Analiza matematyczna – klasa 1A-4

1. lekcja – 4.09.2019

Zadania różne

Umawiamy się, że liczby naturalne to $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$.

ZADANIA

1. Oblicz sumę kolejnych liczb naturalnych od 1 do 2019.
2. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n ułamek
$$\frac{21n+4}{14n+3}$$
jest nieskracalny.
3. Liczbę naturalną n zapisano w pozycyjnym systemie liczbowym o podstawie a jako 111. Udowodnij, że n nie jest kwadratem liczby naturalnej.
4. Niech n będzie liczbą naturalną. Która z liczb jest większa: $\sqrt{n}+\sqrt{n+2}$ czy $2\sqrt{n+1}$?
5. Liczby a i b są naturalne. Która z liczb jest większa, $a^a \cdot b^b$ czy $a^b \cdot b^a$?
6. Suma wszystkich dzielników liczby naturalnej a jest równa $2a$. Znajdź sumę odwrotności tych dzielników.
7. Pokaż, że
$$\frac{9}{100} < \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \ldots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{10}.$$
8. Wykaż, że suma odwrotności kolejnych liczb naturalnych od 1 do 4096 jest większa niż 7.
9. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją liczby naturalne k i l takie, że $k < l$ oraz
$$\frac{1}{n} = \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \ldots + \frac{1}{(l-2)(l-1)} + \frac{1}{(l-1)l}.$$

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

2 – 11.09.2019

Wyrażenia i tożsamości algebraiczne

1. Co to jest wyrażenie algebraiczne?

2. Co to jest tożsamość algebraiczna?

3. Jak można wykazać, że dana tożsamość algebraiczna jest prawdziwa lub fałszywa?

Tw. (Pierwsze trzy wzory skróconego mnożenia) Prawdziwe są następujące tożsamości:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{Wzór na kwadrat sumy,}$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad \text{Wzór na kwadrat różnicy,}$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \qquad \text{Wzór na różnicę kwadratów.}$$

Własności liczb rzeczywistych przydatne w rozwiązaniach niektórych zadań: Niech a i b to liczby rzeczywiste. Wówczas

(i) $a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

(ii) $a^2 + b^2 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ i $b = 0$.

ZADANIA:

1. Za pomocą wzorów na kwadrat sumy lub różnicy oblicz (w pamięci) 19^2, 52^2, 195^2, 107^2, 999^2.

2. Za pomocą wzoru na różnicę kwadratów oblicz iloczyny $18 \cdot 22$, $53 \cdot 47$, $495 \cdot 505$.

3. Rozwiń potęgi:

(a) $(x-5)^2$; (c) $(a+2b-3c)^2$; (e) $(2m-3n)^4$;

(b) $(a-\frac{7}{3})^2$; (d) $(\frac{2}{3}a-3b)^2$; (f) $(a+b+c)^2$.

4. Zamień poniższe iloczyny na sumy

(a) $(1+x-3x^2)(2+x^2)$;

(b) $(1+y+y^2)(y-y^2+y^3)$;

(c) $(2a-3b+4c)(4a-3b+2c)$;

(d) $(a-b+2c)(a+3b+2c)$;

(e) $(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)$;

(f) $(u+v+x+y)(u-v+x-y)$;

(g) $(x-2y+3z)(y-2z+3x)(z-2x+3y)$.

5. Zamień sumy na iloczyny wyrażeń algebraicznych:

(a) x^2-2x-3;

(b) $4y^2-2y-\frac{3}{4}$;

(c) $\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}x-5$;

(d) $ab+bc+ca+b^2$;

(e) $2ab-a+4b-2$;

(f) a^2-b^2+2b-1;

(g) $a^2+b^2+2ab+2bc+2ca$;

(h) $abc+ab+bc+ca+a+b+c+1$;

(i) $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc$.

6. Każda z liczb całkowitych a, b jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych. Wykaż, że liczba $a \cdot b$ też jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.

7. Znajdź wszystkie liczby pierwsze postaci $4^n - 1$, gdzie n jest liczbą naturalną.

8. Dla jakich liczb x, y zachodzi równość $(x+y)^2 = x^2 + y^2$?

9. Udowodnij, że wyrażenia algebraicznego $a^2 + b^2$ nie da się zapisać jako iloczynu wyrażeń postaci $(pa+qb)(ra+sb)$, gdzie p, q, r, s to pewne stałe liczbowe (stałe, czyli te same dla wszystkich a i b).

10. Wyznacz x, zamieniając odpowiednie wyrażenie algebraiczne na iloczyn, który jest równy zero lub wykaż, że taki x nie istnieje, zapisując odpowiednie wyrażenie algebraiczne jako sumę kwadratu i liczby dodatniej.

(a) $4x^2 = 9$;

(b) $x^2 + x = 2$;

(c) $x^2 + 1 = x$;

(d) $3x^2 = 7x + 6$;

(e) $4x^2 - 4x + 3 = 0$.

11. Wyznacz wszystkie pary liczb x, y, spełniające dane równania:

(a) $x^2+y^2-2x+2y+2=0$;

(b) $2x^2+y^2+4=2xy+4x$;

(c) $2x^2+2y^2+2xy+3=2x+2y$;

(d) $x^2+xy=2x+2y$;

(e) $3x^2+3y^2+2xy-4x+4y+4=0$.

12. * Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 - 4y + 7 = 0, \\ y^2 - 6z + 14 = 0, \\ z^2 - 2x - 7 = 0. \end{cases}$$

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

3 – 18.09.2019

Dowodzenie nierówności

Podstawowe własności nierówności
Poniżej a, b, c, d oznaczają liczby rzeczywiste.

(1) jeśli $a < b$ i $b < c$, to $a < c$;
(2) jeśli $a < b$, to $a + c < b + c$ i $a - c < b - c$;
(3) jeśli $a < b$ i $c > 0$, to $ac < bc$ i $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$;
(4) jeśli $a < b$ i $c < 0$, to $ac > bc$ i $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$;
(5) jeśli $a < b$ i $c < d$, to $a + c < b + d$
UWAGA: Nie jest prawdą, że jeśli $a < b$ i $c < d$, to $a - c < b - d$!!!
(6) jeśli $0 < a < b$ i $0 < c < d$, to $ac < bd$;
(7) jeśli $0 < a < b$ i $c < d < 0$, to $ad > bc$;
UWAGA: Nie jest prawdą, że jeśli $a < b$ i $c < d$, to $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$!!!
(8) jeśli $a > b > 0$, to $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;
(9) jeśli $a \neq 0$, to $a^2 > 0$;
(10) jeśli $a > 0, b > 0$ i $a^2 > b^2$, to $a > b$;
(11) jeśli $a > 0, b > 0$ i $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, to $a > b$.

---

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b spełnione są nierówności:

$$\max(a,b) \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \geqslant \min(a,b).$$

Kiedy każda z tych nierówności staje się równością?

2. Niech $x > 0$. Wykaż, że $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

3. Wykaż, że dla liczb nieujemnych a, b, c spełniona jest nierówność

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

4. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie i ich iloczyn jest równy 1. Wykaż, że

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n.$$

5. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c spełniona jest nierówność

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca.$$

6. Wykaż, że dla liczb dodatnich a, b prawdziwe są nierówności

(a) $\left(\frac{1}{a} + 3b\right)\left(\frac{1}{b} + 3a\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geqslant 24$;

(b) $(a+b) \cdot \sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqslant a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$;

7. Liczby a, b są dodatnie i $a + b = 1$. Wykaż, że

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}.$$

8. Liczby a, b, c są rzeczywiste. Udowodnij, że wśród trzech liczb

$$a - b^2, \quad b - c^2, \quad c - a^2$$

przynajmniej jedna jest mniejsza lub równa $\frac{1}{4}$.

9. Która z liczb a, b, c, d, e jest najmniejsza, a która największa, jeśli spełniają one wszystkie nierówności

$$a + b < c + d, \;\; b + c < d + e, \;\; c + d < e + a, \;\; d + e < a + b.$$

10. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają nierówności

$$a + b + c \leqslant 3d, \;\; b + c + d \leqslant 3a, \;\; c + d + a \leqslant 3b, \;\; d + a + b \leqslant 3c.$$

Wykaż, że $a = b = c = d$.

11. Udowodnij, że dla dowolnych liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Kiedy ta nierówność staje się równością?

12. Dla danej liczby naturalnej n rozstrzygnij, która liczba jest większa: $1 + 4^n + 9^n$ czy $2^n + 3^n + 6^n$.

13. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

14. Liczby a, b są dodatnie, natomiast m jest liczbą naturalną. Wykaż, że

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^m + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m \geqslant 2^{m+1}.$$

15. Załóżmy, że $a, b \geqslant 0$. Udowodnij nierówności

$$\frac{a+b}{1+a+b} \leqslant \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \leqslant \frac{2(a+b)}{2+a+b}.$$

16. Wykaż, że jeśli $0 \leqslant x \leqslant 1$ i $0 \leqslant y \leqslant 1$, to

$$\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \leqslant 1.$$

17. Udowodnij, że jeśli $x > 0$ i $y > 0$, to

$$\sqrt{xy} \geqslant \frac{x+y-\sqrt{x^2+y^2}}{2-\sqrt{2}}.$$

18. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{ab+ad+bc+cd}{a+b+c+d} \geqslant \frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d}.$$

19. Załóżmy, że $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > 0$. Udowodnij, że

$$\frac{x_1}{\sqrt{1}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Analiza matematyczna - klasa 1a4

4 – 24.09.2019

Ostatnie poprawki 26.09.2019

Przekształcenia algebraiczne, wzory dla trzecich potęg

Dla dowolnych liczb a, b

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{oraz} \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

---

1. Rozwiń potęgi:

(a) $\left(2x + \frac{y}{2}\right)^3$;
(b) $\left(\frac{2}{3}a + \frac{3}{2}b\right)^3$;
(c) $(x^2y - z^3)^3$;
(d) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3$;
(e) $(a+b+c)^3$;
(f) $(x+y-z)^3$;
(g) $\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)^3$.

2. Przedstaw wyrażenie w postaci sześcianu sumy lub różnicy dwóch wyrażeń:

(a) $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$;
(b) $x^3 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^5} - \frac{1}{x^9}$;
(c) $\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2y + 6xy^2 - 8y^3$;
(d) $x^6 - 3x^3 + 3 - \frac{1}{x^3}$.

3. Rozłóż na czynniki wyrażenia

(a) $a^3 + b^3$;
(b) $a^3 - b^3$;
(c) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$;
(d) $x^3 - xy^2 + x^2y - y^3$;
(e) $x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$;
(f) $a^3 + b^3 + 3ab - 1$;
(g) $a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2$.

4. Załóżmy, że $x + \frac{1}{x} = 3$. Oblicz $x^3 + \frac{1}{x^3}$, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ i $x^9 + \frac{1}{x^9}$.

5. Załóżmy, że $y - \frac{1}{y} = -\frac{1}{2}$. Oblicz $y^3 - \frac{1}{y^3}$ i $y^6 + \frac{1}{y^6}$.

6. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $8^n + 1$ jest złożona.

7. Załóżmy, że $x + y = a$ i $xy = b$. Wyraź za pomocą a i b wartości wyrażeń (gdy trzeba, zakładamy, że $x \neq 0$ i $y \neq 0$):

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad x^2 + y^2, \quad x^3 + y^3, \quad |x - y|, \quad |x^2 - y^2|, \quad x^4 + y^4$$

8. Załóżmy, że $x + y + z = a$, $xy + yz + zx = b$, $xyz = c$. Wyraź poprzez a, b, c wartości wyrażeń

(a) $x^2 + y^2 + z^2$,
(b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$,
(c) $x^3 + y^3 + z^3$,
(d) $(x+y)(y+z)(z+x)$,
(e) $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$,
(f) $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$.

9. Znajdź wszystkie liczby pierwsze, które są sumami dwóch sześcianów liczb naturalnych.

10. Wykaż, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb całkowitych jest wielokrotnością liczby 9.

11. Udowodnij nierówności między średnią arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną trzech liczb dodatnich x, y, z:

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}.$$

Kiedy te nierówności stają się równościami?

12. Liczby a, b, c są wszystkie różne. Wykaż, że $\sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{b-c} + \sqrt[3]{c-a} \neq 0$.

13. Rozłóż na czynniki wyrażenia

(a) $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$;
(b) $(a+2b-3c)^3 + (b+2c-3a)^3 + (c+2b-3a)^3$;
(c) $(x+y+z)^3 - (y+z-x)^3 - (z+x-y)^3 - (x+y-z)^3$.

14. Liczby a, b, c są różne od zera i $a + b + c = 0$. Znajdź wartość wyrażeń

(a) $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$;
(b) $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}$.

15. Liczby a, b, c są długościami boków trójkąta. Wykaż, że

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{2}} \geqslant \max(a, b, c).$$

16. Liczby całkowite k, l, m spełniają równość

$$(k-l)^2 + (l-m)^2 + (m-k)^2 = klm.$$

Wykaż, że liczba $k^3 + l^3 + m^3$ jest podzielna przez $k + l + m + 6$.

17. Niech x, y, z to liczby rzeczywiste. Wykaż, że

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \leqslant xyz$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $x + y + z \leqslant 0$.

Analiza matematyczna - klasa 1a4

5 – 10.10.2019

Tożsamość Sophie Germain

Dla dowolnych liczb rzeczywistych prawdziwe są tożsamości

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2)$$
$$a^4 + \frac{b^4}{4} = \left(a^2 - ab + \frac{b^2}{2}\right)\left(a^2 + ab + \frac{b^2}{2}\right)$$

ZADANIA:

1. Rozłóż na czynniki wyrażenia

(a) $a^8 + 4b^8$

(b) $a^8 - 16b^8$,

(c) $a^{12} - 4b^{12} + 4a^8b^4 - a^4b^8$.

2. Rozłóż liczby $7^4 + 4^5$ i $5^4 + 2^6 \cdot 3^4$ na czynniki pierwsze.

3. Czy liczba $2019^4 + 4^{2019}$ jest pierwsza?

4. Znajdź wszystkie liczby pierwsze postaci

(a) $n^4 + 4$, (b) $n^4 + 4^n$,

gdzie n jest liczbą naturalną.

5. Dla jakich liczb naturalnych n liczby

(a) $2^{2^n+2} + 1$ (b) $2^{2^n-2} + 1$

są złożone.

6. Uprość wyrażenie

$$\frac{\left(1^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(3^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left((2n-1)^4 + \frac{1}{4}\right)}{\left(2^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(4^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left((2n)^4 + \frac{1}{4}\right)}.$$

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

14.10.2019

Zadania treningowe przed powtórką 1. sprawdzianu

1. Rozłóż wyrażenia na czynniki:

(a) $a^2 + 2ac - b^2 + 2bc$,

(b) $a^3 - 8b^3 + 27c^3 + 18abc$,

(c) $4x^4 + 3x^2y^2 - y^4 - 4x^2 + y^2$ (*Wskazówka:* jeden z czynników to $2x + y$),

(d) $x^6 - y^6 + x^4y^2 - x^2y^4$,

(e) $2xyz + x^2y + yz^2 + z^2 - x^2$.

2. Rozwiąż równania

(a) $x^2 + y^2 + 13 = 4x + 6y$,

(b) $2x^4 + y^2 = 2x^2y$,

(c) $x^4 + 2x^3 + x^2 + x^2y^2 + 2xy^2 + y^2 = 0$.

3. Niech $0 < a \leqslant b < 1$. Wykaż, że

(a) $0 \leqslant \dfrac{b-a}{1-ab} \leqslant 1$,

(b) $0 \leqslant ab^2 - ba^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$.

4. Wykaż, że dla dowolnych nieujemnych liczb x, y, z prawdziwe są nierówności

(a) $xy + yz + zx \geqslant x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}$,

(b) $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant x\sqrt{y^2+z^2} + y\sqrt{x^2+z^2}$,

5. Liczby a, b są dodatnie. Udowodnij nierówności

(a) $a + b \leqslant \dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a}$,

(b) $a^2 + b^2 \leqslant \dfrac{a^3}{b} + \dfrac{b^3}{a}$.

6. Załóżmy, że $0 < b \leqslant a$. Udowodnij nierówności

$$\frac{(a-b)^2}{8a} \leqslant \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leqslant \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

7. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $a + b + c = 1$. Wykaż, że

$$ab + bc + ca \leqslant \frac{1}{3}.$$

8. Dana jest liczba rzeczywista $a \neq 0$ taka, że

$$\frac{1}{a^2} + a^2 - \frac{5}{4} = \frac{1}{a} + a.$$

Znajdź wartości wyrażeń $\dfrac{1}{a^3} + a^3$ i $\dfrac{1}{a^4} + a^4$.

9. Liczba $x \neq 0$ spełnia równość $\dfrac{1}{x} + x = -2$. Wyznacz wartość wyrażenia $\dfrac{1}{x^n} + x^n$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną.

10. Dane są różne od 0 liczby rzeczywiste x, y, z takie, że $x + y + z = 0$. Oblicz

(a) $\dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{zx}$,

(b) $\dfrac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$,

(c) $\dfrac{x^4 + y^4 + z^4}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$.

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

6 – 16.10.2019

Elementy logiki

Zmienna logiczna może przyjmować jedną z dwóch wartości: *prawda* (1) lub *fałsz* (0).

Wyrażenie logiczne składa się ze zmiennych logicznych i operacji logicznych przedstawionych w tabelce poniżej. Wyrażenie logiczne również może przyjmować wartość *prawda* lub *fałsz*, w zależności od wartości zmiennych logicznych, które w nim występują.

Operacje logiczne:

		negacja *nie p*	**koniunkcja** *p i q*	**alternatywa** *p lub q*	**implikacja** *z p wynika q*	**równoważność** *p wtw., gdy q*
p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \iff q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Kolejność wykonywania operacji w wyrażeniach złożonych jest taka jak kolejność odpowiednich kolumn w tabelce. Kolejność operacji można zmienić wstawiając w odpowiednich miejscach nawiasy. Nawiasów można także używać, aby poprawić czytelność wyrażeń. Nawiasów należy użyć w wyrażeniach niejednoznacznych z implikacją postaci $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$, $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$, itp.

Tautologią nazywamy wyrażenie logiczne, które przyjmuje wartość *prawda* niezależnie od wartości występujących w nim zmiennych logicznych. Przykłady tautologii to

- *prawo podwójnego przeczenia*: $\sim(\sim p) \iff p$,
- *prawa przemienności alternatywy*: $(p \vee q) \iff (q \vee p)$,
- *prawo idempotentności koniunkcji*: $(p \wedge p) \iff p$.

ZADANIA:

1. Które z dwuargumentowych operacji logicznych są (a) przemienne, (b) łączne?

2. Wykaż, że koniunkcja jest rozdzielna względem alternatywy i alternatywa jest rozdzielna względem koniunkcji.

3. Sprawdź, że następujące wyrażenia logiczne są tautologiami:

(a) *Prawo wyłączonego środka:* $p \vee \sim p$,

(b) *Prawo odrywania:* $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$,

(c) *Pierwsze prawo de Morgana:* $\sim(p \wedge q) \iff \big((\sim p) \vee (\sim q)\big)$,

(d) *Drugie prawo de Morgana:* $\sim(p \vee q) \iff \big((\sim p) \wedge (\sim q)\big)$,

(e) *Prawo przechodności implikacji:* $\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

4. Które dwuargumentowe operacje logiczne poza implikacją są przechodnie?

5. Zapisz alternatywę, implikację i równoważność tylko za pomocą koniunkcji i negacji.

6. Udowodnij, że implikacji nie da się zapisać tylko za pomocą alternatywy i koniunkcji.

7. Zapisz zaprzeczenia poniższych zdań dotyczących liczby całkowitej a:
(a) $-10 < a \leqslant 2019$, (b) $|a| < 50$, (c) $3 \mid a \vee 5 \nmid a$, (d) $x = 10 \vee x > 5$.

8. W 100-kartkowym zeszycie na 1. kartce jest napisane zdanie *W tym zeszycie dokładnie 1 zdanie jest fałszywe.*, na 2. kartce jest napisane zdanie *W tym zeszycie dokładnie 2 zdanie są fałszywe.*, itd, aż do ostatniej kartki, na której jest napisane zdanie *W tym zeszycie dokładnie 100 zdań jest fałszywych.* Czy wśród tych zdań są zdania prawdziwe. Jeśl tak, to które? (Zakładamy, że w zeszycie nie ma innych zdań oprócz wymienionych powyżej).

9. Na wyspie mieszkają tylko rycerze i oszuści. Rycerze zawsze mówią prawdę, oszuści zawsze kłamią. Podróżnik napotkał trzech mieszkańców wysypy i dwóch z nich zapytał, ilu rycerzy mu towarzyszy. Pierwszy odpowiedział, że ani jeden, drugi, że tylko jeden. Który z napotkanych mieszkańców jest rycerzem, a który oszustem?

10. W sądowej sprawie o kradzież konia jest 3 podejrzanych: A, B i C. Wiadomo, że dokładnie jeden z nich ukradł konia. B zeznał, że konia ukradł C. Zeznań A i C nie znamy. Ustalono jednak, że tylko jeden z podejrzanych zeznał prawdę i że to on ukradł konia. Kto ukradł konia?

11. O liczbach a, b, c, d, e wiadomo, że

(i) $(e > a) \Rightarrow \big((e > b) \vee (e < c)\big)$,

(ii) $(e \leqslant b) \Rightarrow (e < d)$,

(iii) $\big((e < d) \wedge (e > a)\big) \Rightarrow (e \geqslant c)$,

(iv) $\big((e < d) \wedge (e \leqslant b)\big) \Rightarrow (e > a)$.

Która z liczb jest większa: e czy b?

12. Sporządź tabelki wartości poniższych wyrażeń logicznych. Które z tych wyrażeń są tautologiami?

(a) $\big((p \wedge q) \vee (\sim p)\big) \Rightarrow q$,

(b) $(p \wedge q) \vee (q \Rightarrow p)$,

(c) $\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$,

(d) $\big((p \vee q) \wedge r\big) \iff \big((p \wedge r) \vee (q \wedge r)\big)$,

(e) $\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big) \iff \big((p \Rightarrow q) \Rightarrow r\big)$,

(f) $\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big) \iff \big(q \Rightarrow (p \Rightarrow r)\big)$.

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

7 – 23.10.2019

Zbiory i kwantyfikatory

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – zbiór liczb naturalnych,
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ – zbiór liczb całkowitych,
- $\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych,
- $\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych

Ponadto, stosuje się oznaczenia:

- $\mathbb{Z}_+$ – zbiór liczb całkowitych nieujemnych,
- $\mathbb{Z}_-$ – zbiór liczb całkowitych niedodatnich.

Podobnie definiuje się $\mathbb{Q}_+, \mathbb{Q}_-, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$.

Dopełnienie zbioru Jeżeli $A \subset \Omega$, to zbiór $A' = \Omega \setminus A$ nazywamy *dopełnieniem* zbioru A (w zbiorze Ω). Na przykład, dopełnieniem zbioru liczb wymiernych w zbiorze liczb rzeczywistych jest zbiór liczb niewymiernych.

Różnica symetryczna zbiorów: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Kwantyfikator ogólny. Zdania postaci *Dla każdego x ze zbioru X zachodzi p(x)*, np:
(a) *Dla każdej liczby nauturalnej x prawdziwa jest nierówność* $x \geqslant 1$,
(b) *Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi* $x = 0$ *lub* $x < 0$ *lub* $x > 0$
można zapisać jako

$$\text{(a)} \quad \forall_{x\in\mathbb{N}}\ x \geqslant 1, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}\ (x = 0 \lor x < 0 \lor x > 0).$$

$\forall$ nazywamy *kwantyfikatorem ogólnym.*

Kwantyfikator szczegółowy. Zdania postaci *Istnieje x ze zbioru X, dla którego zachodzi p(x)*, np:
(a) *Istnieje liczba naturalna x taka, że* $x > 2019$,
(b) *Istnieje liczba rzeczywista x taka, że* $x^2 = 2$
można zapisać jako

$$\text{(a)} \quad \exists_{x\in\mathbb{N}}\ x > 2019, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \exists_{x\in\mathbb{R}}\ x^2 = 2.$$

$\exists$ nazywamy *kwantyfikatorem szczegółowym.*

Jeżeli dwa kwantyfikatory ogólne lub dwa kwantyfikatory szczegółowe występują jeden po drugim, można zmienić ich kolejność, np.

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \forall_{n\in\mathbb{N}}\ (x > 1 \ \Rightarrow\ x^n > 1) \iff \forall_{n\in\mathbb{N}} \forall_{r\in\mathbb{R}}\ (x > 1 \ \Rightarrow\ x^n > 1)$$

$$\exists_{x\in\mathbb{R}} \exists_{n\in\mathbb{N}}\ (x^2 = n + 1 \land x > n) \iff \exists_{n\in\mathbb{N}} \exists_{x\in\mathbb{R}}\ (x^2 = n + 1 \land x > n).$$

Nie można zmienić kolejności kwantyfikatora ogólengo i szczególnego. Poniższe dwa zdania **nie są** równoważne:

$$\text{(i)} \quad \forall_{x\in\mathbb{R}} \exists_{n\in\mathbb{N}}\ x < n, \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \exists_{n\in\mathbb{N}} \forall_{x\in\mathbb{R}}\ x < n.$$

Zawsze prawdziwa jest jednak implikacja:

$$\Big(\exists_{x\in X} \forall_{y\in Y}\ p(x,y)\Big) \ \Rightarrow\ \Big(\forall_{y\in Y} \exists_{x\in X}\ p(x,y)\Big).$$

Prawa de Morgana: Jeżeli Ω jest zbiorem, a $p(x)$ to zdanie logiczne, którego wartość zależy od elementu $x \in \Omega$, to

$$\text{(i)} \ \sim\Big(\forall_{x\in\Omega}\ p(x)\Big) \iff \exists_{x\in\Omega} \sim p(x), \quad \text{(ii)} \ \sim\Big(\exists_{x\in\Omega}\ p(x)\Big) \iff \forall_{x\in\Omega} \sim p(x).$$

ZADANIA:

1. Zapisz różnicę symetryczną $A \triangle B$ dwóch zbiorów $A, B \subset \Omega$ za pomocą operacji dopełnienia, sumy i przecięcia zbiorów.

2. Niech $A, B \subset \Omega$. Zaznacz na diagramie
(a) zbiór elementów $x \in \Omega$, dla których prawdziwe jest zdanie $x \in A \ \Rightarrow\ x \in B$
(b) zbiór elementów $x \in \Omega$, dla których prawdziwe jest zdanie $x \in A \iff x \in B$

3. A, B, C oznaczają zbiory. Udowodnij następujące własności różnicy symetrycznej zbiorów:

(a) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$,
(b) $A \cap B = \emptyset \iff A \cup B = A \triangle B$,
(c) $A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$,
(d) $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$.

4. Zapisz zaprzeczenia poniższych zdań z kwantyfikatorami.

(a) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ 2 \mid n^2$
(b) $\exists_{n\in\mathbb{N}}\ n^n = 16\,777\,216$
(c) $\forall_{x\in\mathbb{R}} \exists_{n\in\mathbb{N}}\ x \neq 0 \ \Rightarrow\ x^2 > n$
(d) $\exists_{x\in\mathbb{R}} \forall_{n\in\mathbb{Z}}\ x > 0 \land x < n^2 - n + \frac{1}{20}$
(e) $\exists_{n\in\mathbb{N}} \forall_{x>0} \exists_{k\in\mathbb{N}}\ \sqrt[k]{x} < n$
(f) $\forall_{k\in\mathbb{N}} \exists_{x>0} \forall_{n\in\mathbb{Z}_+}\ (n + \frac{1}{100})^k \geqslant xn$
(g) $\exists_{q\in\mathbb{Q}} \forall_{x\in\mathbb{R}} \forall_{k\in\mathbb{Z}}\ q = xk \ \Rightarrow\ q = x \lor q = n$

Polecenie dodatkowe: Czy potrafisz rozstrzygnąć czy prawdziwe jest zdanie, czy jego zaprzeczenie?

5. Zapisz za pomocą kwantyfikatorów i działań logicznych zdanie *Liczba naturalna n jest pierwsza.*

6. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są podzbiorami zbioru Ω. Stosując rachunek zdań i kwantyfikatory udowodnij *prawa de Morgana* dla zbiorów:

(i) $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)' = A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_n'$

(ii) $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)' = A_1' \cup A_2' \cup \ldots \cup A_n'$

7. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są zbiorami. Udowodnij związki:

(a) $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) \subset (A_1 \setminus B_1) \cup \ldots \cup (A_n \setminus B_n)$,

(b) $(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \triangle (B_1 \cup \ldots \cup B_n) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup \ldots \cup (A_n \triangle B_n)$

(c) $(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \triangle (B_1 \cap \ldots \cap B_n) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup \ldots \cup (A_n \triangle B_n)$

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

8 – 30.10.2019

Podzbiory, iloczyn kartezjański

Definiowanie podzbiorów Jeżeli $A \subset X$ i element $x \in X$ jest elementem zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy prawdziwe jest zdanie $p(x)$, to zbiór A można zdefiniować w następujący sposób:

$$A = \{x \in X : p(x)\}.$$

Przykłady:

$$\mathbb{Z}_- = \{a \in \mathbb{Z} : a \leqslant 0\}, \qquad B = \{k \in \mathbb{Z} : 2 \mid k^2\}.$$

Do opisania elementów podzbiorów można także użyć wyrażeń algebraicznych, np:

$$B = \{k^2 + m^2 \in \mathbb{Z} : k, m \in \mathbb{Z}\}, \qquad \mathbb{Q} = \left\{\frac{k}{m} \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{Z} \wedge m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Przedziały liczb rzeczywistych. Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	przedział otwarty
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$	przedział domknięty
$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$	przedział lewostronnie otwarty i prawostronnie domknięty
$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$	przedział prawostronnie otwarty i lewostronnie domknięty
$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$	półprosta lewostronnie domknięta
$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$	półprosta lewostronnie otwarta
$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}$	półprosta prawostronnie domknięta
$(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$	półprosta prawostronnie otwarta

Iloczyn kartezjański zbiorów. A i B są dowolnymi zbiorami. *Iloczyn kartezjański zbiorów A i B* jest to zbiór wszystkich par **uporządkowanych** (a,b) takich, $a \in A$ oraz $b \in B$. Zbiór ten oznaczamy $A \times B$. Jeżeli zbiory A i B nie są równe, to $A \times B \neq B \times A$.

Przykłady:

$$\{1,2,3\} \times \{a,b\} = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$
$$\{1,2\} \times \{2,3\} = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\} \neq$$
$$\{2,3\} \times \{1,2\} = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$$

Analogicznie, iloczyn kartezjański trzech zbiorów A, B, C, oznaczany $A \times B \times C$ jest to zbiór wszystkich trójek uporządkowanych (a,b,c) takich, że $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. W podobny sposób można zdefiniować iloczyn kartezjański dowolnej skończonej liczby zbiorów.

Przyjmuje się, że $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

UWAGA: Pisemne zadanie domowe na 6 listopada to zadanie 7 (a) i (b) z kartki 7.

ZADANIA:

1. Zaznacz zbiór rozwiązań nierówności na prostej i zapisz go jako sumę rozłącznych przedziałów i półprostych

(a) $5x - 3 \geqslant -7$

(b) $|x| > 2$

(c) $|x+2| \leqslant 5$

(d) $\sqrt{x+1} < 3$

(e) $x(x-1) \geqslant 0$

(f) $(2x+1)^2 - \frac{1}{4} < 0$

(g) $(x+1)(x-2)(x-4) \geqslant 0$

(h) $(3x+5)(x+3)(x-2)^2(4-x) \leqslant 0$

(i) $(x^2-9)(x^2+9)(x+2) < 0$

(j) $(x^2+2x+2)(4x-5)(4-5x)(6x-5) \leqslant 0$

2. Co to za zbiory?

(a) $\{k \in \mathbb{Z} : 6 \mid (k+1)^2\}$

(b) $\{m - n \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{N}\}$

(c) $\left\{x \in \mathbb{R} : \forall_{q \in \mathbb{Q}}\ x - q > 0 \vee q - x > 0\right\}$

(d) $\left\{x \in \mathbb{R} : \exists_{n \in \mathbb{N}}\ -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\}$

(e) $\left\{x \in \mathbb{R} : \forall_{n \in \mathbb{N}}\ -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\}$

(f) $\left\{x \in \mathbb{R} : \exists_{q \in \mathbb{Q}}\ \forall_{a > 0}\ -a \leqslant x - q \leqslant a\right\}$

(g) $\left\{x \in \mathbb{R} : \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ \exists_{a \in (0,1)}\ x = k + a\right\}$

(h) $\left\{x \in \mathbb{R} : \forall_{n \in \mathbb{N}}\ \exists_{k \in \mathbb{N}}\ kx > n\right\}$

(i) $\left\{x \in \mathbb{R} : \exists_{k \in \mathbb{N}}\ \forall_{n \in \mathbb{N}}\ kx > n\right\}$

3. Niech $A = \{1,2,3\}$ i $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Ile elementów mają zbiory $A \times B$, $B \times A$ i $A \times B \times A$? Wypisz wszystkie elementy zbioru $(B \cap \{\beta, \delta, \varepsilon\}) \times A$.

4. Zaznacz na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ zbiory

(a) $(-1,2) \times [1,2]$

(b) $[-2,3) \times (-3,2]$

(c) $(-5,+\infty) \times [-3,4]$

(d) $(\mathbb{R} \times \{2\}) \cap ([1,3] \times (0,+\infty))$

(e) $\big((-1,2)\times(-\infty,1)\big)\cup\big((-1,2)\times(1,+\infty)\big)$

(f) $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}])$

(g) $\big(\mathbb{Z}\times(-9,9]\big)\cap\big((-9,9]\times\mathbb{Z}\big)$

5. Zaznacz w układzie współrzędnych (czyli na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$) zbiory

(a) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|\leqslant 1\}$

(b) $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |xy|=1\}$

(c) $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\in\mathbb{Z}\}$

(d) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2<y^2\}$

(e) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 1\}$

(f) $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+(y+1)^2=4\}$

(g) $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq 0\wedge -\frac{1}{y}\leqslant x\leqslant\frac{1}{y}\}$

(h) $H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \exists_{(k,l)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\ \exists_{a\in(0,\frac{1}{4})}\ 0<(x-k)^2+(y-l)^2\leqslant a\}$

(i) $I=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \exists_{(k,l)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\ \exists_{a\in(0,2)}\ 0<(x-k)^2+(y-l)^2\leqslant a\}$

6. Niech A,B,C,D będą dowolnymi zbiorami. Udowodnij równości

(a) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$,

(b) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$,

(c) $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$,

(d) $(A\times B)\setminus(C\times D)=\big((A\setminus C)\times B\big)\cup\big((A\cap C)\times(B\setminus D)\big)$.

7. Niech A,B,C,D będą dowolnymi zbiorami. Czy zawsze zachodzi równość

$$(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)?$$

Jeśli równość nie zachodzi, to czy zbiór z lewej strony jest zawarty w zbiorze z prawej strony lub na odwrót?

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

2.11.2019

Zadania treningowe przed 2. sprawdzianem

Ostatnie poprawki 3.11.2019 (zad. 6)

1. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ liczba $n^9 - 3n^4 + n^3 + 1$ jest iloczynem trzech różnych liczb naturalnych większych od 1, z których jedna jest kwadratem.

2. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba $4n^8 + 17n^4 + 4$ jest iloczynem 4 różnych liczb naturalnych większych od 1.

3. Rozłóż na czynniki pierwsze liczbę $3^8 + 2^{14}$.

4. Rozstrzygnij, czy podane zdania są tautologiami:

(a) $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \vee r)$

(b) $(p \iff q) \wedge (q \Rightarrow r) \iff (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

5. Agent Tajny ma dwóch informatorów. Każdy informator albo zawsze kłamie, albo zawsze mówi prawdę. Każdemu z informatorów Agent Tajny zadał dwa pytania:

- *Czy ten drugi informator jest kłamcą?*
- *Czy, jeśli ty jesteś kłamcą, to drugi informator nie jest kłamcą?*

Czy na podstawie uzyskanych odpowiedzi Agent Tajny może stwierdzić, który z informatorów mówi prawdę, a który kłamie? (Jest też możliwe, że obaj kłamią lub obaj mówią prawdę.)

6. A, B i C to zbiory. Udowodnij, że

(a) $(A \setminus B) \triangle (B \setminus C) \triangle (C \setminus A) = (B \setminus A) \triangle (A \setminus C) \triangle (C \setminus B)$

(b) $(A \cup B) \triangle (B \cup C) \triangle (C \cup A) = (A \cap B) \triangle (B \cap C) \triangle (C \cap A)$

(c) $\big(A \triangle (B \cap C)\big) \cap \big(B \triangle (C \cap A)\big) \cap \big(C \triangle (A \cap B)\big) =$
$= \big((A \triangle B) \cap C\big) \cup \big((B \triangle C) \cap A\big) \cup \big((C \triangle A) \cap B\big)$

7. Zapisz zaprzeczenia poniższych zdań z kwantyfikatorami i rozstrzygnij, czy prawdziwe jest zdanie, czy jego zaprzeczenie:

(a) $\forall_{k \in \mathbb{N}} \exists_{a \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad kn > a \wedge k \leqslant an$

(b) $\exists_{q \in \mathbb{Q}} \forall_{k \in \mathbb{Z}} \exists_{n \in \mathbb{N}} \quad q \leqslant \dfrac{k}{n} \Rightarrow k > n$

W ramach treningu warto także robić zadania i przykłady z kartek 5 - 8, których nie omawialiśmy na lekcji.

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

9 – 20.11.2019 – Zasada indukcji

---

1. Dla $n \in \mathbb{N}$ znajdź wzór na sumę pierwszych n liczb naturalnych nieparzystych.

Symbole sumy i iloczynu. Jeżeli $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są liczbami rzeczywistymi oraz $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n, \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Zasada indukcji. Dla $n \in \mathbb{N}$ niech T_n oznacza zdanie, które, w zależności od n, może być prawdziwe lub fałszywe.

Jeżeli spełnione są oba warunki:
(i) prawdziwe jest zdanie T_1 (baza indukcji)
(ii) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad T_n \quad \Rightarrow \quad T_{n+1}$ (krok indukcyjny)
to dla każdej liczby naturalnej n zdanie T_n jest prawdziwe.

Uwaga: Bazą indukcji może być także zdanie T_k, gdzie k jest pewną liczbą całkowitą. Wówczas krok indukcyjny polega na udowodnieniu dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant k$ implikacji $T_n \quad \Rightarrow \quad T_{n+1}$. Wówczas zadanie T_n jest prawdziwe dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant k$.

---

2. Za pomocą zasady indukcji wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są równości:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$,

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$,

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$,

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \prod_{j=k}^{k+3} \frac{1}{j} = \frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$,

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sqrt{n+1} - 1$,

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k = (n+1)! - 1$,

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$,

(j) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ dla $n \geqslant 2$,

(k) $\displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n} k = 2^n \cdot \prod_{k=1}^{n} (2k-1)$.

Czy potrfisz udowodnić niektóre z powyższych równości w inny sposób?

3. Znajdź i udowodnij wzór na sumę pierwszych n liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1.

4. Znajdź i udowodnij wzory na sumy

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2$, (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$.

5. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n i liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest tożsamość

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Natomiast jeśeli liczba n jest nieparzysta, to prawdziwa jest tożsamość

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

6. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

(a) $6 \mid n^3 + 5n$,
(b) $9 \mid 4^n + 15n - 1$,
(c) $3 \mid 10^n + 4^n - 2$,
(d) $11 \mid 2^{6n+1} + 3^{2n+2}$,
(e) $37 \mid 1000^n - 1$,
(f) $13 \mid 1000^n + (-1)^{n+1}$,
(g) $41 \mid 5 \cdot 7^{2(n+1)} + 2^{3n}$,
(h) $10 \mid 2^{(2^{n+1})} - 6$.

7. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba $\dfrac{n^3}{6} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{3}$ jest całkowita.

8. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba $\dfrac{n^4}{24} + \dfrac{n^3}{4} + \dfrac{11n^2}{24} + \dfrac{n}{4}$ jest całkowita.

9. Niech a_n to liczba naturalna, której zapis dziesiętny składa się z n jedynek. Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}.$$

10. Udowodnij, że n prostych dzieli płaszczyznę na nie więcej niż 2^n obszarów.

11. Na ile obszarów dzieli płaszczyznę n okręgów narysowanych tak, że każde dwa mają 2 punkty wspólne i żadne trzy nie mają puktu wspólnego?

12. Na płaszczyżnie narysowano n prostych w taki sposób, że żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Udowodnij, że proste te dzielą płaszczyznę na $(n^2 + n + 2)/2$ obszarów.

13. Udowodnij, że wśród obszarów na jakie dzieli płaszczyznę n prostych, jest co najwyżej $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ obszarów ograniczonych.

14. Z tablicy o wymiarach 2^n na 2^n usunięto jedno pole o wymiarach 1 na 1. Udowodnij, że pozostałą część tablicy można pokryć nie zachodzącymi na siebie płytkami w kształcie litery L, składającymi się z 3 kwadratów.

15. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to zbiory. Udowodnij, że zbiór $A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n$ składa się z tych elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, które należą do nieparzystej liczby zbiorów A_k.

16. Agent Tajny dostał zadanie rozpracowania mafii handlującej dowodami fałszywych twierdzeń matematycznych. W tym celu organizuje on siatkę n informatorów stosując następującą zasadę: dla dowolnych dwóch różnych informatorów pierwszy przekazuje informacje drugiemu albo drugi pierwszemu. Udowodnij, że pewien informator będzie mógł otrzymywać informacje od pozostałych bezpośrednio lub z udziałem tylko jednego pośrednika. (Nie wymagamy, aby pośrednik był zawsze ten sam!)

17. (*) Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $2^{(2^n)} - 1$ ma co najmniej n różnych dzielników pierwszych.

18. (*) Na płaszczyżnie narysowano $2n$ ($n \geqslant 2$) punktów w taki sposób, że żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Następnie narysowano $n^2 + 1$ odcinków, z których każdy łączy pewne 2 z tych punktów. Udowodnij, że pewne trzy z tych odcinków są bokami trójkąta.

19. (*) Udowodnij, że każdą liczbę naturalną n można jednoznacznie zapisać jako sumę

$$n = \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot j!,$$

gdzie k jest liczbą naturalną i a_j to liczby całkowite takie, ża $0 \leqslant a_j \leqslant j$ dla $j = 1, 2, \ldots, k$.

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

10 – 27.11.2019 – Zasada indukcji i nierówności

---

1. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

$$\sqrt{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}.$$

2. Wykaż, że dla $n \in \mathbb{N}$ i $a, b > 0$ zachodzi nierówność

$$(a+b)^n \leqslant 2^{n-1}(a^n + b^n).$$

3. Znajdź wszystkie liczby naturalne n spełniające nierówność

(a) $2^n > n^2$ (b) $n! > n^3$ (c) $3^n > (n+1) \cdot 2^n$ (d) $2^{n+1}(n!)^2 < (2n)!$

4. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

(a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2}$

(b) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{7}{12}$

5. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{3n}{2n+1} \leqslant 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

6. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2^n - 1} \frac{1}{k} \leqslant 1.$$

7. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

(a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1$

(b) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > \frac{13}{12}$

8. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$$

9. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

$$2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \leqslant 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n}} < 3.$$

10. (*) Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

11. Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą (czyli $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, itd.) Udowodnij, że $p_n > 3n$ dla $n \geqslant 12$.

Tw. 1 (Nierówność Bernoulliego). Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ i liczby rzeczywistej $x > -1$ i $x \neq 0$ prawdziwa jest nierówność

$$(1+x)^n > 1 + nx.$$

Uwaga: Jeśli $n \in \mathbb{N}$ i $x > -1$, to prawdziwa jest nierówność $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

Tw. 2 (Nierówność Weierstrassa). Dla liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n > -1$, które wszystkie są tego samego znaku, prawdziwa jest nierówność

$$(1+x_1) \cdot (1+x_2) \cdot \ldots \cdot (1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

---

12. Udowodnij, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ i $x > -1$, to $\sqrt[n]{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{n}$.

13. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

(a) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2$, (b) $\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2-n} \geqslant 2n - 1$, (c) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+2n} < \frac{1}{n+3}$

14. Udowodnij, że dla $n \in \mathbb{N}$

(a) $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \geqslant 1 + \sqrt{n}$,

(b) $\prod_{k=n}^{2n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \geqslant \frac{19}{12}$.

(c) $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \geqslant 2\sqrt{n+1} - 1$,

15. Udowodnij, że jeśli $a_1, a_2, \ldots, a_n > 1$, $n \geqslant 2$, to

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n > a_1 + a_2 + \ldots + a_n - n + 1.$$

16. Liczby a i b są dodatnie, n jest liczbą naturalną. Znajdź najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$\left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right)^n + \left(1 + \frac{a-b}{a+b}\right)^n.$$

17. Udowodnij, że dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ i $a > 0$

$$\left(1 - \frac{1}{1+na}\right)^n < 1 - \frac{1}{a+1}.$$

18. Dla $n \in \mathbb{N}$ udowodnij nierówności

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{oraz} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \cdot \frac{n+1}{n+2} < 3.$$

19. Dla danej liczby naturalnej n rozstrzygnij, która z liczb jest większa
(a) n^n czy $(n+1)^{n-1}$, (b) n^{n+1} czy $(n+1)^n$.

20. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

(a) jeśli $x > 0$, to $(1+x)^n \geqslant 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2}x^2$;

(b) jeśli $x > -1$, to $(1+x)^n \geqslant 1 + nx + (n-1)x^2$.

21. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność $\sqrt[n]{n} \leqslant 1+\sqrt{\dfrac{2}{n}}$.

22. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

23. Wykaż, że

$$\forall_{x>1} \forall_{k\in\mathbb{N}} \exists_{c>0} \forall_{n\in\mathbb{N}} \quad x^n \geqslant cn^k.$$

24. (*) Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) < 3.$$

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

11 – 12.12.2019 – Zasada indukcji zupełnej

Twierdzenie (Zadada indukcji zupełnej / silna indukcja). Dla każdej liczby naturalnej n dane jest pewne zdanie T_n. Jeżeli

(i) zdanie T_1 jest prawdziwe

oraz

(ii) dla każdej liczby naturalnej k z prawdziwości zdań $T_1, T_2, \ldots, T_k$ wynika prawdziwość zdania T_{k+1}

to każde ze zdań T_n jest prawdziwe.

---

1. Udowodnij, że jeśli n jest liczbą całkowitą większą od 3, to kwotę n złotych można wypłacić monetami 2 i 5 złotowymi.

2. Dana jest liczba rzeczywista x taka, że liczba $x + \dfrac{1}{x}$ jest całkowita. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $x^n + \frac{1}{x^n}$ też jest całkowita.

3. W każde pole tabeli o 3 wierszach i n kolumnach wpisano literę α, β lub γ, przy czym każdą z liter wpisano w dokładnie n pól. Udowodnij, że można tak poprzestawiać litery w każdym wierszu, aby w każdej kolumnie znalazły się trzy różne litery.

4. Wierzchołki n-kata wypukłego pomalowano 3 różnymi kolorami, przy czym każdy kolor został użyty do pomalowania co najmniej jednego wierzchołka oraz każde dwa kolejne wierzchołki pomalowano różnymi kolorami. Udowodnij, że wielokąt można podzielić przekątnymi na trójkąty w taki sposób, że wierzchołki każdego trójkąta będą pomalowane na różne kolory.

5. Udowodnij, że każdą liczbę naturalną można zapisać jako sumę różnych potęg całkowitych nieujemnych liczby 2.

6. Udowodnij, że każda liczba naturalna $n \geqslant 2$ jest iloczynem (jednej lub więcej) liczb pierwszych.

7. Znajdź wszystkie liczby naturalne n o własności, że grupę składającą się z n osób można podzielić na zespoły cztero- i pięcioosobowe.

8. **Liczby Fibonacciego.** Niech $f_1 = f_2 = 1$ i dla $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

(a) Udowodnij, że $f_n \leqslant 2^{n-1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

(b) Znajdź jak największą liczbę $a > 0$ taką, że $f_n \geqslant a \cdot (\frac{3}{2})^n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

(c) Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi wzór

$$f_{n+2} = 1 + \sum_{k=1}^{n} f_n.$$

(d) Udowodnij, że każdą liczbę naturalną można zapisać jako sumę różnych liczb Fibonacciego.

(e) (*) Udowodnij, że każdą liczbę naturalną n można zapisać na dokładnie jeden sposób jako

$$N = \sum_{j=1}^{m} f_{i_j}, \quad \text{przy czym } i_1 < i_2 < \ldots < i_m \text{ oraz } i_j - i_{j-1} \geqslant 2.$$

(f) (**Wzór Bineta**) Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$f_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

9. (*) Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje n różnych dzielników liczby $n!$, których suma jest równa n.

10. (*) Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i $y_1, y_2, \ldots, y_m$ to liczby naturalne takie, że

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_m < nm.$$

Udowodnij, że z każdej z sum $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ i $y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ można usunąć część wyrazów (ale nie wszystkie) tak, że sumy pozostałych wyrazów też będą równe.

11. (*) **Twierdzenie Picka.** Punkt w kartezjańskim układzie współrzędnych na płaszczyźnie nazywamy *punktem kratowym*, jeżeli obie jego współrzędne są liczbami całkowitymi.

Załóżmy, że wszystkie wierzchołki pewnego wielokąta W na płaszczyźnie są punktami kratowymi. Niech I oznacza liczbę punktów kratowych leżących we wnętrzu wielokąta W i B oznacza liczbę punktów kratowych na brzegu wielokąta W. Udowodnij, że pole powierzchni wielokąta W jest równe

$$I + \frac{B}{2} - 1.$$

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

12 – 18.12.2019 – Zasada szufladkowa Dirichleta

Twierdzenie 1. Niech $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $n+1$ przedmiotów rozmieszczamy w n szufladach, to w jednej z szuflad znajdą się co najmniej 2 przedmioty.

Twierdzenie 2. Niech $k, n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $kn + 1$ przedmiotów rozmieszczamy w n szufladach, to w jednej z szuflad znajdzie się co najmniej $k + 1$ przedmiotów.

1. Udowodnij, że w grupie 13 osób zawsze będę dwie obchodzące urodziny w tym samym miesiącu.

2. Zakładając, że Warszawa ma co najmniej półtora miliona mieszkańców i każdy mieszkaniec ma nie więcej niż 400 tysięcy włosów na głowie, wykaż, że pewnych czterech mieszkańców Warszawy ma tyle samo włosów na głowie.

3. Wykaż, że wśród dowolnych $n + 1$ liczb całkowitych znajdą się dwie, których różnica jest podzielna przez n.

4. Na przyjęciu jest $n \geqslant 2$ gości. Udowodnij, że pewne dwie osoby mają taką samą liczbę znajomych wśród osób będących na przyjęciu.

5. Udowodnij, że każdy zbiór składający się z n różnych liczb całkowitych zawiera niepusty podzbiór, którego suma elementów jest podzielna przez n.

6. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ wybrano $n+1$ róznych liczb. Wykaż, że z tych $n+1$ liczb można wybrać trzy liczby a, b, c (nie muszą być parami różne) takie, że $a = b + c$.

7. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ wybrano $n + 1$ liczb. Udowodnij, że jedna z wybranych liczb jest dzielnikiem innej.

8. W trójkącie równobocznym o boku 4 rozmieszczono 17 punktów. Udowodnij, że odległość pewnych dwóch z nich nie przekracza 1.

9. Każdy punkt na okręgu pomalowano jednym z dwóch kolorów. Udowodnij, że pewien trójkąt równoramienny wpisany w ten okrąg ma wszystkie wierzchołki tego samego koloru.

10. Liczba naturalna n nie jest podzielna przez 2 i 5. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele wielokrotności liczby n, których zapis dziesiętny składa się z samych cyfr 1.

11. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba zapisana w systemie dziesiętnym przy pomocy zer i jedynek, która dzieli się przez n.

12. Liczby od 1 do 101 zapisano w dowolnej kolejności. Wykaż, że można skreślić 90 z nich tak, że pozostałe 11 będzie ustawione w porządku rosnącym lub malejącym.

13. Na płaszczyźnie wybrano 5 punktów kratowych. Wykaż, że 2 z nich są końcami odcinka, którego środek jest punktem kratowym.

14. W 3-wymiarowym układzie współrzędnych danych jest 9 punktów kratowych (o wszystkich współrzędnych całkowitych). Wykaż, że pewne dwa z nich są końcami odcinka, którego środek też jest punktem kratowym.

15. Wewnątrz kwadratu o polu 1 znajduje się 9 punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Udowodnij, że pewne 3 z tych punktów są wierzchołkami trójkąta o polu nie większym niż $\frac{1}{8}$.

16. Udowodnij, że każdy wielościan wypukły ma co najmniej 2 ściany o tej samej liczbie boków.

17. Wewnątrz kwadratu o polu 1 obrano 51 punktów. Wykaż, że pewne 3 z nich leżą w kole o promieniu $\frac{1}{7}$.

18. W prostokącie o bokach długości 3 i 4 rozmieszczono 6 punktów. Udowodnij, że pewne 2 z tych punktów są odległe od siebie o nie więcej niż $\sqrt{5}$.

19. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z dwóch kolorów. Udowodnij, że istnieje prostokąt o wszystkich wierzchołkach tego samego koloru.

20. Każde dwa wierchołki sześciokąta foremnego połączono odcinkiem zielonym lub czerwonym. Wykaż, że pewne trzy wierzchołki tego sześciokąta są wierzchołkami trójkąta o bokach tego samego koloru.

21. Każde dwa wierzchołki 17-kąta foremnego połączono odcinkiem pomalowanym na jeden z trzech kolorów. Wykaż, że pewne trzy odcinki tego samego koloru są bokami trójkąta.

22. Wybrano 20 różnych liczb naturalnych mniejszych od 70. Wykaż, że wśród wszystkich różnic par tych liczb są co najmniej 4 równe.

23. W każde pole tabeli $n \times n$ wpisano jedną z liczb $-1, 0, 1$, a następnie dodano do siebie liczby z każdego wiersza, z każdej kolumny i z każdej z przekątnych. Udowodnij, że pewne 2 z otrzymanych sum są równe.

24. W turnieju bierze udział n drużyn i każde dwie rozgrywają nie więcej niż jeden mecz. Wykaż, że w dowolnym momencie turnieju znajdą się dwie drużyny, które rozegrały tę samą liczbę meczów.

25. W turnieju bierze udział $n \geqslant 3$ drużyn i każda rozegrała z każdą dokładnie jeden mecz kończący się wycięstwem jednej z drużyn oraz pewne dwie drużyny wygrały tę samą ilość meczów. Udowodnij, że są pewne trzy drużyny A, B, C takie, że A wygrała z B, B wygrała z C i C wygrała z A.

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

13 – 8.01.2020 – Liczby wymierne i niewymierne

Tw. Niech $k, n \in \mathbb{N}$. Liczba $\sqrt[k]{n}$ jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba naturalna m taka, że $n = m^k$.

---

1. Liczba $\frac{x}{y} \neq \frac{1}{2}$ jest wymierna. Udowodnij, że liczba $\frac{2x^2+3xy-2y^2}{2xy-y^2}$ też jest wymierna.

2. Liczby a^5 i a^7 są wymierne. Udowodnij, że liczba a jest wymierna.

3. Dana jest liczba $t \in \mathbb{R}$ taka, że liczby $\frac{t^2-1}{t^2+1}$ i $\frac{2t}{t^2+1}$ są wymierne. Udowodnij, że liczba t jest wymierna.

4. Dane są różne liczby rzeczywiste a, b takie, że liczby $a-b$ i $\frac{a}{b}$ są wymierne. Wykaż, że liczby a i b też są wymierne.

5. Dane są trzy różne liczby wymierne a, b, c. Udowodnij, że liczba

$$\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}$$

jest wymierna

6. Dane są liczby wymierne a, b takie, że $a+b \neq 0$ i liczba $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ jest wymierna. Udowodnij, że liczby $\sqrt[3]{a}$ i $\sqrt[3]{b}$ są wymierne.

7. Liczby x, y, z i $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ są wymierne. Udowodnij, że liczby $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ są wymierne.

8. Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a+b=1$ i liczby a^3 i b^3 są wymierne. Udowodnij, że liczby a i b też są wymierne.

9. Udowodnij, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ jest niewymierna.

10. Usuń niewymierność z mianownika ułamka:

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$,

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}+3\sqrt{6}}$,

(c) $\frac{1}{\sqrt{5}+2\sqrt{7}}$,

(d) $\frac{1}{4\sqrt{3}-2\sqrt{5}}$,

(e) $\frac{1}{1+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{10}}$,

(f) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$,

(g) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+1}$,

(h) $\frac{1}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}$,

(i) $\frac{1}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}}$,

(j) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$,

(k) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$,

(l) $\frac{1}{\sqrt[4]{4}-2\sqrt[4]{6}+2\sqrt[4]{9}}$,

(m) $\frac{1}{1+2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}}$

11. Rozstrzygnij, czy podana liczba jest wymierna:

(a) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-2$,

(b) $\sqrt{32-10\sqrt{7}}-\sqrt{7}$,

(c) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$,

(d) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$,

(e) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$,

(f) $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

12. Oblicz sumy

(a) $\sum_{n=1}^{2020}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$,

(b) $\sum_{n=1}^{2020}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{(n+1)^2}}$,

(c) $\sum_{n=1}^{2020}\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}}$.

13. Liczba rzeczywista x spełnia równanie $x^5+x=10$. Udowodnij, że x jest niewymierna.

14. Wykaż, że jeśli liczba postaci $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$, jest wymierna, to $a=b=0$.

15. Czy istnieją trzy punkty płaszczyzny o współrzędnych postaci $a+b\sqrt[3]{2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$, o własności, że co najmniej jedna z odległości dowolnego punktu płaszczyzny od jednego z tych punktów jest liczbą wymierną?

16. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Wykaż, że liczba

$$\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\ldots+\sqrt[n-1]{n-1+\sqrt[n]{n}}}}$$

jest niewymierna.

17. Wykaż, że jeśli liczba rzeczywista $x \neq 0$ jest postaci

$$x = a+b\sqrt{2}, \qquad \text{gdzie } a, b \in \mathbb{Q},$$

to liczba $1/x$ też jest takiej postaci.

18. Wyznacz wszystkie liczby wymierne postaci

$$x = a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}, \qquad \text{gdzie } a, b, c \in \mathbb{Q} \qquad (1)$$

Wykaż, że jeśli liczba rezcywista $x \neq 0$ jest postaci (1), to liczba $1/x$ też jest takiej postaci.

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

14 – 15.01.2020 – Nierówności między średnimi

Definicja. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

- liczbę $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ nazywamy *średnią arytmetyczną* liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- dla $a_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, liczbę $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ nazywamy *średnią geometryczną* liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- dla $a_k \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, liczbę $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$ nazywamy *średnią harmoniczną* liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Twierdzenie (nierówność Cauchy'ego). Dla liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Pierwszy dowód nierówności Cauchy'ego wykorzystuje następujący fakt:

Lemat. Jeżeli $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ i $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$, to $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n$.

Drugi dowód nierówności Cauchy'ego można przeprowadzić stosując tzw. *indukcję Cauchy'ego*: twierdzenie T_n, gdzie $n \in \mathbb{N}$ jest prawdziwe, jeżeli

- prawdziwe jest twierdzenie T_1,
- dla każdego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest implikacja $T_n \quad\Rightarrow\quad T_{2n}$,
- dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ prawdziwa jest implikacja $T_n \quad\Rightarrow\quad T_{n-1}$.

Wniosek Dla liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prawdziwe są nierówności

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

---

1. Udowodnij nierówność Bernoulliego za pomocą nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną.

2. Dana jest liczba naturalna n. Udowodnij, że
$$n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

3. Liczby a, b, c są dodatnie. Udowodnij, że
$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

4. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij nierówność
$$\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right)^n \geqslant (n!)^2.$$

5. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$. Udowodnij, że $abc \leqslant 1$.

6. Liczby a, b, c, d są dodatnie. Udowodnij nierówność
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a+b+c+d}.$$

7. Pokaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c
$$8(a+b+c)^3 \geqslant 27(a+b)(b+c)(c+a).$$

8. Suma liczb dodatnich a, b, c jest równa 1. Udowodnij nierówności

   (a) $\left(\dfrac{1}{a} + 1\right)\left(\dfrac{1}{b} + 1\right)\left(\dfrac{1}{c} + 1\right) \geqslant 64$

   (b) $\left(\dfrac{1}{a} - 1\right)\left(\dfrac{1}{b} - 1\right)\left(\dfrac{1}{c} - 1\right) \geqslant 8$

9. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie. Udowodnij, że
$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n.$$

10. Liczby a, b, c są dodatnie. Udowodnij nierówność
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

11. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ spełniona jest nierówność
$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} \leqslant \sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots (a_n + b_n)}.$$

12. Suma liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wynosi 1. Udowodnij nierówność
$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i + \frac{1}{x_i}\right)^2 \geqslant \frac{(1+n^2)^2}{n}.$$

13. Dane są liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ wszystkie większe od -1 i takie, że $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n > 0$. Udowodnij, nierówność
$$\frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_2 + 1} + \ldots + \frac{1}{a_n + 1} \geqslant \frac{n^2}{S + n}.$$

14. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ są dodatnie. Udowodnj nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i b_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \geqslant 4n^2.$$

15. Suma liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest równa 1. Udowodnij, że

$$\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{a_2} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{a_n} - 1\right) \geqslant (n-1)^n.$$

16. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} + \frac{2}{a+b} \geqslant \frac{9}{a+b+c}.$$

17. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność

$$n \cdot \sqrt[n]{n+1} < n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

18. Niech $a > 1$ i $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij nierówność

$$a^n - 1 > n\left(\sqrt{a^{n+1}} - \sqrt{a^{n-1}}\right).$$

19. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunek $abcd = 1$. Udowodnij, że

$$\frac{a}{b+c+d+1} + \frac{b}{c+d+a+1} + \frac{c}{d+a+b+1} + \frac{d}{a+b+c+1} \geqslant 1.$$

20. Stosując indukcję Cauchy'ego udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant \left(1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\right)^n.$$

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

15 – 29.01.2020 – Nierówności między średnimi II

Tw. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są nieujemne. Jeżeli

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

to $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

---

1. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie i

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) = n^2.$$

Wykaż, że $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

2. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}.$$

3. Liczby a, b, c są dodatnie i $abc = 1$. Wykaż, że

$$a^4 + 2b^2 + 4d \geqslant 7.$$

4. Załóżmy, że $-\frac{8}{3} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$. Wykaż, że

$$(3x + 8)^2(3 - 2x)^3 \leqslant 5^5.$$

Dla jakiej wartości x zachodzi równość?

5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z prawdziwa jest nierówność

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 8\sqrt{xyz} - 16.$$

Kiedy ta nierówność staje się równością?

6. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\prod_{k=0}^{n}(2^k + k) < \left(\frac{2^{n+1} - 1}{n + 1} + \frac{n}{2}\right)^{n+1}.$$

7. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie i $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Wykaż, że

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

---

8. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzą nierówności

$$(a + 2b + 3c)\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}\right) \geqslant 36$$

oraz

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c}\right) \geqslant 36.$$

9. Załóżmy, że $a, b, c \geqslant 0$. Wykaż nierówność

$$6a + 4b + 5c \geqslant 5\sqrt{ab} + 3\sqrt{bc} + 7\sqrt{ca}.$$

10. Udowodnij, że dla liczb dodatnich x, y zachodzi nierówność

$$\frac{x^3 + y^6}{2} \geqslant 3xy^2 - 4.$$

11. Załóżmy, że $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 14$. Wykaż, że

$$\sqrt{2x - 1} \cdot (14 - x) \leqslant 27.$$

Czy istnieje x, dla którego zachodzi równość?

12. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ prawdziwa jest nierówność

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} > n \cdot \sqrt[2n]{\frac{2n + 2}{2n + 1}}.$$

13. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzą nierówności

$$\left(\frac{2n + 1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} > \prod_{k=1}^{n} k^k > \left(\frac{n + 1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

15 – 29.01.2020 – Powtórzenie: indukcja zupełna, zasada szufladkowa, liczby wymierne i niewymierne.

---

1. Niech $x_0 = x_1 = 1$ oraz $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$. Wykaż, że istnieją liczby rzeczywiste a, b takie, że dla każdego $n \geqslant 0$

$$x_n = a(1+\sqrt{2})^n + b(1-\sqrt{2})^n.$$

2. Niech $a = \dfrac{8-\sqrt{14}}{5}$. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

$$a^n + \left(\frac{2}{a}\right)^n$$

jest wymierna.

3. Wybrano 16 liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 30\}$. Wykaż, że pewne dwie różnią się o 3.

4. Liczby a, b, c, d są całkowite. Wykaż, że iloczyn

$$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

jest podzielny przez 12.

5. Udowodnij, że $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.

6. Dla jakich liczb naturalnych n liczba $\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}$ jest wymierna?

---

7. Niech $x_0 = x_1 = 1$ i $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$. Wykaż, że istnieją liczby rzeczywiste a, b takie, że dla każdego $n \geqslant 0$

$$x_n = (a + bn) \cdot 3^n.$$

8. Niech $x_0 = 3$, $x_1 = -5$, $x_2 = 13$ oraz

$$x_{n+3} = 3x_{n+2} + 2x_{n+1} - 6x_n \qquad \text{dla } n \geqslant 0.$$

Udowodnij, że dla każdego $n \geqslant 0$

$$x_n = 3^n + (1-\sqrt{2})(\sqrt{2})^n + (1+\sqrt{2})(-\sqrt{2})^n.$$

9. Niech $x = \dfrac{1-\sqrt{37}}{6}$. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

$$x^{2n-1} - \frac{1}{x^{2n-1}}$$

jest wymierna.

10. Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ wybrano $n+1$ liczb. Udowodnij, że pewne dwie z nich są względnie pierwsze.

11. Wewnątrz okręgu o promieniu 1 znajduje się 13 punktów z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej. Udowodnij, że pewne trzy z nich są wierzchołkami trójkąta o polu mniejszym niż $\dfrac{\pi^2}{6}$.

12. Czy liczba $\sqrt{4-\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{4-\sqrt{2}}}$ jest wymierna?

13. Udowodnij, że liczba $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$ jest niewymierna.

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

17 – 27.02.2020 – Kombinatoryka: najważniejsze pojęcia.

Kombinatoryka to dział matematyki zajmującą się (między innymi) liczeniem elementów zbiorów skończonych.

Niech A będzie zbiorem skończonym. *Moc zbioru* A jest to liczba jego elementów. Moc zbioru A zapisujemy jako $|A|$ lub $\overline{\overline{A}}$.

Reguła dodawania. Jeżeli zbiory skończone $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są parami rozłączne, to

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A nazywamy *zbiorem potęgowym* zbioru A i zapisujemy jako $\mathcal{P}(A)$ lub 2^A.

Np. jeżeli $A = \{1,2,3\}$ to $\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\big\}$.

Funkcje. Jeżeli każdemu elementowi zbioru X został przyporządkowany dokładnie jeden element zbioru Y, to mówimy, że została określona *funkcja* przekształcająca zbiór X w zbiór Y.

Jeżeli taką funcję oznaczymy przez f, to piszemy $f : X \to Y$, a przez $f(x)$ oznaczamy element zbioru Y jednoznacznie przypisany elementowi $x \in X$. Element $f(x) \in Y$ nazywamy *wartością* funkcji f w x lub *obrazem* elementu x

Zbiór X nazywamy *dziedziną* funkcji f. Zbióy Y nazywamy *przeciwdziedziną* funkcji f. Zbiór

$$f(X) = \{f(x) \in Y : x \in X\} \subset Y$$

nazywamy *obrazem* funkcji f.

Zbiór wszystkich funkcji prekształcających zbiór X w zbiór Y oznaczany jest symbolem Y^X.

Równość dwóch funkcji $f, g : X \to Y$ definujemy następująco:

$$f = g \quad \iff \quad \forall_{x\in X}\ f(x) = g(x).$$

Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ jest

- *różnowartościowa* (*injekcją*, $1-1$), jeżeli $\forall_{a,b\in X}\ \big(a \neq b \ \Rightarrow\ f(a) \neq f(b)\big)$.
- *na* (*surjekcją*), jeżeli $f(X) = Y$ (czyli obrazem f jest cała przeciwdziedzina)
- *wzajemnie jednoznaczna* (*bijekcją*), jeżeli f jest różnowartościowa i na.

Funkcja charakterystyczna (pod)zbioru. Załóżmy, że X jest zbiorem i $A \subset X$. Funkcję $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną w następujący sposób: $\mathbb{1}_A(x) = 1$ jeżeli $x \in A$ oraz $\mathbb{1}_A(x) = 0$, jeżeli $x \in X \setminus A$, nazywamy *funkcją charakterystyczną* zbioru A.

Stw. Niech $A, B \subset X$. Wówczas $A = B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

---

1. Wyznacz obrazy funkcji:

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2n + 3$,
(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 4x - 7$,
(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$,
(d) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

Która z tych funkcji jest injekcją, surjekcją czy bijekcją?

2. Podaj przykłady:

(a) injekcji $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$,
(b) surjekcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$,

3. X jest zbiorem skończonym, $A \subset X$. Jak za pomocą funkcji charakterystycznej $\mathbb{1}_A$ wyrazić moc zbioru A?

4. X jest zbiorem skończonym, $A, B \subset X$. Zapisz funkcje charakterystyczne zbiorów $A \cap B$, $A \cup B$, $X \setminus A$ i $A \triangle B$ za pomocą funkcji charakterystycznych zbiorów A i B.

5. Udowodnij regułę dodawania za pomocą rachunku na funkcjach charakterystycznych.

6. Za pomocą funkcji charakterystycznych udowodnij *wzory włączeń i wyłaczeń* dla dwóch i trzech zbiorów skończonych:

(a) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,
(b) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$.

Ciągi. Niech $k \in \mathbb{N}$. *Ciągiem k-elementowym / długości k* o wyrazach $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nazywamy układ $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Wówczas a_k jest k-tym wyrazem tego ciągu. W informatyce używa się też nazwy *krotka* (ang. *tuple*).

Różnice między ciągiem i zbiorem:

- Każdy element ciągu ma przypisaną pozycję, natomiast element zbioru nie mają przypisanej pozycji: ciągi $(1,2,3)$ i $(3,2,1)$ są różne, natomiast $\{1,2,3\} = \{3,2,1\}$.
- Wyrazy w ciągu mogą się powtarzać, natomiast dołączenie do zbioru jednego z jego elementów nic nie zmienia: ciągi $(1,2,3)$ i $(1,2,3,3)$ są różne, natomiast $\{1,2,3\} = \{1,2,3,3\}$.

Jeżeli $a_1, a_2, \ldots a_k$ są elementami tego samego zbioru A, to ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ można utożsamić z funkcją $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to A$ zdefiniowaną jako $f(j) = a_j$.

Reguła mnożenia. $A_1, A_2, \ldots, A_k$ to zbiory skończone. Liczba różnych ciągów k-elementowych $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ takich, że $a_j \in A_j$ dla $j = 1, 2, \ldots, k$ wynosi

$$|A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|.$$

---

7. Numer dowodu osobistego składa się z trzech liter i sześciu cyfr. Ile różnych dowodów osobistych można wydać?

8. Ile jest różnych liczb czterocyfrowych, mających tą samą cyfrę setek i jedności?

9. Ile jest różnych liczb pięciocyfrowych o nie powtarzających się cyfrach?

10. W urnie znajdują się cztery kule oznaczone numerem 1 i jedna oznaczona numerem 5. Z tej urny losujemy kolejno bez zwracania trzy kule zapisując ich numery według kolejności losowania. Ile różnych liczb czterocyfrowych możemy otrzymać?

11. Ile różnych dzielników naturalnych ma liczba 17 640?

12. Ile jest liczb sześciocyfrowych, których cyfry należą do zbioru $\{1, 2, 3\}$

(a) większych od 230000,

(b) których kolejne cyfry różnią się o 1,

(c) które są większe od 230000 i ich kolejne cyfry różnią się o 1;

(d) które są większe od 230000 lub ich kolejne cyfry różnią się o 1.

13. Ile jest zgodnych z regułami gry w szachy ustawień na szachownicy 8×8 dwóch króli?

14. Ile jest możliwych ustawień na szachownicy dwóch hetmanów tak, aby jeden nie zagrażał drugiemu?

15. Zbiory $|A|$ i $|B|$ są skończone, $|A| = k$, $|B| = n$.

(a) Ile jest funkcji $f : A \to B$?

(b) Ile jest injekcji $f : A \to B$?

(c) Ile jest surjekcji $f : A \to B$?

(d) Ile jest bijekcji $f : A \to B$?

16. Zbiory A i B są skończone. Udowodnij, że

(i) $|A| = |B|$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bijekcja $f : A \to B$.

(ii) $|A| \leqslant |B|$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje injekcja $f : A \to B$.

(iii) $|A| \geqslant |B|$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje surjekcja $f : A \to B$.

17. Za pomocą reguły mnożenia i funkcji charakterystycznych udowodnij, że zbiór n-elementowy A ma dokładnie 2^n różnych podzbiorów, czyli zachodzi wzór

$$|2^A| = 2^{|A|}.$$

18. Zbiór A jest niepusty i skończony. Konstruując odpowiednią bijekcję udowodnij, że

(a) A ma tyle samo podzbiorów o parzystej i o nieparzystej liczbie elementów.

(b) Dla dowolnego elementu $a \in A$, zbiór A ma tyle samo podzbiorów zawierających a i nie zawierających a.

19. Udowodnij, że spośród dowolnych $2^{n-1} + 1$ różnych podzbiorów zbioru n-elementowego zawsze można wybrać dwa podzbiory rozłączne.

20. Niech $n \in \mathbb{N}$. Jakich podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ jest więcej: tych, których suma elementów jest parzysta, czy tych, których suma elementów jest nieparzysta?

---

21. (*) Na ile sposobów można wybrać 2 rozłączne podzbiory zbioru n-elementowego?

22. (*) Ile podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ nie zawiera dwóch kolejnych liczb?

23. (*) Zbiór A ma n elementów, $B_j \subset A$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$, to różne podzbiory zbioru A, przy czym każde trzy z tych podzbiorów mają niepustą część wspólną. Udowodnij, że istnieje element należący do każdego ze zbiorów B_j.

24. (*) $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ to różne podzbiory zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Przyjmijmy, że $A_{2n+1} = A_1$. Znajdź największą możliwą wartość sumy

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{|A_k \cap A_{k+1}|}{|A_k| \cdot |A_{k+1}|}.$$

25. (*) Funkcja $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ma własność:

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad f(A) \subset f(B).$$

Udowodnij, że istnieje podzbiór $C \subset \mathbb{N}$ taki, że $f(C) = C$.

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

18 – 11.03.2020 – Kombinatoryka II: wariacje i permutacje

Aktualizacje:

16.03: dodałem wskazówki do zadań domowych, w zadaniach 5 i 6 słowo *permutacja* zastąpiłem słowem *bijekcja*.

Wariacją k-wyrazową z powtórzeniami zbioru A nazywamy każdą funkcję odwozorowującą zbiór $\{1, 2, \ldots, k\}$ w zbiór A. Każdą taką funkcję można wzajemnie jednoznacznie utożsamić z ciągiem długości k o wyrazach ze zbioru A.

Tw. 1. Liczba k-wyrazowych z powtórzeniami zbioru n-elementowego wynosi n^k.

Wariacją k-wyrazową bez powtórzeń zbioru A nazywamy każdą injekcję (funkcję różnowartościową) odwzorowującą zbiór $\{1, 2, \ldots, k\}$ w zbiór A. Każdą taką funkcję można wzajemnie jednoznacznie utożsamić z ciągiem długości k o różnych wyrazach ze zbioru A.

Tw. 2. Liczba wariacji k-wyrazowych bez powtórzeń zbioru n-elementowego wynosi $\frac{n!}{(n-k)!}$ jeśli $n \geqslant k$ i 0 jeśli $n > k$.

Permutacją zbioru n-elementowego A nazywamy każdą bijekcję odwzorowującą zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$ na zbiór A. Każdą taką bijekcję można wzajemnie jednoznacznie utożsamić z pewnynm ustawieniem wszystkich elementów zbioru A w ciąg długości n.

Tw. 3. Liczba permutacji zbioru n-elementowego wynosi $n!$.

Zadania

1. Ile jest ciągów długości 4 o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 15\}$ takich, że

   (a) liczba 4 jest jednym z wyrazów ciągu?

   (b) pewna liczba występuje w ciągu dokładnie dwukrotnie?

   (c) pewna liczba występuje w ciągu co najmniej dwukrotnie?

2. Ile różnych liczb trzycyfrowych można utworzyć z cyfr $1, 2, 3, 4, 5, 6$, jeżeli

   (a) cyfry mogą się powtarzać?

   (b) cyfry nie mogą się powtarzać?

   (c) cyfry mogą się powtarzać i 1 musi wystąpić co najmniej raz?

   (d) cyfry mogą się powtarzać i liczba musi być większa od 400?

   (e) cyfry nie mogą się powtarzać i liczba musi być większa od 400?

3. (a) Ile jest różnych ustawień 9 osób w szereg takich, że wybrane 3 osoby stoją jedna po drugiej?

   (b) Niech $k, n \in \mathbb{N}$ i $k < n$. Ile jest różnych istawień n osób w szereg takich, że wybrane k osób stoi jedna po drugiej?

4. Ile jest różnych sposobów posadzenia n osób przy okrągłym stole? Dwa usadzenia uznajemy za takie same, jeżeli w obu każda osoba ma tych samych sąsiadów.

5. Na płaszczyźnie dany jest prostokąt (kwadrat) $ABCD$. Ile jest bijekcji P zbioru punktów $\{A, B, C, D\}$ takich, że $P(A)P(B)P(C)P(D)$ też jest prostokątem (kwadratem).

6. Punkty $A_1, A_2, \ldots, A_6$ na płaszczyźnie są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta formenego H. Niech $B = \{A_1, A_2, \ldots, A_6\}$.

   (a) Ile jest bijekcji P zbioru B takich, że jeśli punkty A_i, A_j, A_k są wierzchołkami trójkąta foremnego, to punkty $P(A_i), P(A_j), P(A_k)$ też są wierzchołkami trójkąta foremnego.

   (b) Czy każda bijekcja P opisana w podpunkcie (a) ma własność: punkty $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_6)$ są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta H?

   (c) Bijekcja P zbioru A ma własność: dla dowolnych różnych punktów A_i, A_j, A_k trójkąty $A_iA_jA_k$ i $P(A_i)P(A_j)P(A_k)$ są przystające (uwzględniając kolejność wierzchołków). Czy punkty $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_6)$ są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta H?

7. W mieście o $n+1$ mieszkańcach jedna osoba powtarza plotkę drugiej, która z kolei powtarza ją trzeciej, itd. Za każdym razem plotka jest powtarzana jednej z n dostępnych osób. Wyznacz, ile jest różnych dróg rozprzestrzeniania się plotki takich, że plotka zostanie powtórzona k razy i

   (a) nie wróci do osoby, która ją zapoczątkowała,

   (b) nie zostanie powtórzona dwa razy tej samej osobie.

8. (*) W każde pole tabeli o m wierszach i n kolumnach wpisujemy liczbę 1 lub -1. Na ile sposobów można to zrobić tak, aby iloczyn liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie był równy -1?

9. (*) W pewnym mieście działają dwie siatki szpiegowskie wrogich mocarstw. Każda siatka składa się z n szpiegów. Każdy szpieg z pierwszej siatki śledzi k szpiegów z drugiej siatki i każdy szpieg z drugiej siatki śledzi l szpiegów z pierwszej siatki. Ile jest par (k, l) gwarantujących, że pewnych dwóch wrogich szpiegów śledzi się nawzajem?

Pisemne zadania domowe na 18.03:

ZD1. Na ile sposobów można rozdzielić $2n$ piłek zielonych, $2n$ niebieskich i $2n$ czerwonych po równo pomiędzy dwie osoby?

Wskazówka: Taki rozkład jest wyznaczony jednoznacznie przez liczbę piłek zielonych i niebieskich u pierwszej osoby. Osoby są rozróżnialne, np. pierwsza to Jaś, a druga Małgosia. Jeśli p to liczba piłek zielonych u 1. osoby, na ile sposobów (przy ustalonym p) można jej dać piłki niebieskie?

ZD2. Niech $m \geqslant 2$ i $A_1, A_2, \ldots, A_m$ to różne podzbiory niepustego zbioru A. Udowodnij, że co najmniej m zbiorów postaci $A_i \triangle A_j$ jest różnych.

Wskazówka: X, Y, Z to podzbiory zbioru A. Zastanów się, co wynika z równości $X \triangle Y = X \triangle Z$.

Rozwiązania zadań domowych

ZD1. Taki rozkład piłek jest wyznaczony jednoznacznie przez dwie liczby: p – liczbę piłek zielonych i q – liczbę piłek niebieskich u pierwszej osoby.

1. przypadek: $0 \leqslant p \leqslant n$. Nie jest możliwe, aby $p+q<n$, bo wtedy zabraknie piłek czerwonych. Zatem $p+q \geqslant n$, czyli $q \geqslant n-p$. Wszystkich piłek niebieskich jest $2n$, więc $q \leqslant 2n$. To oznacza, że

$$q \in \{n-p, n-p+1, \ldots, 2n\} \qquad \text{(ten zbiór ma } n+p+1 \text{ elementów)}$$

czyli dla ustalonej wartości p jest $n+p+1$ możliwych wartości q. Sumując po wszystkich $p \in \{0,1,\ldots,n\}$ dostajemy następującą liczbę możliwości (oznaczoną przez a_n)

$$a_n = \sum_{p=0}^{n}(n+p+1) = \sum_{p=0}^{n} n + \sum_{p=0}^{n} p + \sum_{p=0}^{n} 1 = n(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \\ = n^2 + 2n + 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. przypadek: $n < p \leqslant 2n$. Wtedy $p+q \leqslant 3n$, czyli $q \leqslant 3n-p$. Zatem w tym przypadku

$$q \in \{0,1,\ldots,3n-p\} \qquad \text{(ten zbiór ma } 3n-p+1 \text{ elementów)}$$

Zauważmy, że jeśli $p>n$, to $3n-p<2n$, więc nie zabraknie nam piłek niebieskich, oraz $3n-p-q<2n$, więc piłek czerwonych też będzie dostateczna ilość. Dla ustalonej wartości p jest więc $3n-p+1$ możliwych wartości liczby q. Aby ułatwić sobie dalsze obliczenia zapiszmy liczbę p jako $p=n+k$, gdzie $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Wtedy jest $2n-k+1$ możliwych wartości q. Zatem w tym przypadku mamy w sumie b_n możliwości, gdzie

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}(2n-k+1) = 2\sum_{k=1}^{n} n - \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 2n^2 - \frac{n(n+1)}{2} + n.$$

Wszystkich możliwości jest

$$a_n + b_n = n^2 + 2n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} + 2n^2 - \frac{n(n+1)}{2} + n = 3n^2 + 3n + 1.$$

ZD2. Jeżeli X,Y,Z to zbiory i $X \triangle Y = X \triangle Z$, to $Y=Z$. Można to uzasadnić w następujący sposób: Równość $X \triangle Y = X \triangle Z$ można zapisać jako

$$(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = (X \setminus Z) \cup (Z \setminus X).$$

Stąd

$$X \setminus Y = X \setminus Z \quad \text{i} \quad Y \setminus X = Z \setminus X.$$

Z pierwszej równości wynika, że $X \cap Y = X \cap Z$. Mamy teraz

$$Y = (X \cap Y) \cup (Y \setminus X) = (X \cap Z) \cup (Z \setminus X) = Z.$$

Z udowodnionej implikacji wynika, że zbiory $A_1 \triangle A_1, A_1 \triangle A_2, \ldots, A_1 \triangle A_m$ są wszystkie różne, więc mamy m różnych zbiorów.

UWAGA: Nie jest prawdą, że wszystkie zbiory $A_i \triangle A_j$ dla $i \neq j$ są różne – takie stwierdzenie pojawiło się niestety w wielu nadesłanych rozwiązaniach. Na przykład, niech $X = \{1,2,3,4\}$ i

$$A_1 = \{1,2\}, \quad A_2 = \{2,3\}, \quad A_3 = \{1,4\}, \quad A_4 = \{3,4\}.$$

Wówczas $A_1 \triangle A_2 = \{1,3\} = A_3 \triangle A_4$.

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

19 – 18.03.2020 – Kombinatoryka III: kombinacje, symbol Newtona

---

Definicja. Niech $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $k \leqslant n$. *Kombinacją k-elementową zbioru n-elementowego A* nazywamy każdy k-elementowy podzbiór zbioru A.

Definicja. Dla liczb $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiujemy *symbol Newtona* (*symbol dwumienny*) jako: gdy $n \geqslant k$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

natomiast gdy $n < k$ przyjmujemy, że $\displaystyle\binom{n}{k} = 0$.

Tw. 1. Niech $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $k \leqslant n$. Liczba k-elementowych kombinacji (czyli k-elementowych podzbiorów) zbioru n-elementowego jest równa $\displaystyle\binom{n}{k}$.

Dowód. Rozważamy wszystkie k-wyrazowe wariacje bez powtórzeń zbioru n-elementowego A, czyli ciągi długości k o wyrazach ze zbioru A takie, że każdy wyraz jest inny. Każdej takiej wariacji $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ możemy przyporządkować k-elementowy podzbiór $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ zbioru A. Takich wariacji jest

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Jednak, gdy $k > 1$, ten sam podzbiór zostanie przyporządkowany wszystkim wariacjom długości k, w których występują elementy $a_1, a_2, \dots, a_k$ – wariacje te różnią się jedynie kolejnością wyrazów. Liczba takich wariacji jest równa liczbie permutacji zbioru k-elementowego $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, czyli $k!$. Oznacza to, że każdy podzbiór k-elementowy zostanie przyporządkowany $k!$ różnym wariacjom k-wyrazowym. Zatem liczba podzbiorów k-elementowych jest równa

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}.$$

$\square$

Uwagi:

- Jeśli $k > n$, to istnieje 0 podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego, więc także w tym przypadku liczba takich podzbiorów jest równa $\binom{n}{k}$.
- Zauważmy, że udowodniliśmy także następujący fakt dotyczący liczb całkowitych: jeśli $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $k \leqslant n$, to liczba $k!$ dzieli liczbę $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$.

Tw. 2. (Własności symbolu Newtona)

(i) Jeżeli $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $k \leqslant n$, to

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

(ii) Jeżeli $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $1 \leqslant k \leqslant n$, to

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

(iii) Jeżeli $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, to

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Dowód. (i): Równość ta wynika od razu ze wzoru $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Inne uzasadnienie wynika z obserwacji, że każdemu k-elementowego podzbiorowi B zbioru n-elementowego A możemy wzajemnie jednoznacznie przyporządkować podzbiór $(n-k)$-elementowy $A \setminus B$. Zatem podzbiorów k-elementowych i $(n-k)$-elementowych jest tyle samo.

(ii): Podzbiory k-elementowe zbioru $(n+1)$-elementowego A zliczymy w następujący sposób: Ustalmy element $a \in A$. Jest $\binom{n}{k}$ podzbiorów k-elementowych zbioru A nie zawierających a – są to podzbiory k-elementowe zbioru $A \setminus \{a\}$. Natomiast podzbiorów k-elementowych zawierających a jest tyle samo, ile $(k-1)$-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego $A \setminus \{a\}$, czyli $\binom{n}{k-1}$. Wszystkich podzbiorów k elementowych zbioru A jest $\binom{n+1}{k}$, mamy więc równość

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

(iii): Tożsamość można udowodnić zliczając na dwa sposoby wszystkie podzbiory zbioru n-elementowego A: z jednej strony jest ich 2^n. Z drugiej strony, aby otrzymać ich liczbę można dodać do siebie liczby podzbiorów 0-elementowych, 1-elementowych, itd, otrzymując lewą stronę dowodzonej równości. $\square$

Uwaga: Dowody wszystkich trzech tożsamości powyżej polegały na tym, że pewne obiekty (podzbiory) zliczaliśmy na dwa sposoby. Takie dowody wzorów algebraicznych nazywane są dowodami kombinatorycznymi.

Trójkąt Pascala. Wartości symbolu Newtona $\binom{n}{k}$ można dla niezbyt dużych n łatwo wyznaczyć za pomocą tzw. trójkąta Pascala. Jest to trójkątna tabela, której wiersze odpowiadają kolejnym wartościom n, tworzona w następujący sposób:

$$\begin{array}{r|ccccccccccc}
n=0 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
n=1 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
n=2 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
n=3 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
n=4 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
n=5 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Z tożsamości $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ wynika, że w każdym wierszu począwszy od trzeciego każdy nie-skrajny wyraz jest sumą dwóch wyrazów bezpośrednio nad nim. Można więc szybko wypełniać kolejne wiersze. Dla 6 wierszy (do $n = 5$) otrzymamy:

$$
\begin{array}{r|ccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Przykłady

I. Z klasy liczącej 34 uczniów należy wytypować czteroosobowy samorząd. Na ile sposobów można to zrobić?

Zadanie to polega na wyznaczeniu liczby kombinacji 4-elementowych zbioru 34-elementowego. Takich kombinacji jest

$$\binom{34}{4} = \frac{34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31}{4!} = \frac{1\,113\,024}{24} = 46\,376.$$

Załóżmy teraz, że w tej klasie jest 7 dziewcząt. Na ile sposobów można wytypować czteroosobowy samorząd tak, aby należała do niego co najmniej jedna dziewczyna i co najmniej jeden chłopiec?

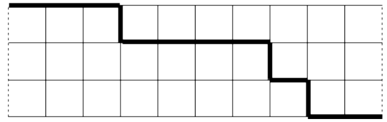
W tym przypadku możemy oddzielnie zliczyć możliwe składy samorządu, w których wybrano odpowiednio dokładnie 1, 2 i 3 dziewczęta. W 1. przypadku możliwości jest $\binom{7}{1} \cdot \binom{27}{3}$ (wybieramy jedną osobę z 7 i 3 z 27), w 2. przypadku jest $\binom{7}{2} \cdot \binom{27}{2}$ możliwości, w 3. jest ich $\binom{7}{3} \cdot \binom{27}{1}$. Zatem odpowiedź to

$$
\begin{aligned}
&\binom{7}{1} \cdot \binom{27}{3} + \binom{7}{2} \cdot \binom{27}{2} + \binom{7}{3} \cdot \binom{27}{1} \\
&\qquad = 7 \cdot \frac{27 \cdot 26 \cdot 25}{6} + \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{27 \cdot 26}{2} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} \cdot 27 \\
&\qquad = 7 \cdot 2925 + 21 \cdot 351 + 35 \cdot 27 = 20\,475 + 7\,371 + 945 \\
&\qquad = 28\,791.
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że korzystamy tutaj ze wzoru na liczbę kombinacji oraz reguł dodawania i mnożenia.

II. Wyznaczymy liczbę ciągów długości cztery (a_1, a_2, a_3, a_4) takich, że $a_i \in \mathbb{N}$ oraz $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10$.

Wyobraźmy sobie prostokąt 3×10, który podzielono poziomymi i pionowymi liniami na kwadraty 1×1. Każdemu takiemu ciągowi możemy jednoznacznie przyporządkować pewną drogę z lewego górnego rogu do prawego dolnego rogu prostokąta wzdłuż narysowanych linii. Przykładowo, ciąg $(3, 4, 1, 2)$ odpowiada drodze:



Cztery poziome odcinki tej drogi mają kolejno długości $3, 4, 1, 2$. Aby wybrać taki ciąg / drogę należy wskazać 3 z 9 pionowych linii w których przejdziemy z jednej poziomej linii do kolejnej. Odrzucamy skrajne linie pionowe, gdyż długość każdego odcinka poziomego ma być liczbą naturalną. Zatem odpowiedź brzmi $\binom{9}{3} = 126$.

Zadania

1. Na płaszczyźnie danych jest 14 prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Ile jest trójkątów, których boki należą do tych prostych?

2. Ile różnych prostokątów można utworzyć z pól szachownicy 8×8?

3. Ile jest permutacji zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 31\}$ takich, że iloczyn każdych dwóch sąsiednich liczb jest parzysty?

4. Na ile sposobów można wypełnić kupon totolotka (zakreślamy 6 liczb od 1 do 49) tak, że zakreślone zostaną co najmniej 2 kolejne liczby?

5. Na ile sposobów można posadzić na 25 miejscowej ławie 10 panów i 15 pań tak, aby między każdymi dwoma panami siedziała co najmniej jedna pani?

6. Na ile sposobów można podzielić zbiór 12 elementowy na 6 rozłącznych podzbiorów 2-elementowych?

7. Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą.
(a) Ile jest różnych dzielników naturalnych liczby $p_1 p_2 \ldots p_n$?
(b) Ile jest par względnie pierwszych dzielników liczby $p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$?

8. Na ile sposobów można rozmieścić 9 studentów w 3 pokojach trzyosobowych, gdy
(a) każdy może dzielić pokój z każdym,
(b) pewnych dwóch studentów nie chce mieszkać razem,
(c) pewnych dwóch studentów chce mieszkać razem?

9. Niech $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$ i $1 < k < n - 1$. Na ile sposobów można wybrać ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ cztery liczby tak, aby wśród nich była liczba k i dokładnie jedna liczba mniejsza od k?

10. Niech $n, k \in \mathbb{N}$ i $k \leqslant n$. Udowodnij tożsamość

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

(a) algebraicznie, przekształcając lewą i / lub prawą stronę równości;
(b) kombinatorycznie, rozważając, na ile sposobów można z n osób wybrać k osobowy zespół z liderem.

11. Dany jest zbiór n-elementowy A i jego m-elementowy podzbiór B. Ile jest podzbiorów zbioru A niezawierających się w B i nierozłącznych z nim?

12. (*) Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij tożsamość

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}.$$

Postaraj się znaleźć dowód kombinatoryczny.

13. (*) Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że liczba ciągów m-wyrazowych $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ takich, że $a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = n$ wynosi $\binom{m+n-1}{m-1}$.

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

20 – 02.04.2020 – Kombinatoryka IV: dwumian Newtona

Aktualizacje:

06.04 - Poprawa wykładnika we wzorze w zadaniu 16

Twierdzenie (dwumian Newtona). Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i liczby naturalnej n prawdziwy jest wzór

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}.$$

Uwaga: Wzór ten jest nazywany dumianem Newtona lub wzorem dwumianowym Newtona. Dla $n = 2, 3$ dostajemy znane wzory skróconego mnożenia na kwadrat i sześcian sumy.

Dowód. Wyrażenie $(a+b)^n$ jest iloczynem n czynników postaci $(a+b)$, czyli

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n \text{ czynników}}. \tag{1}$$

Po wymnożeniu otrzymamy sumę iloczynów postaci $a^k b^{n-k}$ (z k czynników wybraliśmy a, a z pozostałych $(n-k)$ czynników wybraliśmy b). Dla ustalonego $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ zastanówmy się, ile razy wystąpi iloczyn postaci $a^k b^{n-k}$: ponumerujmy kolejne czynniki $(a+b)$ w (1) liczbami od 1 do n. Każdy wybór liczby a z k czynników odpowiada wyborowi pewnego k-elementowego podzbioru zbioru n-elementowego $\{1, 2, \ldots, n\}$ (natomiast liczbę b wybieramy wtedy z czynników o numerach z dopełnienia tego podzbioru!). Zatem po wymnożeniu wszystkich czynników wyrażenie $a^k b^{n-k}$ pojawi się dokładnie $\binom{n}{k}$ razy. $\square$

Uwaga: Jeśli zamiast b w dwumianie Newtona weźmiemy $-b$, to otrzymamy wzór

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}(-1)^{n-k}.$$

Przykłady

I. Zauważmy, że wartości symboli Newtona we wzorze Newtona dla danego n możemy znaleźć za pomocą trójkąta Pascala. Przykładowo, wiersz trójkąta Pascala dla $n = 5$ składa się z liczb $1, 5, 10, 5, 1$. Zatem wzór „skróconego mnożenia” na piątą potęgę sumy ma postać:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

II. Podstawiając w dwumianie Newtonoa $a = b = 1$ otrzymujemy znaną nam tożsamość

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$

III. Wykażemy, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

jest wymierna (a nawet parzysta). Mamy

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sqrt{2}\right)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\left(\sqrt{2}\right)^{n-k}.$$

Gdy liczba $n-k$ jest nieparzysta, to k-ty wyraz z pierwszej sumy zniesie się k-tym wyrazem z drugiej sumy, natomiast jeśli liczba $n-k$ jest parzysta, to k-te wyrazy w obu sumach są równe. W tych wyrazach $\sqrt{2}$ jest w parzystej potędze, są więc one liczbami naturalnymi. Zostanie nam więc liczba naturalna parzysta.

IV. Korzystając z dwumianu Newtona „obliczymy” sumę

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}.$$

Za pomocą tożsamości (zadanie 19.10)

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1},$$

i dwumianu Newtona dla $n-1$ i $a = b = 1$ przekształcamy sumę w następujący sposób:

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

Zadania

1. Zapisz wzór „skróconego mnożenia” dla $(a-b)^6$ (szóstej potęgi różnicy).

2. Znajdź liczby całkowite a i b takie, że

$$\left(3-2\sqrt{2}\right)^5 = a + b\sqrt{2}.$$

3. „Uprość” sumę

$$\sum_{j=0}^{6}5^{j+1}(-1)^j\cdot\binom{6}{j}$$

4. Dla jakich liczb naturalnych n liczba

$$\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

jest wymierna?

5. Dla jakich liczb naturalnych n liczba

(a) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^n+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^n$, (b) $\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^n+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^n}{\sqrt{3}}$

jest wymierna (całkowita)?

6. Ile wyrazów wymiernych znajduje się w rozwinięciu za pomocą wzoru dwumianowego Newtona wyrażenia $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)^{100}$?

7. Podaj dowód kombinatoryczny równości udowodnionej w przykładzie IV.

8. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0.$$

9. Z poprzedniego zadania wynika równość

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots$$

("+ …" oznacza, że dodajemy symbole $\binom{n}{2k}$ lub $\binom{n}{2k-1}$ dopóki $2k \leqslant n$ lub $2k-1 \leqslant n$). Ile jest równa każda ze stron tej równości? Jaka jest jej interpretacja kombinatoryczna?

10. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij tożsamość

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)^2=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}.$$

11. Udowodnij wzór dwumianowy Newtona za pomocą zasady indukcji.

12. „Uprość” sumy

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}4^{n-k}$.

13. Udowodnij tożsamości za pomocą wzoru dwumianowego:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}ka^kb^{n-k}=na(a+b)^{n-1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)a^kb^{n-k}=n(n-1)a^2(a+b)^{n-2}$

14. „Uprość” sumy

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2a^kb^{n-k}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)(k-2)a^kb^{n-k}$.

15. Liczba naturalna n jest nieparzysta i $a \in \mathbb{R}$. Wykaż, że

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((a-1)^k+(-1)^k\cdot(a+1)^k\right)=0.$$

Czy potrafisz „uprościć” sumę, gdy n jest parzyste?

16. Niech $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Załóżmy, że liczby naturalne a_n i b_n spełniają równość

$$a_n+b_n\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}.$$

(a) Wykaż, że $a_n-b_n\sqrt{2}=\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+1}$.
(b) Wykaż, że liczby a_n i b_n są nieparzyste.
(c)* Udowodnij, że dla każdego $n>1$ liczba b_n^2 jest sumą kwadratów dwóch liczb naturalnych.

17. (*) Niech $n \in \mathbb{N}$ i $a,b,c \in \mathbb{R}$. Udowodnij „wzór trójmianowy Newtona”:

$$(a+b+c)^n=\sum_{k,l,m}\frac{n!}{k!\,l!\,m!}a^kb^lc^m,$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich trójkach liczb całkowitych nieujemnych (k,l,m) takich, że $k+l+m=n$. Ile wyrazów jest w tej sumie?

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

21 – 20.04.2020 – Kombinatoryka V: zadania różne

---

1. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

$$\binom{2n}{0} < \binom{2n}{1} < \binom{2n}{2} < \ldots < \binom{2n}{n-1} < \binom{2n}{n}$$

oraz

$$\binom{2n+1}{0} < \binom{2n+1}{1} < \binom{2n+1}{2} < \ldots < \binom{2n+1}{n-1} < \binom{2n+1}{n}.$$

2. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność

$$\binom{2n}{n}\sqrt{2n+1} < 4^n.$$

3. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że każda z poniższych liczb jest całkowita:

$$\text{(a)}\ \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}, \qquad \text{(b)}\ \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}, \qquad \text{(c)}\ \frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}.$$

4. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij tożsamości

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k}\frac{1}{2^k} = 2^n$.

5. Niech $n, m \in \mathbb{N}$. Udowodnij tożsamość

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}.$$

6. Liczba p jest pierwsza. Wykaż, że

(a) $p \mid \binom{p}{k}$ dla $k = 1, 2, \ldots, p-1$,

(b) $p^2 \mid \binom{2p}{p} - 2$.

7. Niech $k, m \in \mathbb{N}$. Ile jest ciągów $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ takich, że liczby $a_1, a_2, \ldots, a_k$ są całkowite i $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k \leqslant m$?

8. Niech $n, k \in \mathbb{N}$. Filemon i Bonifacy zapisują ciągi liczb całkowitych:

- Filemon zapisuje wszystkie ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ takie, że
$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \leqslant k.$$
- Bonifacy zapisuje wszystkie ciągi $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ takie, że
$$|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_k| \leqslant n.$$

Udowodnij, że obaj zapiszą tyle samo ciągów.

9. Dane są liczby $m, r \in \mathbb{N}$ takie, że $m > r$. Udowodnij, że

$$\sum_{k=r}^{m} \binom{m}{k}\binom{k}{r}(-1)^k = 0.$$

10. Niech F_n oznacza n-tą liczbę Fibonacciego (czyli $F_1 = F_2 = 1$ i $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$). Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\sum_{k=1}^{n} F_k \binom{n}{k} = F_{2n}.$$

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

22 – 29.04.2020 – Kombinatoryka VI: wzór włączeń i wyłączeń

Twierdzenie. Zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mają skończenie wiele elementów. Wówczas

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$
$$- \sum_{1 \leqslant i < j < k < l \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| + \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Uwaga: Zapis $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ oznacza, że bierzemy sumę po wszystkich parach liczb całkowitych (i, j) takich, że $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Na przykład, wzór na kwadrat sumy n liczb można zapisać jako:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j.$$

Zadania

1. Ile jest liczb naturalnych mniejszych niż 1000 i podzielnych przez 2 lub 3 lub 5?
2. Ile liczb czterocyfrowych jest podzielnych przez 5 lub 9 lub 15?
3. Wyznacz liczbę surjekcji ze zbioru n-elementowego na zbiór p-elementowy.
4. Permutację $p = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ nazywamy *nieporządkiem* (ang. *derangement*) jeżeli $a_k \neq k$ dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$. Wykaż, że liczba wszystkich nieporządków zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ jest równa
$$n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$
5. Znajdź wzór na liczbę ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, w których każda liczba wystąpi dokładnie 2 razy i każde dwa sąsiednie wyrazy są różne.
6. Na ile sposobów można wypełnić tabelę o m wierszach i n kolumnach liczbami 0 i 1 tak, aby w żadnym wierszu i żadnej kolumnie nie było samych zer?
7. (IMO 1989) Powiemy, że permutacja $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ jest *miła*, jeżeli dla co najmniej jednego i zachodzi $|x_1 - x_{i+1}| = n$. Udowodnij, że dla każdego n więcej niż połowa wszystkich permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ jest miła.
8. Zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mają skończenie wiele elementów. Udowodnij wzór
$$|A_1 \triangle A_2 \triangle A_3 \triangle \ldots \triangle A_n| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| - 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| +$$
$$4 \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - 8 \sum_{1 \leqslant i < j < k < l \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l|$$
$$+ \ldots + (-1)^{n+1} 2^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Analiza matematyczna - klasa 1a4

Zadanie domowe z kombinatoryki na 29.04.2020

W miarę możliwości proszę oby każdy umieścił własne rozwiązania w jednym pliku pdf. Proszę abyście

- zadbali o czytelność rozwiązań,
- na jednej stronie pisali rozwiązanie tylko jednego zadania,
- na każdej stronie umieścili imię i nazwisko oraz numer zadania i numer strony, jeżeli rozwiązanie zadania zajmuje więcej niż jedną stronę.

Aby otrzymać ocenę bardzo dobrą należy poprawnie rozwiązać 4 zadania, na ocenę dobrą 3 zadania, itd.

W zadaniach 1, 2, 3 należy otrzymać odpowiedź w postaci wyrażenia algebraicznego, w którym występuje niezależna od n liczba działań dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia, potęgowania, pierwiastkowania i operacji silnia.

1. Niech $n \in \mathbb{N}$. Oblicz sumę

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!(n+k)!}$$

2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Oblicz sumę

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} 2^k.$$

3. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz liczbę ciągów długości n o wyrazach ze zbioru $\{0,1,2,3\}$, w których liczba 0 występuje (a) parzystą, (b) nieprarzystą ilość razy.

4. Udowodnij tożsamość

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}^2.$$

5. Wyznacz liczbę ciągów (a,b,c,d) takich, że $a,b,c,d \in \mathbb{N}$ oraz

$$3a+3b+3c+d=300.$$

6. Dla danej liczby naturalnej n wyznacz liczbę ciągów skończonej długości o wyrazach ze zbioru $\{1,2\}$, których suma jest równa n?

Uwaga: dla danej liczby naturalnej n dopuszczamy ciągi różnej długości, np. dla $n=4$ każdy z ciagów $(2,2),(1,2,1),(1,1,1,1)$ spełnia podany warunek.

7. Rozważamy n-kąt wypukły W, którego żadne trzy przekątne nie przecinają się w jednym punkcie.

(a) Ile jest różnych punktów przecięcia przekątnych wewnątrz wielokąta W?

(b) Na ile części wszystkie przekątne dzielą wielokąt W?

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

23 – 08.05.2020 – Funkcje liczbowe I

Funkcja liczbowa jest to dowolna funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}$.

Często funkcja liczbowa jest podana samym wzorem bez wskazania dziedziny. Wówczas przyjmujemy, że dziedziną takiej funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wzór definiujący funkcję ma sens. Na przykład

- dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{x+1}$ jest zbiór $D_f = [-1, +\infty)$,

  Przypomnienie: Jeżeli k jest liczbą naturalną parzystą i $x \geqslant 0$, to przyjmujemy, że $\sqrt[k]{x}$ oznacza jedyną liczbę **nieujemną** t taką, że $t^k = x$
- dziedziną funkcji $g(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ jest zbiór $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Jeżeli chcemy napisać, że mamy do czynienia z funkcją zmiennej x bez oznaczania jej literą f, g itp., możemy użyć notacji z symobolem $\mapsto$, np.

$$x \mapsto \sqrt{1-x^2}, \qquad x \mapsto 7x^2 - 2x + 5.$$

Ważne klasy funkcji

- funkcje stałe: $f(x) = c$, gdzie c jest ustaloną liczbą rzeczywistą;
- funkcje liniowe: $f(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$;
- funkcje kwadratowe: $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$;
- wielomiany: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$; gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Jeśli $a_n \neq 0$, to mówimy, że f jest wielomianem stopnia n;
- funkcje wymierne: $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, gdzie g i h są wielomianami.

Funkcje można również definiować za pomocą kilku wzorów, rozbijając jej dziedzinę na kilka rozłącznych podzbiorów. Na przykład funkcję zwaną *wartością bezwzględną* lub *modułem* $f(x) = |x|$ można zdefiniować w następujący sposób:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{gdy } x \geqslant 0 \\ -x & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

Funkcję $f(x) = |x|$ można również zdefiniować wzorem $f(x) = \sqrt{x^2}$.

Inny przykład to funkcja *signum*:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{gdy } x < 0 \\ 0 & \text{gdy } x = 0 \\ 1 & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$$

Wykresem funkcji liczbowej $f : D_f \to \mathbb{R}$ nazywamy podzbiór płaszczyzny

$$W_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in D_f\}.$$

Dla dwóch funkcji $f : D_f \to \mathbb{R}$ i $g : D_g \to \mathbb{R}$ takich, że $g(D_g) \subset D_f$ możemy zdefiniować operację *złożenia* funkcji:

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$

WAŻNE: Składanie funkcji jest łączne i nie jest przemienne.

Jeżeli $E \subset \mathbb{R}$ i funkcja $f : D \to E$ jest bijekcją, to dla każdego $y \in E$ istnieje dokładnie jeden $x \in D$ taki, że $f(x) = y$. Ten element x oznaczamy $f^{-1}(y)$, a funkcję $f^{-1} : E \to D$ nazywamy *funkcją odwrotną* do f. Wówczas

$$\forall_{x \in D}\ f^{-1} \circ f(x) = x \qquad \text{i} \qquad \forall_{y \in E}\ f \circ f^{-1}(y) = y.$$

Funkcja f jest też funkcją odwrotną do f^{-1}.

Na przykład, jeżeli $f(x) = x^3$, to $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

Należy pamiętać o tym, że napis $f^{-1}(x)$ oznacza **co innego** niż $\dfrac{1}{f(x)}$!!!

Zadania

1. Wyznacz dziedziny funkcji

(a) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x - 7}{(x^2-2)(x+1)(x^2+2)}$,

(b) $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$,

(c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$,

(d) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$,

(e) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$,

(f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x} - \sqrt[4]{2-x}}$.

2. Naszkicuj wykresy funkcji

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$,

(b) $f(x) = 2x - 3$,

(c) $f(x) = |-\frac{1}{2}x + 2|$,

(d) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$,

(e) $f(x) = x^2 - 1$,

(f) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$.

3. Opisz, jak z wykresu funkcji $f(x)$ otrzymać wykres funkcji

(a) $g(x) = f(x+a)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$,

(b) $g(x) = f(x) + a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$,

(c) $g(x) = f(ax)$, gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(d) $g(x) = af(x)$, gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4. Naszkicuj wykresy funkcji i wyznacz ich zbiory wartości

(a) $f(x) = x^2 + 2x - 2$, (b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$, (c) $f(x) = \big||x-2| - 2\big| - 2$.

5. Znajdź złożenia $f \circ g$ i $g \circ f$ funkcji $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} + 1$ i $g(x) = \sqrt{x-1}$.

6. Wykaż, że składanie funkcji jest łączne.

7. Wyznacz funkcję odwrotną do funkcji:

(a) $f(x) = -3x + 4$,

(b) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$

(c) $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+3}$,

(d) $f(x) = \sqrt[5]{x-1} + 1$

8. Rozważamy funkcję $f : D \to E$, gdzie D i E to dowolne zbiory. Udowodnij, że

(a) f jest *surjekcją* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $g : E \to D$ taka, że

$$\forall_{y \in E}\ f \circ g(y) = y.$$

(b) f jest *injekcją* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $g : E \to D$ taka, że

$$\forall_{x \in D}\ g \circ f(x) = x.$$

(c) f jest *bijekcją* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $g : E \to D$ taka, że

$$\forall_{y \in E}\ f \circ g(y) = y, \qquad \text{i} \qquad \forall_{x \in D}\ g \circ f(x) = x.$$

9. Funkcja $f(x) = \dfrac{cx}{2x+3}$ spełnia warunek $f \circ f(x) = x$ dla każdego x różnego od $-\frac{3}{2}$. Wyznacz współczynnik c.

10. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$. Oblicz sumę $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{j}{k}\right)$.

11. Wyznacz dziedzinę i narysuj wykres funkcji

$$f(x) = \sqrt{x \cdot \frac{\sqrt{\dfrac{1+x^2}{2x} + 1} - \sqrt{\dfrac{1+x^2}{2x} - 1}}{\sqrt{\dfrac{1+x^2}{2x} + 1} + \sqrt{\dfrac{1+x^2}{2x} - 1}}}$$

12. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Wyznacz $f \circ f \circ f(2020)$

13. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność

$$f(x+y) \geqslant f(x) + f(y).$$

14. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest równość

$$f(x) \cdot f(y) - xy = f(x) + f(y) - 1.$$

15. Niech $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $p, q : D \to D$ to permutacje zadane przez ciągi $(2, 3, 1, 5, 4)$ i $(3, 5, 1, 2, 4)$. Wyznacz ciągi odpowiadające permutacjom $p \circ q$ i $q \circ p$.

16. Niech $D = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Permutację $p : D \to D$ nazwiemy *cyklem* długości k, jeżeli istnieją różne liczby $a_1, a_2, \dots, a_k \in D$ takie, że $p(a_i) = a_{i+1}$ dla $i = 1, 2, \dots, k-1$ i $p(a_k) = a_1$ oraz $p(b) = b$ dla $b \in D \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Oznaczmy taki cykl przez $C(a_1, a_2, \dots, a_k)$.

Powiemy, że cykle $C(a_1, \dots, a_k)$ i $C(b_1, \dots, b_l)$ są rozłączne, jeżeli $\{a_1, \dots, a_k\} \cap \{b_1, \dots, b_l\} = \emptyset$.

Cykl długości 2 nazywamy *transpozycją*.

(a) Wykaż, że każda permutacja jest złożeniem kilku cykli rozłącznych. Czy te cykle są wyznaczone jednoznacznie? Czy kolejność ich składania jest istotna?

(b) Wykaż, że każda permutacja jest złożeniem skończonej liczby transpozycji.

(c) Permutację $p : D \to D$ zapisano jako złożenie r transpozycji i jako złożenie s transpozycji. Wykaż, że $2 \mid r - s$.

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

24 – 22.05.2020 – Funkcje liczbowe II - przebieg zmienności funkcji

---

Załóżmy, że $D \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem i $f : D \to \mathbb{R}$.

Monotoniczność funkcji. Mówimy, że funkcja f jest

- *rosnąca*, jeśli $f(x) < f(y)$, gdy $x < y$,
- *malejąca*, jeśli $f(x) > f(y)$, gdy $x < y$,
- *niemalejąca*, jeśli $f(x) \leqslant f(y)$, gdy $x < y$,
- *nierosnąca*, jeśli $f(x) \geqslant f(y)$, gdy $x < y$,
- *monotoniczna*, jeśli jest niemalejąca lub nierosnąca,
- *ściśle monotoniczna*, jeśli jest rosnąca lub malejąca

Przykłady:

- funkcja $f(x) = \sqrt[3]{x}$ jest rosnąca,
- funkcja $g(x) = -x - x^3$ jest malejąca.

Przedział monotoniczności funkcji f jest to przedział, na którym funkcja f jest monotoniczna, który nie jest zawarty w większym przedziale o tej własności.

Przykład: funkcja $f(x) = x^2$ ma dwa przedziały monotoniczności: $(-\infty, 0]$, na którym maleje i $[0, +\infty)$, na którym rośnie.

Ekstrema funkcji. Powiemy, że funkcja f ma w punkcie $a \in D$

- *minimum (minimum globalne)*, jeżeli $f(x) \geqslant f(a)$ dla każdego $x \in D$. Wówczas piszemy $\min f = f(a)$ lub $\min\limits_D f = f(a)$;
- *maksimum (maksimum globalne)*, jeżeli $f(x) \leqslant f(a)$ dla każdego $x \in D$. Wówczas piszemy $\max f = f(a)$ lub $\max\limits_D f = f(a)$;
- *minimum lokalne*, jeżeli istnieje przedział $(b, c) \subset D$ taki, że $a \in (b, c)$ i $f(x) \geqslant f(a)$ dla każdego $x \in (b, c)$;
- *maksiumum lokalne*, jeżeli istnieje przedział $(b, c) \subset D$ taki, że $a \in (b, c)$ i $f(x) \leqslant f(a)$ dla każdego $x \in (b, c)$.

Minumum globalne lub maksimum globalne nazywamy *ekstremum globalnym*
Minumum lokalne lub maksimum lokalne nazywamy *ekstremum lokalnym.*

Przykłady:

- funkcja $f(x) = x^2$ ma w punkcie $a = 0$ minimum globalne i lokalne. Funkcja ta nie ma maksimów lokalnych.
- funkcja $g(x) = 1 - |x + 1|$ ma w punkcie $a = -1$ maksimum globalne i lokalne.
- funkcja $h(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ nie ma ekstremów lokalnych i globalnych

Mówimy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest *ograniczona z góry*, jeżeli istnieje $A \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x) < A$ dla każdego $x \in D$ i *ograniczona z dołu*, jeżeli istnieje $B \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x) > B$ dla każdego $x \in D$. Funkcja f jest *ograniczona*, jeżeli f jest ograniczona z góry i z dołu.

Zadania

1. Udowodnij, że funkcja $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ jest rosnąca. Czy funkcja ta ma ekstrema lokalne lub globalne? Wyznacz funkcję f^{-1}.

2. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ oraz $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

3. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = |x+1| + |x-1|$ oraz $g(x) = |x+1| - |x-1|$. Naszkicuj wykresy tych funkcji.

4. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = \big||x-2| - 2\big|$.

5. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$.

6. Wykaż, że funkcja $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ jest ściśle monotoniczna i wyznacz funkcję f^{-1}.

7. Znajdź przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = |4-5x| + |1-3x| + 2x + 4$.

8. Które z funkcji w zadaniach 1 - 6 są ograniczone, ograniczone z góry, ograniczone z dołu? Które z nich mają maksimum lub minimum globalne?

9. Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest ściśle monotoniczna. Wykaż, że funkcja f^{-1} też jest monotoniczna.

10. Funkcje f i g są ściśle monotoniczne. Co można powiedzieć o monotoniczności funkcji $f \cdot g$ i $f \circ g$?

11. Niech $a < b$. Pokaż, że każda funkcja monotoniczna $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ograniczona.

12. Funkcja wszędzie nieograniczona. Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowano w następujący sposób: $f(x) = 0$ dla x niewymiernych i $x = 0$, oraz $f(\frac{m}{n}) = n$ dla $x = \frac{m}{n}$, gdzie $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ i ułamek $\frac{m}{n}$ jest nieskracalny. Pokaż, że funkcja f jest nieograniczona na każdym przedziale (a, b).

13. Mówimy, że funkcja f spełnia *równanie funkcyjne Cauchy'ego*, jeżeli dla dowolnych $x, y \in D_f$ zachodzi równość $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(a) Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie funkcyjne Cauchy'ego.

(b) Wyznacz wszystkie funkcje $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że g jest ograniczona na przedziale $(0, 1)$ i g spełnia równanie funkcyjne Cauchy'ego.

(c) Wyznacz wszystkie funkcje monotoniczne $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które spełniają równanie funkcyjne Cauchy'ego.

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

25 – 03.06.2020 – Wartość bezwzględna

Przypomnienie:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{gdy } x \geqslant 0 \\ -x & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

Prawdziwy jest także wzór $|x| = \sqrt{x^2}$.

Liczba $|x|$ jest nazywana *wartością bezwzględną* lub *modułem* liczby x.

Twierdzenie (najważniejsze własności wartości bezwzględnej).

(i) $|x| \geqslant x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Jeśli $a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$ to nierówność $|x| \leqslant a$ jest równoważna **koniunkcji** nierówności $-a \leqslant x \leqslant a$.

(iii) Jeśli $a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$ to nierówność $|x| \geqslant a$ jest równoważna **alternatywie** nierówności $x \geqslant a$ lub $x \leqslant -a$.

(iv) Jeśli $x, y \in \mathbb{R}$ to

$$|xy| = |x| \cdot |y| \qquad \text{oraz gdy } y \neq 0 \quad \frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|.$$

(v) Jeśli $x, y \in \mathbb{R}$, to

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \quad \text{oraz} \quad \big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|.$$

Zadania

1. Udowodnij (v) podpunkt Twierdzenia.

2. Rozwiąż równania:

(a) $|x+2| = 2(3-x)$

(b) $|x| - |x-2| = 2$

(c) $|x-3| + |x+4| = 9$

(d) $2|x| + |x-1| + |x+1| = 4$

(e) $|2x| + 3x - 5 = |x-1|$

(f) $\big||x+1| - 2\big| = 1$

(g) $\big||x+2| - |x|\big| = 2$

(h) $\big||x+1| - |x-1|\big| = 3$

3. Rozwiąż nierówności:

(a) $|5-2x| < 1$

(b) $|2-x| < 1-2x$

(c) $|3x-4| \geqslant 7$

(d) $|x-2| \leqslant |x+4|$

(e) $|x+2| - |x| > 1$

(f) $|2x+6| + |3x-12| + |x| < 20$

(g) $\big||x+3| - 2\big| \leqslant 1$

(h) $\big||x+3| - 2\big| > 3$

4. Wyznacz liczbę rozwiązań równania w zależności od wartości parametru $m \in \mathbb{R}$:

(a) $\big||x| - 3\big| = m$ (b) $\big||x| - m\big| = 1$ (c) $\big||x-m| - 3\big| = 1$

5. Rozwiąż równanie

$$2\Big|x - \big|x + |x-1|\big|\Big| = \Big|x + \big|x - |x+1|\big|\Big|.$$

6. Załóżmy, że $-1 < x, y < 1$. Wykaż, że

$$|x-y| < |1-xy|.$$

7. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$|x| + |y| + |z| \leqslant |y+z-x| + |z+x-y| + |x+y-z|.$$

8. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$|x| + |y| + |z| + |x+y+z| \geqslant |x+y| + |y+z| + |z+x|.$$

9. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność

$$\left|\frac{x}{1+x^2} - \frac{y}{1+y^2}\right| \leqslant |x-y|.$$

10. Wykaż, że jeśli $a, b, c \in \mathbb{R}$, to

$$\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right| \leqslant |b-c|.$$

11. Wyznacz wszystkie funkcje $f : [0,1] \to [0,1]$ takie, że dla dowolnych $x, y \in [0,1]$

$$|f(x) - f(y)| = |x-y|.$$

12. Wykaż, że dla dowolnych funkcji $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ istnieją $x, y \in [0,1]$ takie, że

$$|f(x) + g(y) - xy| \geqslant \frac{1}{4}.$$

13. Liczby $1, 2, 3, \ldots, 2n-1, 2n$ podzielono na dwie grupy po n liczb w każdej. Niech $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ to uporządkowane rosnąco liczby z pierwszej grupy, natomiast $b_1 > b_2 > \ldots > b_n$ to uporządkowane malejąco liczby z drugiej grupy. Wykaż, że

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| = n^2.$$

14. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \big(|a_i - a_j| + |b_i - b_j|\big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_i - b_j|.$$

Analiza matematyczna - klasa 1A-4

26 – 17.06.2020 – Część całkowita (podłoga) liczby rzeczywistej

---

Część całkowitą (podłogę) liczby rzeczywistej x (ozn. $\lfloor x \rfloor$) definiujemy jako największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą x.

Twierdzenie (najważniejsze własności podłogi liczby rzeczywistej).

(i) $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Jeśli $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$ to $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.

(iii) Jeśli $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$, to $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$.

(iv) Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Sufit liczby rzeczywistej x (ozn. $\lceil x \rceil$) definiujemy jako najmniejszą liczbę całkowitą większą lub równą x. Zachodzi równość $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$, więc każde wyrażenie zawierające sufit można zamienić na równoważne wyrażenie z podłogą.

Zadania

1. Udowodnij podpunkty (iii) i (iv) Twierdzenia.

2. Sformułuj i udowodnij twierdzenie o najważniejszych własnościach sufitu liczby rzeczywistej.

3. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor .$$

4. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \lfloor 2x \rfloor - x$.

5. Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest dana wzorem

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor .$$

Wykaż, że f jest surjekcją i znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że $f(n) = 2020$.

6. Rozwiąż równanie $\lfloor x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor = 17$.

7. Rozwiąż równania

(a) $\left\lfloor \frac{5+6x}{8} \right\rfloor = \frac{15x-7}{5}$, (b) $\left\lfloor \frac{12x-5}{7} \right\rfloor = \frac{7x-6}{4}$.

8. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor .$$

9. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\lfloor 3x \rfloor + \lfloor 3y \rfloor + \lfloor 3z \rfloor \geqslant 2\left(\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor z \rfloor\right) + \lfloor x + y + z \rfloor .$$

10. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor .$$

11. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $\left\lfloor \left(2+\sqrt{3}\right)^n \right\rfloor$ jest nieparzysta.

12. Liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są naturalne. Udowodnij nierówność

$$\left\lfloor \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \right\rfloor + n \leqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

13. Niech $x \geqslant 0$. Udowodnij równość

$$\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor .$$

14. Rozwiąż równanie

$$\left\lfloor (x+1)^2 \right\rfloor = \left\lfloor x^2 \right\rfloor + 1.$$

15. Niech $a, b \geqslant 0$ i $a + b = 1$. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\lfloor na \rfloor + \lfloor nb \rfloor = n - 1.$$

16. Liczby a, b, c, d są dodatnie i niewymierne oraz $a + b = 1$. Udowodnij, że $c + d = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\lfloor na \rfloor + \lfloor nb \rfloor = \lfloor nc \rfloor + \lfloor nd \rfloor .$$

17. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$ i dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\lfloor na \rfloor + \lfloor nb \rfloor = \lfloor nc \rfloor .$$

Udowodnij, że $a + b = c$.

18. Udowodnij *twierdzenie Dirichleta:* Dl każdej liczby niewymiernej x i liczby naturalnej n istnieją liczby całkowite piq takie, że $1 \leqslant q \leqslant n$ oraz

$$|xq - p| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Analiza matematyczna - klasa 1a4

Zadanie domowe na 17.06.2020

W miarę możliwości proszę oby każdy umieścił własne rozwiązania w jednym pliku pdf. Proszę abyście

- zadbali o czytelność rozwiązań,
- na jednej stronie pisali rozwiązanie tylko jednego zadania,
- na każdej stronie umieścili imię i nazwisko oraz numer zadania i numer strony, jeżeli rozwiązanie zadania zajmuje więcej niż jedną stronę.

Aby otrzymać ocenę bardzo dobrą należy poprawnie rozwiązać 5 zadań, na ocenę dobrą 4 zadania, itd.

---

1. Funkcja $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ jest dana wzorem

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x}.$$

(a) Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f i jej ekstrema lokalne.

(b) Zbadaj, czy funkcja f ma minimum globalne i czy ma maksimum globalne.

2. Znajdź wszystkie funkcje różnowartościowe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$

$$f\Big(f(x) + y\Big) = f(x+y) + 1.$$

3. Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest rosnąca i spełnia dla każdej liczby naturalnej n równość

$$f\Big(f(n)\Big) = 3n.$$

Oblicz $f(999)$.

4. Rozwiąż nierówność

$$\Big||x-1| - |x+1|\Big| \leqslant 1.$$

5. Wyznacz liczbę rozwiązań równania

$$\Big|x + m|x|\Big| = 1$$

w zależności od wartości parametru $m \in \mathbb{R}$.

6. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wykaż, że

$$\left|\frac{|b-a|}{|ab|} + \frac{b+a}{ab} - \frac{2}{c}\right| + \frac{|b-a|}{|ab|} + \frac{b+a}{ab} + \frac{2}{c} = 4 \cdot \max\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right).$$

7. Udowodnij, że dla dowlnych liczb rzeczywistych x, y, z spełniona jest nierówność

$$\frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} + \frac{|z|}{1+|z|}.$$

8. Wykaż, że istnieją liczby całkowite a, b, c nie wszystkie jednocześnie równe zero, takie, że $|a|, |b|, |c| < 10^6$ oraz

$$\left|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right| < \frac{1}{10^{11}}.$$