n!$.
2. Udowodnij, że dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$ liczba
$$\frac{(2n)!(2m)!}{n!m!(n+m)!}$$
jest całkowita.
3. Niech $n, k \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że
$$2^{n(2^k-1)} \mid \frac{(2^k n)!}{n!}.$$
4. Niech $n, m \in \mathbb{N}$ i $n \geqslant m$. Udowodnij, że liczba $\dfrac{\mathrm{NWD}(m,n)}{n}\dbinom{n}{m}$ jest całkowita
5. Niech $p \in \mathbb{P}$, $\alpha \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że liczba $\dbinom{p^\alpha}{k}$ jest podzielna przez p dla $1 \leqslant k \leqslant p^\alpha - 1$.
6. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że zapis dziesiętny liczby $n!$ kończy się dokładnie 1000 zer.
7. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że liczba $\dbinom{2n}{n}$ jest podzielna przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy n nie jest potęgą liczby 2.
8. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \mathrm{NWW}\left(1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$.
9. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij tożsamość
$$(n+1)\cdot \mathrm{NWW}\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}\right) = \mathrm{NWW}(1, 2, \dots, n+1).$$
10. Niech $p \in \mathbb{P}$ i s_n to suma cyfr liczby n w zapisie przy podstawie p. Udowodnij, że $\nu_p(n!) = \dfrac{n - s_n}{p-1}$.

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 22. 16.03.2021

Małe twierdzenie Fermata

Kilka pomocniczych faktów:

I. Liczba p jest pierwsza, $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Wówczas $p \mid \binom{p}{k}$.

II. Liczb p jest pierwsza, $a \in \mathbb{N}$ i $\mathrm{NWD}(a, p) = 1$. Wówczas istnieje $b \in \mathbb{N}$ takie, że $ab \equiv 1 \pmod{p}$.

III. Jeżeli liczba p jest pierwsza, to $\mathrm{NWD}(p, (p-1)!) = 1$.

Małe tw. Fermata. Liczba p jest pierwsza, a jest liczbą naturalną. Wówczas

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

oraz, jeśli $\mathrm{NWD}(a, p) = 1$, to

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Definicja. Niech $a, n \in \mathbb{N}$ i $\mathrm{NWD}(a, n) = 1$ *Rzędem liczby a modulo n* nazywamy liczbę

$$\mathrm{ord}_n(a) = \min\{k \in \mathbb{N} : a^k \equiv 1 \pmod{n}\}.$$

Z małego tw. Fermata wynika, że jeśli n jest liczbą pierwszą, to $\mathrm{ord}_n(a)$ jest dobrze zdefiniowaną liczbą.

---

1. Wyznacz resztę z dzielenia (a) 2^{168} przez 19, (b) 42^{91} przez 23.

2. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że $p \mid 2^p + 1$.

3. Wykaż, że $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$. *Uwaga:* $341 = 11 \cdot 31$.

4. Liczba p jest pierwsza, natomiast a i b są liczbami całkowitymi. Udowodnij, że

$$p \mid ab^p - ba^p.$$

5. Dana jest liczba pierwsza $p > 7$. Udowodnij, że liczba $11\ldots1$ ($p-1$ jedynek) jest podzielna przez p.

6. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej $p > 2$

$$1^p + 2^p + 3^p + \ldots + (p-1)^p \equiv 0 \pmod{p}.$$

7. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej p istnieje liczba naturalna n taka, że

$$2^n + 3^n + 6^n \equiv 1 \pmod{p}.$$

8. Liczba p jest pierwsza, natomiast a i b są liczbami całkowitymi. Udowodnij, że jeśli $p \mid a^p - b^p$, to $p^2 \mid a^p - b^p$.

9. Niech $a \in \mathbb{N}$ i liczba pierwsza $p > 2$ jest dzielnikiem liczby $a^2 + 1$. Udowodnij, że $p \equiv 1 \pmod{4}$.

10. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p takich, że $p \equiv 1 \pmod{4}$.

11. Liczba p jest pierwsza, $a, m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NWD}(a, p) = 1$ i $a^m \equiv 1 \pmod{p}$. Udowodnij, że $\mathrm{ord}_n(a) \mid m$.

12. Niech $a, n \in \mathbb{N}$ i $\mathrm{NWD}(a, n) > 1$. Udowodnij, że $a^k \not\equiv 1 \pmod{n}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

13. Liczba p jest pierwsza, $a, m, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NWD}(a, p) = 1$ i $a^m \equiv a^n \equiv 1 \pmod{p}$. Udowodnij, że $a^{\mathrm{NWD}(m,n)} \equiv 1 \pmod{p}$.

14. Niech $k \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p takich, że $p \equiv 1 \pmod{2^k}$.

15. Niech $a, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ i $p > 2$ jest liczbą pierwszą taką, że $a^p \equiv 1 \pmod{p^n}$. Udowodnij, że $a \equiv 1 \pmod{p^{n-1}}$.

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 23. 23.02.2021

Funkcja Eulera

Funkcja Eulera $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest zdefiniowana następująco:

$$\varphi(n) = \big|\{r \in \mathbb{N} : r \leqslant n \text{ i } \mathrm{NWD}(r,n) = 1\}\big|.$$

Inaczej mówiąc, $\varphi(n)$ to liczba liczb naturalnych nie większych od n i względnie pierwszych z n.

Lemat 1. Niech $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NWD}(m,n) = 1$, $c \in \mathbb{Z}$ i $A_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Dla $k \in A_n$ niech r_k oznacza resztę z dzielenia liczby $km + c$ przez n. Wówczas $\{r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}\} = A_n$.

Uwaga. Każdy układ liczb całkowitych $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ takich, że $x_i \not\equiv x_j \pmod n$ dla $i \neq j$ jest nazywany *pełnym układem reszt* modulo n

Lemat 2. Niech $a, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NWD}(a,n) = 1$ i

$$R_n = \{r \in \mathbb{N} : r \leqslant n \text{ i } \mathrm{NWD}(r,n) = 1\} = \{r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)}\},$$

gdzie $1 = r_1 < r_x < \ldots < r_{\varphi(n)} < n$. Dla każdej z liczb r_k niech s_k oznacza resztę z dzielenia liczby $a \cdot r_k$ przez n. Wówczas $\{s_0, s_1, \ldots, s_{\varphi(n)}\} = R_n$.

Uwaga. Każdy układ liczb całkowitych $(x_1, x_2, \ldots, x_{\varphi(n)})$, gdzie $x_i \not\equiv x_j \pmod n$ dla $i \neq j$ oraz $x_i \equiv r \pmod n$ dla pewnego $r \in R_n$ dla każdego i, nazywany jest *zredukowanym układem reszt* modulo n.

Tw. 1. Jeżeli $m, n \in \mathbb{N}$ i $\mathrm{NWD}(m,n) = 1$, to

$$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n).$$

Tw. 2. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ i $p_1, p_2, \ldots, p_k$ to wszystkie dzielniki pierwsze liczby n. Wówczas

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Tw. Eulera. Jeżeli $a, n \in \mathbb{N}$ i $\mathrm{NWD}(a,n) = 1$, to

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n.$$

---

1. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ liczba $\varphi(n)$ jest nieparzysta?
2. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że (a) $\varphi(n) = 10$, (b) $\varphi(n) = 14$.
3. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej m istnieje skończenie wiele liczb naturalnych n takich, że $\varphi(n) = m$.
4. Dla jakich liczb naturalnych n spełniona jest równość $\varphi(n) = \varphi(2n)$?
5. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n takie, że $\varphi(n) \equiv 2 \pmod 4$.
6. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n takie, że $\varphi(2n) = n$.
7. Niech $m, n \in \mathbb{N}$ i $\mathrm{NWD}(m,n) > 1$. Udowodnij, że $\varphi(m \cdot n) > \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.
8. Niech $d, n \in \mathbb{N}$ i $d \mid n$. Wykaż, że $\varphi(d) \mid \varphi(n)$.
9. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij tożsamość

   $$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

   (suma przebiega wszystkie dzielniki naturalne liczby n)
10. Niech $a, n \in \mathbb{N}$ i $a, n > 1$. Udowodnij, że $n \mid \varphi(a^n - 1)$.
11. Wyznacz resztę z dzielenia liczby 2021^{2021} przez 66.
12. Znajdź dwie ostatnie cyfry dziesiętne liczby 33^{1492}.
13. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz resztę z dzielenia liczby 3^{2^n} przez 2^n.
14. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej $p > 5$ spełniona jest kongruencja $p^8 \equiv 1 \pmod{240}$
15. Liczby $a, b \in \mathbb{N}$ są względnie pierwsze. Pokaż, że istnieją $m, n \in \mathbb{N}$ takie, że

    $$a^m + b^n \equiv 1 \pmod{ab}.$$
16. Liczba naturalna n jest nieparzysta. Udowodnij, że

    $$n \mid (2^2 - 1)(2^3 - 1)\ldots(2^{n-1} - 1).$$
17. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej parzystej n

    $$n^2 - 1 \mid 2^{n!} - 1.$$
18. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej s istnieje liczba naturalna n, której suma cyfr dziesiętnych wynosi s i taka, że $s \mid n$.
19. Udowodnij, że $n \nmid 2^n - 1$ dla każdej liczby naturalnej $n > 1$.
20. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n > 1$. Udowodnij, że

    $$n \mid 1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$$

    wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą nieparzystą.

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 24. 30.03.2021

Teoria liczb – powtórzenie

1. Niech $s(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n w zapisie dziesiętnym. Udowodnij, że jeśli $s(n) = s(2n)$, to $9 \mid n$.

2. Oblicz resztę z dzielenia przez 17 liczby

$$2021^{2021^{2021}}.$$

3. Znajdź najmniejsze $x \in \mathbb{N}$ takie, że $18x \equiv 1 \pmod{97}$.

4. Znajdź największą liczbę całkowitą n taką, że $n + 10 \mid n^3 + 100$.

5. Niech $x, y \in \mathbb{N}$, $x, y > 1$ i $\mathrm{NWD}(x, y) = 1$, liczba $n \in \mathbb{N}$ jest parzysta. Udowodnij, że

$$x + y \nmid x^n + y^n.$$

6. Czy iloczyn (a) dwóch, (b) trzech kolejnych liczby naturalnych może być k-tą potęgą liczby naturalnej dla $k > 1$?

7. Liczby p i q są pierwsze oraz $p > q$. Udowodnij, że

$$pq \mid (p + 1)^q + (q - 1)^p - p - q.$$

8. Znajdź dwie ostatnie cyfry liczby (a) 7^{7^4}, (b) 9^{9^9}, (c) $7^{9^{9^9}}$, (d) $99^{99} - 51^{51}$

9. Znajdź trzy ostatnie cyfry liczby 9^{7777}.

10. Znajdź liczby $x, y \in \mathbb{Z}$ takie, że $\mathrm{NWD}(a, b) = ax + by$ dla (a) $a = 6105, b = 1121$, (b) $a = 1591, b = 1517$.

11. Niech $a, b \in \mathbb{N}$ i $\mathrm{NWD}(ab, 65) = 1$. Wykaż, że $65 \mid a^{12} - b^{12}$.

12. Znajdź liczby naturalne a, b takie, że $a \nmid b$, $b \nmid a$ oraz $\mathrm{NWD}(a, b) = 18$, $\mathrm{NWW}(a, b) = 630$.

13. Niech $x, y \in \mathbb{Z}$ i $23 \mid 3x + 2y$. Wykaż, że $23 \mid 17x + 19y$.

14. Liczba p jest piersza. Dla $\in \mathbb{N}$ takiego, że $\mathrm{NWD}(a, p) = 1$ niech

$$f_p(a) = \frac{a^{p-1} - 1}{p}.$$

Udowodnij, że jeśli $a, b \in \mathbb{N}$ i $\mathrm{NWD}(ab, p) = 1$, to

$$f_p(ab) \equiv f_p(a) + f_p(b) \pmod{()p}.$$

15. Niech $m, n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że liczba

$$\frac{((mn)!)^2}{(m!)^{n+1}(n!)^{m+1}}$$

jest naturalna.

16. Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $\tau(n)$ oznacza liczbę wszystkich dzielników naturalnych liczby n, natomiast $\sigma(n)$ oznacza sumę tych dzielników. Udowodnij, że jeśli $\mathrm{NWD}(m, n) = 1$, to

$$\tau(m) \cdot \tau(n) = \tau(mn) \quad \text{i} \quad \sigma(m) \cdot \sigma(n) = \sigma(mn).$$

17. Mówimy, że liczba $n \in \mathbb{N}$ jest *doskonała*, jeżeli n jest sumą swoich dzielników naturalnych mniejszych od n, czyli gdy $\sigma(n) = 2n$. Pierwsze trzy liczby dosokonałe to 6, 28, 496.

Załóżmy, że $p \in \mathbb{N}$ i liczba $2^p - 1$ jest pierwsza. Udowodnij, że liczba $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ jest doskonała.

18. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n > 6$. Udowodnij, że $\varphi(n) \geqslant \sqrt{n}$.

19. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność

$$\varphi(n) + \tau(n) \leqslant n + 1.$$

Dla jakich liczb naturalnych n zachodzi równość?

20. Niech F_n oznacza n-ty wyraz ciągu Fibonacciego ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$). Udowodnij, że

$$\mathrm{NWD}(F_n, F_m) = F_{\mathrm{NWD}(n,m)}.$$

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 25. 13.4.2021

Funkcje parzyste, nieparzyste, okresowe.

Definicja. Niech $D \subset \mathbb{R}$ jest takim zbiorem, że $x \in D \iff -x \in D$ (czyli 0 jest środkiem symetrii zbioru X). Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest

(i) *parzysta*, jeżeli dla każdego $x \in X$ jest $f(x) = f(-x)$,

(ii) *nieparzysta*, jeżeli dla każdego $x \in X$ jest $f(x) = -f(-x)$.

Definicja. Niech $T > 0$ i $D \subset \mathbb{R}$ jest takim podzbiorem, że

$$x \in D \;\Rightarrow\; x + T \in D.$$

Powiemy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest *okresowa o okresie T (T-okresowa)*, jeżeli $f(x) = f(x+T)$ dla każdego $x \in D$. Jeżeli istnieje liczba $T_0 > 0$, taka, że funkcja f jest T_0 okresowa i dla każdej liczby $U \in (0, T_0)$ funkcja f nie jest U-okresowa, to liczbę T_0 nazywamy *okresem podstawowym* funkcji f.

---

1. Funkcje $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są nieparzyste, funkcje $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są parzyste. Zbadaj parzystość i nieparzystość funkcji

(a) $f_1 + f_2$, $g_1 + g_2$, $f_1 \cdot f_2$, $g_1 \cdot g_2$, $f_1 \cdot g_1$, $1/f_1$, $1/g_1$;

(b) $f_1 \circ f_2$, $g_1 \circ g_2$, $f_1 \circ g_1$, $g_1 \circ f_1$.

2. Udowodnij, że każdą funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ można zapisać jako sumę funkcji parzystej i nieparzystej.

3. Zbadaj, czy podana funkcja jest parzysta lub nieparzysta:

(a) $f(x) = \dfrac{|x+2|^3 - |x-2|^3}{|x|^3 + 4}$

(b) $f(x) = \dfrac{|x+5|^4 + |x-5|^4}{|x|^3 + 4}$

(c) $f(x) = (1+x)^n + (1-x)^n$, $n \in \mathbb{N}$

(d) $f(x) = (1+x)^n - (1-x)^n$, $n \in \mathbb{N}$

4. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ warunek

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Udowodnij, że funkcja f jest parzysta lub nieparzysta.

5. Niech $a, b \in \mathbb{R}$ i $f(x) = \dfrac{x+a}{x+b}$. Udowodnij, że istnieją $p, q \in \mathbb{R}$ takie, że funkcja $g(x) = f(x-p) + q$ jest nieparzysta.

6. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Udowodnij, że istnieją $p, q \in \mathbb{R}$ takie, że funkcja $g(x) = f(x-p) + q$ jest nieparzysta.

7. Punkt P jest środkiem symetrii wykresu funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Udowodnij, że P należy do tego wykresu.

8. Podaj przykład funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która nie jest stała i jest q-okresowa dla każdej dodatniej liczby wymiernej q.

9. Podaj przykład funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która nie jest stała i ma okresy równe 1 i $\sqrt{2}$.

10. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ograniczona i funkcja $g(x) = f(x+1) - f(x)$ jest 1-okresowa. Udowodnij, że funkcja f też jest okresowa.

11. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ taka, że dla pewnej liczby $a > 0$ i każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$f(x+a) = \frac{f(x) - 5}{f(x) - 3}.$$

Udowodnij, że funkcja f jest okresowa.

12. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą równości

$$f(x) = f(2x) = f(1-x).$$

Udowodnij, że funkcja f jest okresowa.

13. Funkcje $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniają dla pewnego $a \in \mathbb{R}$ i każdego $x \in \mathbb{R}$ równości

$$f(x+a) = g(x), \qquad g(x+a) = -f(x).$$

Udowodnij, że funkcje f i g są okresowe.

14. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że dla pewnej liczby $a > 0$ i każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}.$$

Udowodnij, ż funkcja f jet okresowa.

15. Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest ograniczona i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$f(n) = f(n + f(n)).$$

Udowodnij, że funkcja f jest okresowa.

16. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ takie, że

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}$.

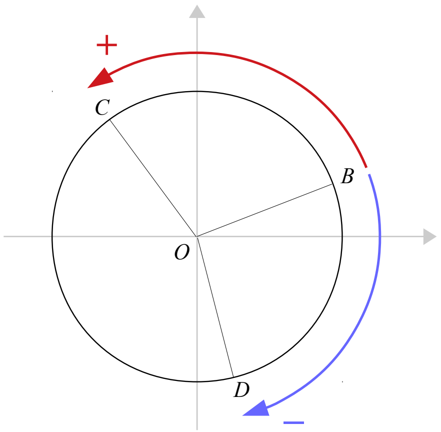
Analiza - klasa 2a4 Zestaw 26. 15.04.2021

Funkcje trygonometryczne I

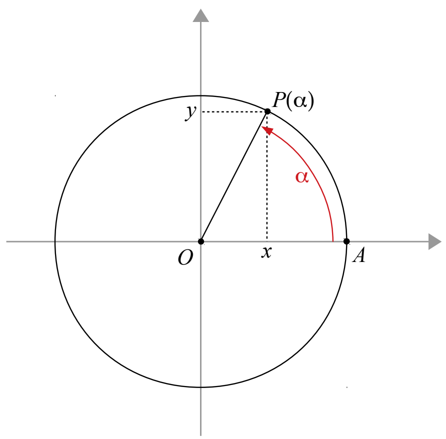
Miara kąta skierowanego

Niech S oznacza okrąg o promieniu 1 (zwany okręgiem jednostkowym), który został umieszczony w układzie współrzędnych na płaszczyźnie tak, że jego środkek znajduje w punkcie $O = (0,0)$. Na tym okręgu wybrano dwa punkty B i C. *Miarą (łukową) kąta skierowanego* $\measuredangle BOC$ określamy za pomocą długości łuku okręgu od punktu B do punktu C, przy czym:

- jeżeli od B do C poruszamy się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to przyjmujemy, że miara kąta jest dodatnia i równa długości łuku od punktu B do punktu C;
- jeżeli od B do C poruszamy się w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, to przyjmujemy, że miara kąta jest ujemna i równa długości łuku od punktu B do punktu C pomnożonej przez -1.



$\measuredangle BOC > 0$ i $\measuredangle BOD < 0$



Funkcja $P : \mathbb{R} \to S$

Na okręgu S ustalmy punkt $A = (1,0)$. Każdej liczbie rzeczywistej α możemy przyporządkować punkt $P(\alpha)$ na okręgu S w taki sposób, że miara łukowa kąta skierowanego $\measuredangle AOP(\alpha)$ jest równa α:

- $P(0) = A$;
- jeżeli $\alpha > 0$, to idziemy się po okręgu od punktu A w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara aż przejdziemy drogę długości α, dochodząc do punktu $P(\alpha)$;
- jeżeli $\alpha < 0$, to idziemy po okręgu od punktu A w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara aż przejdziemy drogę długości $-\alpha$, dochodząc do punktu $P(\alpha)$.

Fakt. Funkcja $P : \mathbb{R} \to S$ jest okresowa i jej okres podstawowy jest równy 2π. Ponadto, jeżeli $\alpha \in [0, 2\pi)$, to funkcja $\alpha \mapsto P(\alpha)$ jest bijekcją.

Sinus, cosinus, tangens i cotangens

Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ i przyjmijmy, że punkt $P(\alpha)$ ma współrzędne (x, y). Definiujemy następujące funkcje, zwane funkcjami *trygonometrycznymi*:

(i) **sinus:** $\sin\alpha = y$;

(ii) **cosinus:** $\cos\alpha = x$;

(iii) **tangens:** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$;

(iv) **cotangens:** $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$.

Stw. 1 (własności sinusa). Funkcja $\sin(\alpha)$ jest określona dla każdej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$ i

(i) jej zbiór wartości to przedział $[-1, 1]$;

(ii) jest okresowa i jej okres podstawowy wynosi 2π;

(iii) jest nieparzysta;

(iv) jest rosnąca na przedziałach $[(2k - \frac{1}{2})\pi, (2k + \frac{1}{2})\pi]$ i malejąca na przedziałach $[(2k + \frac{1}{2})\pi, (2k + \frac{3}{2})\pi]$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stw. 2 (własności cosinusa). Funkcja $\cos(\alpha)$ jest określona dla każdej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz

(i) jej zbiór wartości to przedział $[-1, 1]$;

(ii) jest okresowa i jej okres podstawowy wynosi 2π;

(iii) jest parzysta;

(iv) jest malejąca na przedziałach $[2k\pi, (2k + 1)\pi]$ i rosnąca na przedziałach $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stw. 3 (własności tangensa). Funkcja $\operatorname{tg}(\alpha)$ jest określona dla każdej liczby $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{(k + \frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ oraz

(i) jej zbiór wartości to cały zbiór liczb rzeczywistych;

(ii) jest okresowa i jej okres podstawowy wynosi π;

(iii) jest nieparzysta;

(iv) jest rosnąca na przedziałach $((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stw. 4 (własności cotangensa). Funkcja $\operatorname{ctg}(\alpha)$ jest określona dla każdej liczby $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ oraz

(i) jej zbiór wartości to cały zbiór liczb rzeczywistych;

(ii) jest okresowa i jej okres podstawowy wynosi π;

(iii) jest nieparzysta;

(iv) jest malejąca na przedziałach $(k\pi, (k+1)\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stw. 5 (jedynka trygonometryczna). Dla każdej liczby rzeczywistej α

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

1. Znajdź współrzędne puntów

$$P(\pi),\ P\left(\frac{3\pi}{2}\right),\ P\left(-\frac{\pi}{2}\right),\ P(-\pi),\ P\left(\frac{\pi}{3}\right),\ P\left(\frac{-3\pi}{3}\right),\ P\left(\frac{\pi}{6}\right),\ P\left(\frac{2021\pi}{6}\right).$$

2. Uzupełnij wartości w tabeli:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
stopnie												
$\sin\alpha$												
$\cos\alpha$												
$\operatorname{tg}\alpha$												
$\operatorname{ctg}\alpha$												

3. Określ znak wartości funkcji $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ w zależności od $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Zbadaj znaki liczb $\sin\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{7\pi}{13}$, $\operatorname{tg}\frac{23\pi}{8}$, $\sin\sqrt{\pi}$, $\operatorname{tg}1$, $\cos(\sin 4)$, $\operatorname{tg}(\cos 1)$.

5. Porównaj pary liczb: (a) $\sin 1$ i $\cos 1$, (b) 1 i $\cos 1 + \sin 1$, (c) $\operatorname{tg}3$ i $\operatorname{ctg}3$.

6. Udowodnij tożsamości (t jest dowolną liczbą rzeczywistą):

(a) $\sin t = \sin(\pi - t) = -\sin(\pi + t)$;

(b) $\cos t = -\cos(\pi - t) = -\cos(\pi + t)$;

(c) $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(\frac{\pi}{2} + t) = \cos t$;

(d) $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = -\cos(\frac{\pi}{2} + t) = \sin t$.

7. Znajdź funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taką, że $\operatorname{ctg} = \operatorname{tg} \circ f$.

8. Uprość wyrażenia:

(a) $\operatorname{tg}^2\theta - \dfrac{1}{\cos^2\theta}$,

(b) $\sin^4\phi + 2\sin^2\phi\cos^2\phi + \cos^4\phi$,

(c) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\gamma} + \dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\gamma}$,

(d) $\sqrt{1-\cos^2 t}$, gdy $t \in [2017\pi, 2018\pi]$,

(e) $\sqrt{1-\sin^2 x}$, gdy $x \in [\frac{2017}{2}\pi, \frac{2019}{2}\pi]$.

9. Rozwiąż równania:

(a) $|\sin x| = \frac{1}{2}$,

(b) $\sin x + \cos x = 1$,

(c) $|\sin x| = |\cos x|$,

(d) $|\sin x - \cos x| = |\sin x| + |\cos x|$

10. Rozwiąż nierowności:

(a) $\cos x > \frac{1}{2}$;

(b) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(c) $\operatorname{tg}x > 1$;

(d) $\operatorname{ctg}x \geqslant -\sqrt{6}$;

(e) $\sin x > \cos x$;

(f) $\sin x - \cos x \geqslant 1$.

11. Wyznacz okresy podstawowe funkcji: (a) $\sin(\pi x)$, (b) $\cos(5+7x)$, (c) $\operatorname{tg}(x - \lfloor x \rfloor)$, (d) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2\pi}$.

12. Uprość wyrażenie

$$\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}.$$

13. Uprość wyrażenie

$$\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}.$$

14. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej α takie, że $|\sin\alpha| \neq 1$

$$\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = \frac{2}{|\cos\alpha|}.$$

15. Dane są liczby rzeczywiste a, b i x takie, że $\dfrac{\sin^4 x}{a} + \dfrac{\cos^4 x}{b} = \dfrac{1}{a+b}$.

(a) Wyraź $\sin^2 x$ i $\cos^2 x$ poprzez a i b.

(b) Pokaż, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\frac{\sin^{2n} x}{a^{n-1}} + \frac{\cos^{2n} x}{b^{n-1}} = \frac{1}{(a+b)^{n-1}}.$$

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 27. 22.04.2021

Funkcje trygonemtryczne II

Twierdzenie. Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ prawdziwe są tożsamości:

(i) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$,

(ii) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$,

(iii) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$,

(iv) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

1. Udowodnij tożsamości:

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta, \qquad \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta.$$

2. Udowodnij tożsamości

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Wyprowadź analogiczne wzory dla funkcji cotangens.

3. Wyraź $\sin(3\theta)$ za pomocą $\sin\theta$ i $\cos(3\theta)$ za pomocą $\cos\theta$;

4. Oblicz wartości funkcji sinus i kosinus dla argumentów: $\frac{\pi}{8}$, $\frac{7\pi}{8}$, $\frac{-17\pi}{8}$, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{19\pi}{12}$.

5. Udowodnij tożsamości pozwalające zamienić sumę wartości funkcji sinus lub cosinus na iloczyn:

(i) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$,

(ii) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$,

(iii) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$,

(iv) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$;

6. Udowodnij tożsamości pozwalające zamienić iloczyn wartości funkcji sinus i cosinus na sumę:

(i) $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$,

(ii) $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$,

(iii) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)$.

7. Wyprowadź wzory wyrażające $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ za pomocą $t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$:

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}.$$

8. Oblicz $\cos^4\frac{\pi}{24} - \sin^4\frac{\pi}{24}$.

9. Udowodnij nierówności:

(a) $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

(b) $|\sin x| \leqslant |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(c) $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$;

(d) $\frac{\sin x + \sin y}{2} \leqslant \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$ dla $0 \leqslant x, y \leqslant \pi$.

10. Rozwiąż równania. W każdym podpunkcie wyznacz wszystkie rozwiązania z przedziału $[0, 2\pi)$ i wszystkie rozwiązania rzeczywiste.

(a) $2\sin^2 x + \sin x = 1$;

(b) $\cos(2x) - \cos x = 0$;

(c) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$;

(d) $\sin(2x)\sin x = \cos x$;

(e) $\sin(2x) - \sqrt{3}\cos x = 0$;

(f) $\cos x - \cos(3x) = \sin(3x) - \sin x$

(g) $\operatorname{tg} x = 2\cos\frac{x}{2}$;

(h) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$;

(i) $\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin^2(2x) = 1$;

(j) $\sin x \cdot \sin(3x) = \frac{1}{2}$.

11. Rozwiąż równania (a) $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$, (b) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$.

12. Dla danych liczb rzeczywistych a i b wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = a\sin x + b\cos x$.

13. Załóżmy, że $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \frac{\pi}{2}$. Udowodnij nierówności

$$\operatorname{tg} x_1 < \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n}{\cos x_1 + \cos x_2 + \ldots + \cos x_n} < \operatorname{tg} x_n.$$

14. Załóżmy, że $0 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_n \leqslant \pi$. Udowodnij nierówność

$$\frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n}{n} \leqslant \sin\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right).$$

15. Niech $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

16. Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^{89} \frac{1}{\sin k^\circ \cdot \sin(k+1)^\circ} = \frac{\cos 1^\circ}{(\sin 1^\circ)^2}.$$

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 28. 11.05.2021

Funkcje trygonometryczne III

1. Dla jakich wartości parametru a równanie
$$\sin^4 x + \cos^4 x = a$$
ma rozwiązanie?

2. Udowodnij, że funkcja $f(x) = x + \sin x$ (dla $x \in \mathbb{R}$) jest rosnąca.

3. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji
$$f(x) = (\cos x + 1)(\sin x + 1).$$

4. Rozwiąż nierówności

(a) $\cos x + \operatorname{tg} x < 1 + \sin x$

(b) $2\sin^2(3x) + \sin^2(6x) < 2$

(c) $\operatorname{tg}(2x) - \operatorname{ctg}(2x) > \frac{2}{\sqrt{3}}$.

5. Rozwiąż układy równań ($x, y \in [0, 2\pi]$):

(a) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 0 \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{3}{4} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = 1 \\ \cos x \cdot \cos y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4} \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3} \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

6. Niech $a \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że jeśli układ równań
$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ \sin x + \sin y = a \end{cases}$$
ma rozwiązanie x, y, to $|a| \leqslant \sqrt{3}$.

7. Niech $a, b \geqslant 0$ i $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Udowodnij nierówność
$$\left(1 + \frac{a}{\sin x}\right)\left(1 + \frac{b}{\cos x}\right) \geqslant \left(1 + \sqrt{2ab}\right)^2.$$

8. Udowodnij nierówność
$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) \leqslant \frac{3}{2} \qquad \text{dla } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

9. Załóżmy, że $\alpha, \beta > 0$ i $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$. Udowodnij nierówność
$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \leqslant \frac{1}{3}.$$

10. Udowodnij tożsamości
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\beta+\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} + \sin(\alpha+\beta+\gamma),$$
$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma+\alpha}{2} - \cos(\alpha+\beta+\gamma).$$

11. Oblicz

(a) $\cos\frac{\pi}{9} \cdot \cos\frac{2\pi}{9} \cdot \cos\frac{4\pi}{9}$

(b) $\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$

(c) $\cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$

(d) $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$

(e) $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$

12. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n i liczby rzeczywistej α spełniona jest nierówność
$$|\sin n\alpha| \leqslant n|\sin\alpha|.$$

13. Niech $t \in \mathbb{R}$ i $\cos t = \frac{1}{3}$. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór
$$\cos(nt) = \frac{a_n}{3^n},$$
gdzie a_n jest pewną liczbą całkowitą taką, że $3 \nmid a_n$.

14. Załóżmy, że $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $x \in \mathbb{R}$ i $x \neq m\pi$ dla $m \in \mathbb{Z}$ oraz $kx \neq (m + \frac{1}{2})\pi$ dla $m \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Udowodnij wzór
$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg}(kx) \cdot \operatorname{tg}((k+1)x) = \frac{\operatorname{tg}(nx)}{\operatorname{tg} x} - n.$$

15. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n \geqslant 2$. Udowodnij, że funkcja
$$f(x) = \cos x + \cos(x\sqrt{2}) + \ldots + \cos(x\sqrt{n})$$
nie jest okresowa.

16. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność
$$(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1} > 1 + n\cos\frac{\pi}{n}.$$

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 29. 18.05.2021

Liczby zespolone I

Liczba zespolona jest to para uporządkowana liczb rzeczywistych (a, b). Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy symbolem $\mathbb{C}$.

Na zbiorze $\mathbb{C}$ są określone działania

- *dodawanie:* $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, z elementem neutralnym $0 = (0, 0)$;
- *mnożenie:* $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, z elementem neutralnym $1 = (1, 0)$.

Ponadto, *odwrotnością* liczby zespolonej $z = (a, b) \neq 0$ nazywamy liczbę zespoloną $z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$. Można łatwo sprawdzić, że $z \cdot z^{-1} = 1$.

Stw. Działania dodawania i mnożenia liczb zespolonych są przemienne i łączne, oraz mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Liczbę zespoloną $(0, 1)$ nazywamy *jednostką urojoną* i oznaczamy symbolem i. Liczba i spełnia równość $i^2 = (-1, 0)$. Wykorzystując jednostkę urojoną i każdą liczbę zespoloną możemy zapisać w tzw. *postaci algebraicznej:*

$$z = (a, b) = a + bi.$$

Zachodzi $i^2 = -1 + 0i = -1$ (czyli i to legendarny pierwiastek kwadratowy z -1).

Stosując postać algebraiczną, każdą liczbę rzeczywistą można traktować jako liczbę zespoloną: $a = a + 0i$ dla $a \in \mathbb{R}$.

Jeżeli $z = (a, b) = a + bi$ jest liczbą zespoloną, to

- liczbę rzeczywistą a nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby zespolonej z i oznaczamy $\mathrm{Re}z = a$ (lub $\mathrm{re}z = a$)
- liczbę rzeczywistą b nazywamy *częścią urojoną* liczby zespolonej z i oznaczamy $\mathrm{Im}z = b$ (lub $\mathrm{im}z = b$)
- *moduł* liczby zespolonej z jest to liczba nieujemna $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- *sprzężeniem* liczby zespolonej z nazywamy liczbę zespoloną $\overline{z} = (a, -b) = a - bi$

Stw. Niech $z \in \mathbb{C}$. Wówczas
(i) $z + \overline{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}z$, (ii) $z - \overline{z} = 2i \cdot \mathrm{Im}z$, (iii) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, (iv) $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ gdy $z \neq 0$.

Stw. Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Wówczas

(i) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,
(ii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,
(iii) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ (dla $w \neq 0$)
(iv) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$,
(v) $\big||z| - |w|\big| \leqslant |z - w|$,
(vi) $|zw| = |z| \cdot |w|$,
(vii) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ (dla $w \neq 0$).

1. Sprowadź wyrażenia do postaci algebraicznej:

(a) $(2+i)(3-i) + (2+3i)(3+4i)$,
(b) $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$,
(c) $(3+i)^3 + (3-i)^3$,
(d) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$,
(e) $\frac{(1-i)^5 - 1}{(1+i)^5 + 1}$,
(f) $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$ (dla $n = 2, 3, 4 \ldots$),
(g) $(1-i)^{4n}$ (dla $n \in \mathbb{N}$).

2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Jakie wartości może przyjmować suma $\sum_{k=0}^{n} i^k$?

3. Niech $u = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Oblicz u^n dla $n \in \mathbb{Z}$ oraz $1 + u + u^2$, $1 + \overline{u} + \overline{u}^2$.

4. Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Udowodnij, że $|z| = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathrm{Re}z = \frac{z^2 + 1}{2z} \quad \text{i} \quad \mathrm{Im}z = \frac{z^2 - 1}{2iz}.$$

5. Niech $a, b \in \mathbb{C}$. Udowodnij, że $|a + b| = |a| + |b|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a\overline{b}$ jest nieujemną liczbą rzeczywistą.

6. Rozwiąż w liczbach zespolonych równania:

(a) $|z| - z = 1 + 2i$,
(b) $z^2 = i$,
(c) $z^2 = 3 - 4i$,
(d) $z^2 = \overline{z}$,
(e) $z^3 = \overline{z}$,
(f) $z^2 + 2|z|^2 = 2$,
(g) $z^3 + |z|^2 + z = 0$,

7. (i) Udowodnij, że dla każdej liczby zespolonej $a \neq 0$ istnieją dwie różne liczby zespolone v, w takie, że $u^2 = v^2 = a$.

(ii) Udowodnij, że dla dowolnych liczb zespolonych a, b, c takich, że $a \neq 0$ i $b^2 \neq 4ac$ równanie kwadratowe $az^2 + bz + c = 0$ ma dwa różne rozwiązania zespolone.

(iii) Udowodnij, że jeśli $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ i $b^2 < 4ac$, to rozwiązania zespolone z_1, z_2 równania $az^2 + bz + c = 0$ spełniają zależność $z_2 = \overline{z_1}$.

8. Rozwiąż równania

(a) $z^2 - 4z - 5$
(b) $z^2 - 8(i + z) + 63 - 16i = 0$
(c) $z^3 = 1$
(d) $z^4 = -1$

9. Dane są liczby zespolone a, b, przy czyn $b \neq 0$. Niech z_1 i z_2 to pierwiastki równania $z^2 + az + b^2 = 0$. Udowodnij, że jeśli $|z_1| = |z_2|$ to liczba $\frac{p}{q}$ jest rzeczywista.

10. Niech $z, w \in \mathbb{C}$, $|z| = |w| = 1$ i $zw \neq -1$. Udowodnij, że liczba $\frac{z + w}{1 + zw}$ jest rzeczywista.

11. Naszkicuj na płaszczyźnie zespolonej poniższe zbiory:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$;

(b) $\{z \in \mathbb{C} : |z + i| \leqslant 1\}$;

(c) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z + \mathrm{Im} z = 2\}$;

(d) $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| + |z + i| = a\}$ dla $a = 1, 2, 3$;

(e) $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leqslant |\mathrm{Re} z| < 2\}$;

(f) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(iz) < 1\}$;

(g) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \mathrm{Im} z + 1\}$;

(h) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z^2) = 1\}$.

12. Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Udowodnij tożsamości

(a) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\big(|z|^2 + |w|^2\big)$,

(b) $|1 + z\overline{w}|^2 + |z - w|^2 = (1 + |z|^2)(1 + |w|^2)$,

(c) $|1 - z\overline{w}|^2 - |z - w|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2)$.

Podaj interpretację geometryczną pierwszej tożsamości.

13. Dane są liczy zespolone u, v, w takie, że $u+v+w = 0$ i $|u| = |v| = |w|$. Udowodnij, że $u^2 + v^2 + w^2 = 0$.

14. Niech $z \in \mathbb{C}$ i załóżmy, że liczba $\dfrac{1 + z + z^2}{1 - z + z^2}$ jest rzeczywista. Udowodnij, że $z \in \mathbb{R}$ lub $|z| = 1$.

15. Niech $x, y, z \in \mathbb{C}$, $|x| = |y| = |z| = a > 0$ oraz $x + y + z \neq 0$. Udowodnij, że

$$\left|\frac{xy + yz + zx}{x + y + z}\right| = a.$$

16. Niech $x, y, z \in \mathbb{C}$. Udowodnij, że

(i) $|x + y|^2 + |y + z|^2 + |z + x|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + |x + y + z|^2$;

(ii) $|x + y| + |y + z| + |z + x| \leqslant |x| + |y| + |z| + |x + y + z|$.

17. Rozwiąż w liczbach zespolonych równania

(a) $|z| + |z - 1| + |z - 2| + |z - 3| = 4$,

(b) $\big|z - |z + 1|\big| = \big|z + |z - 1|\big|$.

18. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz z jest liczbą zespoloną o module 1. Udowodnij, że

$$n|1 + z| + |1 + z^2| + |1 + z^3| + \ldots |1 + z^{2n}| + |1 + z^{2n+1}| \geqslant 2n.$$

19. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$. Stosując zasadę indukcji (lub innym sposobem) udowodnij *tożsamość Lagrange'a:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2\right) - \left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right|^2 = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} |x_j\overline{y_k} - x_k\overline{y_j}|^2.$$

Następnie udowodnij *nierówność Schwarza:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2\right) \geqslant \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\overline{y_k}\right|^2.$$

20. Dane są liczby zespolone $z_1, z_2, \ldots, z_n$ takie, że $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| > 0$. Udowodnij, że

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{z_j}{z_k}\right) = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = 0.$$

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 30. 01.06.2021

Liczby zespolone II

Postać trygonometryczna liczby zespolonej: Każdą liczbę zespoloną z można zapisać w postaci

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad \text{gdzie } r = |z| \geqslant 0, \theta \in \mathbb{R}.$$

Liczbę θ nazywamy argumentem liczby zespolonej z. Dla $z \neq 0$, jeżeli $\theta \in [0, 2\pi)$, to mówimy, że θ jest *argumentem głównym* liczby z.

Stosowana jest notacja $\operatorname{cis}\theta = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Pełny sens matematyczny zapisu $e^{i\theta}$ stanie się jasny kiedy indziej.

Stw. Jeżeli $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ i $w = s(\cos\phi + i\sin\phi)$, gdzie $r, s > 0$, $\theta, \phi \in \mathbb{R}$, to

(i) $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$, jeśli $z \neq 0$;

(ii) $z \cdot w = rs \cdot (\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi))$;

(iii) $\frac{z}{w} = \frac{r}{s}(\cos(\theta-\phi) + i\sin(\theta-\phi))$;

(iv) (**Wzóre de Moivre'a**) dla $n \in \mathbb{Z}$, $z \neq 0$

$$z^n = r^n \cdot \big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big).$$

---

1. Zapisz liczby zespolone w postaci trygonometrycznej: (a) i, (b) $2+2i$, (c) $-1+\sqrt{3}i$, (d) $\frac{3+2i}{-2+3i}$, (e) $(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i$, (f) $2+\sqrt{3}+i$.

2. Niech $z = r\cdot\operatorname{cis}\alpha$ i $n, m \in \mathbb{Z}$. Wyznacz postać trygonometryczną liczby $z^m \cdot \overline{z}^n$.

3. Wyznacz postać trygonometryczną liczb: (a) $\sin\alpha + i\cos\alpha$, (b) $1 + i\operatorname{tg}\alpha$, (c) $1+\cos\alpha + i\sin\alpha$, dla $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, (d) $\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$.

4. Znajdź postać algebraiczną liczb (dla $n \in \mathbb{Z}$): (a) $(1+i)^{2021}$, (b) $(1+i\sqrt{3})^{1000}$, (c) $\left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{-100}$, (d) $\left(\frac{9+5i}{7-2i}\right)^{8}$, (e) $\frac{(\sqrt{3}+3i)^{40}}{(\sqrt{3}+i)^{20}}$.

5. Liczby z_1 i z_2 są różnymi zespolonymi rozwiązaniami równania

$$z^2 - (1+2i)z - 1 + 3i = 0.$$

Wyznacz część rzeczywistą i urojoną liczby

$$\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)^{2021}.$$

6. Niech $z \in \mathbb{C}$ i $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$. Oblicz $z^n + \frac{1}{z^n}$.

7. Znajdź postać algebraiczną liczb (dla $n \in \mathbb{Z}$): (a) $\frac{\cos\phi + i\sin\phi}{\cos\psi - i\sin\psi}$, (b) $(1-\cos\phi + i\sin\phi)^n$ (c) $(\operatorname{tg}\phi + i)^n$.

8. Pokaż, że każdą liczbę zespoloną $z \neq -1$ taką, że $|z| = 1$ można przedstawić w postaci $\frac{1+ti}{1-ti}$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$.

9. Dla jakich liczb całkowitych n liczba $\left(2+i\sqrt{3}\right)^n$ jest (a) liczbą rzeczywistą ujemną, (b) liczbą urojoną?

10. Niech $z = \operatorname{cis}\theta$. Pokaż, że $\cos(n\theta) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$ oraz $\sin(n\theta) = \frac{1}{2i}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$.

11. Wyznacz wszystkie liczby zespolone z takie, że

$$|z| = 1 = \left|\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}\right|.$$

12. Ile jest liczb naturalnych n mniejszych od 2021 i takich, że dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi $(\sin\alpha + i\cos\alpha)^n = \sin(n\alpha) + i\cos(n\alpha)$?

13. Wyraź $\cos(5x)$ i $\sin(5x)$ poprzez $\cos x$ i $\sin x$ oraz $\operatorname{tg}(5x)$ przez $\operatorname{tg} x$

14. Oblicz $\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11}$.

15. Pokaż, że $\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n = \frac{1+i\operatorname{tg}(n\alpha)}{1-i\operatorname{tg}(n\alpha)}$.

16. Udowodnij tożsamości:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin(kx) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

17. Obliczy sumy:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos(kx)$, (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cos(kx)$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin^2(kx)$, (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$.

18. Niech $n \in \mathbb{N}$. Znajdź wzór na sumę $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{n}{2k}$.

19. Załóżmy, że $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0$. Udowodnij, że

(a) $\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) = \sin(2\alpha) + \sin(2\beta) + \sin(2\gamma) = 0$,

(b) $3\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos(3\alpha) + \cos(3\beta) + \cos(3\gamma)$,

(c) $3\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin(3\alpha) + \sin(3\beta) + \sin(3\gamma)$.

Analiza - klasa 2a4 Zestaw 31. 10.06.2021

Liczby zespolone III

Tw. (pierwiastki z liczby zespolonej). Niech $a = |a| \cdot \operatorname{cis}\phi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $n \in \mathbb{N}$. Wszystkie liczby zespolone w spełniające równanie $w^n = a$ są postaci

$$w_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\left(\frac{2k\pi + \phi}{n}\right) + +i\sin\left(\frac{2k\pi + \phi}{n}\right)\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Liczby te nazywamy *zespolonymi pierwiastkami stopnia n z liczby zespolonej a.*

Uwaga 1. Liczby w_k są wszystkie różne, więc każda liczba zespolona $a \neq 0$ ma dokładnie n różnych pierwiastków stopnia n.

Uwaga 2. Ze względu na niejednoznaczność pierwiastków zespolonych, **nie będziemy** stosować zapisu $\sqrt[n]{a}$ na oznaczenie którejkolwiek z liczb w_k.

Pierwiastki z jedności. Dla $a = 1$ otrzymujemy n różnych zespolonych pierwiastków z jedności stopnia n:

$$\varepsilon_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

---

1. Znajdź postać algebraiczną pierwiastków stopnia 3 z jedności (a) korzystając z ich postaci trygonometrycznej, (b) wyznaczając x, y z równości $(x + yi)^3 = 1$.

2. Naszkicuj na płaszczyźnie Gaussa: (a) pierwiastki z jedności stopnia $3, 4, 6, 8$; (b) pierwiastki stopnia 3 i 4 z liczby -1, (c) pierwiastki stopnia 3 z liczby $8i$.

3. Wyznacz liczbę pierwiastków ε_k z jedynki stopnia 600 takich, że $\varepsilon_k^6 = 1$.

4. Oblicz sumę i iloczyn wszystkich pierwiastków z jedności stopnia n.

5. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ i $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ oznaczają wszystkie zespolone pierwiastki z jedności stopnia n i $k \in \mathbb{N}$. Wyznac wartość sumy

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j^k.$$

6. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ i $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ oznaczają wszystkie zespolone pierwiastki z jedności stopnia n. Pokaż, że dla dowolnej liczby $z \in \mathbb{C}$ zachodzi równość

$$z = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Re}(\varepsilon_k \overline{z}) \cdot \varepsilon_k.$$

7. Rozwiąż równania

(a) $81(z + i)^4 = |z|^8$,

(b) $(z + 2)^6 = (z - 2)^6$,

(c) $(z + i)(\overline{z} - i)^2(iz - 1)^3 = 64$

8. Dla danej liczby naturalnej n wyznacz liczbę rozwiązań równania $z^n = \overline{z}$.

9. Dla liczby całkowitej dodatniej n niech $u_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Rozstrzygnij, dla jakich wartości n liczba $\frac{u_n - 1}{|u_n - 1|}$ jest zespolonym pierwiastkiem z jedności stopnia n.

10. Wykaż, że liczba $\xi = (2+i)/(2-i)$ nie jest pierwiastkiem z jedności jakiegokolwiek stopnia mimo, że $|\zeta| = 1$.

11. Niech $z \in \mathbb{C}$. Dla jakich liczb całkowitych n liczba $(z + i\overline{z})^n$ jest rzeczywista?

12. Rozstrzygnij, dla jakich liczb całkowitych n istnieje liczba rzeczywista a taka, że

$$|a - (1 + i)^n| = a.$$

13. Liczba zespolona $z \neq 0$ spełnia równość

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z + \frac{1}{z} + 1\right) = 1.$$

Dla danej liczby naturalnej $n > 1$ znajdź wartość wyrażenia

$$\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)\left(z^n + \frac{1}{z^n} + 1\right).$$

14. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 3$, $\varepsilon \neq 1$ jest pierwiastkiem z jedności stopnia n. Udowodnij, że

$$|1 - \varepsilon| > \frac{2}{n-1}.$$

15. Liczby zespolone $z_1, z_2, \ldots, z_n$ są wierzchołkami n-kąta foremnego o środku w 0. Udowodnij, że $z_k + z_l = z_m$ dla pewnych k, l, m wtedy i tylko wtedy, gdy $6 \mid n$.

16. Dane są różne liczby zespolone $z_1, z_2, \ldots, z_n$ takie, że $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n|$. Udowodnij równoważność warunków:

(i) liczby $z_1, z_2, \ldots, z_n$ są wierzchołkami n-kąta foremnego,

(ii) $z_1^n + z_2^n + \ldots + z_n^n = n(-1)^{n+1}z_1 z_2 \ldots z_n$.