WSTĘP

W 1974 r. przyszło mi po raz pierwszy uczyć w pierwszej klasie LO nr XIV w Warszawie, wtedy im. Klementa Gottwalda, a po zmianie ustroju w 1990 r. stało się im. S. Staszica. Ta zmiana oczywicie wielkiego znaczenia nie ma, żaden z nich nie był szczególnie związany z matematyką (wiedza uczniów o jednym i o drugim jest porównywalna), a od drugiej połowy lat sześćdziesiątych dwudziestego wieku szkoła znana była przede wszystkim ze specjalnego nauczania matematyki, co robili głównie pracownicy Instytutu Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego. Organizacją zajmowała się wtedy doc. dr Hanna Szmuszkowicz. Merytoryczny nadzór nad tym sprawował prof. dr hab. Stanisław Mazur, w przeszłości uczeń i współpracownik Stefana Banacha.

Po kilku miesiącach mego uczenia otrzymałem zadziwiającą propzycję — napisać skrypt z analizy matematycznej dla uczniów tego liceum. Zadziwiającą, bo przecież byłem początkującym pracownikiem. Z mało zrozumiałych powodów zgodziłem się. Przedstawiłem plan skryptu odmienny od tego, który wtedy istniał. Sprawa była merytoryczna, więc zostałem zaproszony na rozmowę do prof. S. Mazura. Powiedziałem, że moim zdaniem nie należy rozpoczynać od listy pewników, bo w podstawówkach uczniowie nie spotykali się z dowodami i że najpierw trzeba z grubsza rzecz biorąc wyjaśnić na czym dowodzenie polega. Oczywiście na przykładach. S. Mazur wysłuchał mych wynurzeń i powiedział, żebym spróbował rzecz napisać zgodnie ze swym planem. Po kilku miesiącach dostarczyłem tekst, który Mazur przeczytał dokładnie, o czym świadczyły uwagi. Piszę o tym, bo niewielu obecnych recenzentów podręczników ma zwyczaj dokładnego czytania sprawdzanego podręcznika.

Skrypt został zaakceptowany i wydany przez Instytut Kształcenia Nauczycieli, w którym wtedy pracowała doc. Hanna Szmuszkowicz, z punktu widzenia której podręcznik był koniecznością. Wszystko odbywało się bardzo szybko. Wtedy też wysłała mnie do cenzury, która też musiała zaakcetować tekst – zajęło im to pewnie nie więcej niż pół godziny (czekałem na dole, a tekst powędrował gdzieś wyżej), oczywiście nie powiniem był tam chodzić, były jakieś oficjalne zasady, ale taki był styl działania doc. H. Szmuszkowicz.

Uwagi i komentarze T. Iwańca, S. Mazura, M. Skwarczyńskiego, W. Szlenka, H. Szmuszkowicz pozwoliły poprawić pierwotny tekst w wielu miejscach[W.1] Tym osobom byłem i jestem za nie wdzięczny. Drugie wydanie (2001 r.) zostao ulepszone dzięki komentarzom Jana Baranowskiego i Dagny Kownackiej.

W tym samym roku Tadeusz Iwaniec napisał skrypt dla klas czwartych.

W następnym roku z inicjatywy doc. H. Szmuszkowicz napisaliśmy wspólnie w Tadeuszem Iwańcem skrypt, dla klasy drugiej, rok później znów sam napisałem skrypt dla trzecich klas.

Podział materiału był prosty: w pierwszej klasie podstawy: własności liczb rzeczywistych, naturalnych, całkowitych, wymiernych, wielomiany, podzielność, elementy kombinatoryki, dwumian Newtona, jakieś elementy logiki (tylko troszeczkę, by da uczniom najprostsze narzędzia).

W klasie drugiej ciągłość i definicje potęg, funkcji trygonometrycznych, troch szeregów, również funkcyjnych, wypukłość funkcji (w tym nierówność Jensena). Trochę to pod wrażeniem książki Konrada Knoppa ,,Szeregi nieskończone", w której funkcje elementarne są rozwinięte w szeregi potęgowe przed wprowadzeniem pochodnej. Istotnie prostszy niż u Knoppa jest dowód ważnego wzoru $\ln(1+x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$, który napisał T. Iwaniec.

Klasa trzecia miała być poświęcona rachunkowi różniczkowemu, co obejmowało również różniczkowanie ciągów i szeregów funkcyjnych, w tym potęgowych. Zamieściłem tu też dowód analityczności funkcji odwrotnej do funkcji analitycznej pochodzący od Cauchy'ego, którego zazwyczaj autorzy podręczników unikają, choć metoda bywa stosowana również dziś. W tej części tekstu jest najwięcej elementów, których nie da się zmieścić na lekcjach, ale można wybierać. Są rozwinięcia sinusa w iloczyn nieskończony, liczby Bernoulli'ego itp.

Klasa czwarta miała być poświęcona elementom całkowania, oczywiście w najprostszej wersji (całka Newtona). Nie omawiam

[W.1] Z wymienionych osób żyje jeszcze tylko T. Iwaniec i oby jak najdłużej.

cakowania w sensie Riemanna, tym bardziej Lebesgue'a.

Na końcu większości rozdziałów są zadania. Mieszanka łatwych i troszkę trudniejszych, na ogół bez zaznaczania trudniejszych. Wykrzyknikiem zaznaczyłem zadania, których rozwiązanie uważam za konieczne.

Dodać wypada, że maszynopis skryptu do drugiej klasy przeczytali i skrytykowali Roman Dwilewicz, Henryk Iwaniec, Stanisław Mazur i Piotr Minc, co doprowadziło do ulepszenia pierwotnego tekstu.

Skrypt dla klasy trzeciej zrecenzowali Tadeusz Iwaniec, Stanisław Mazur i Jerzy Ryll.

Do drugiego wydania skryptu dla klasy pierwszej doszo w 2001 roku. Wdzięczność należy się prof. Markowi Niezgódce i panu Jackowi Hermanowi–Iżyckiemu.

Miało dojść do wydania całości, ale z powodu pewnego zamieszania związanego z organizacją Olimpiady Matematycznej około roku 2007/2008, autor tych słów nawalił, choć sporą część pracy wykonał. Nawalił, bo zaangażował się w pracę w Komitetcie Głównym Olimpiady Matematycznej, czego zupełnie nie planował i nie wystarczyło czasu. Jednak co jakiś czas odpowiadam na pytanie o ten skrypt. W tej sytuacji postanowiłem umieścić to wszystko na swej stronie internetowej, co umożliwi zainteresowanym zapoznanie się z nim.

Tekst był przygotwywany do druku, a nie do zawieszenia w internecie, więc nie ma odsyłaczy typu *naciskamy na jakieś słowo i komputer przekierowuje nas w inne miejsce,* jednak jest skorowidz nazw i symboli. Zwykle wskazane są strony, na ktrych słowo lub symbol pojawia się pierwszy raz w książce. Wskazuję nie tylko stronę lecz również rozdział, bo tekst jest podzielony na rozdziały.

20 sierpnia 2017 r. Michał Krych

ZASADA INDUKCJI ZUPEŁNEJ

Omówimy w tym rozdziale pewną metodę dowodzenia twierdzeń matematycznych. Zaczniemy od kilku przykładów.

Przykład 1.1 Dla każdej liczby naturalnej n (tzn. n jest jedną z liczb $1, 2, 3, 4, \ldots$) zachodzi następujący wzór

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \tfrac{n(n+1)}{2}\,. \tag{1}$$

Np. dla $n = 5$ mamy $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5(5+1)}{2} = 15$

Wzór (1) można łatwo sprawdzić dla liczb $1, 2, \ldots, 9, 10$. Byłoby trudniej sprawdzić go np. dla liczby 1000000000. Nawet gdybyśmy te rachunki przeprowadzili, to i tak nie bylibyśmy pewni, czy wzór (1) jest prawdziwy dla innych liczb np. dla liczby milion razy większej.

Spróbujemy teraz uzasadnić słuszność wzoru (1) dla wszystkich liczba naturalnych.

1° Wzór (1) jest prawdziwy dla liczby 1, bo $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

2° Załóżmy, że dla pewnej liczby naturalnej k spełniona jest równość $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Dodając do jej obu stron liczbę $k + 1$ otrzymujemy

$$1 + 2 + \cdots + k + (k + 1) = \tfrac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \tfrac{(k+1)(k+2)}{2}\,.$$

Udowodniliśmy zatem, że jeśli wzór (1) jest spełniony dla pewnej liczby naturalnej k, to jest też prawdziwy dla liczby $k + 1$ oraz że wzór ten jest prawdziwy dla liczby 1. Stąd wynika, ze jest też prawdziwy dla liczby $1 + 1 = 2$, a potem dla liczby $2 + 1 = 3$, zatem również dla liczby $3 + 1 = 4$. Stąd wynika, że jest on prawdziwy dla każdej liczby naturalnej. ■

Przykład 1.2 Udowodnimy, że n prostych dzieli płaszczyznę na co najwyżej 2^n części, np. trzy proste dzielą płaszczyznę na co najwyżej $2^3 = 8$ części.

1° Jedna prosta dzieli płaszczyznę na dwie części — to jest oczywiste.

2° Załóżmy, że k prostych podzieliło płaszczyznę na nie więcej niż 2^k części. Poprowadźmy jeszcze jedną prostą. Dzieli ona każdą z poprzednich części na co najwyżej dwa nowe obszary, jeśli przechodzi przez punkt wewnętrzny, to dzieli tę część płaszczyzny na dwie nowe; jeśli nie przechodzi przez żaden punkt wewnętrzny pewnej części, na które jest podzielona płaszczyzna, to nie dzieli tej części wcale. Wobec tego liczba części, na które jest podzielona płaszczyzna może się najwyżej podwoić przez poprowadzenie nowej prostej. Oznacza to, że $k+1$ prostych dzieli płaszczyznę na co najwyżej $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ części.

Z warunku 1° wynika, ze jedna prosta dzieli płaszczyznę na co najwyżej dwie części. Stąd i z warunku 2° wynika, że dwie proste dzielą płaszczyznę na co najwyżej 2^2 części, wobec tego trzy proste — na co najwyżej 2^3 części itd. Twierdzenie zostało więc udowodnione. ■

Omówione rozumowania są przykładami dowodów indukcyjnych. Sformułujemy teraz zasadę indukcji zupełnej.

Zasada indukcji zupełnej

Załóżmy, że

1° prawdziwe jest zdanie T_1;

2° dla każdej liczby naturalnej k z prawdziwości zdania T_k wynika prawdziwość zdania T_{k+1}.

Wtedy prawdziwe są wszystkie zdania $T_1, T_2, T_3, \ldots$ ■

Zasadę tę stosowaliśmy w obu przykładach. W przykładzie pierwszym zdaniem T_k była równość $1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$, w przykładzie drugim — zdanie: *k prostych dzieli płaszczyznę na co najwyżej 2^k części.*

Zasadę indukcji będziemy stosować wielokrotnie do dowodów różnych twierdzeń. Przy sprawdzaniu warunku 2° zdanie T_k będziemy nazywać założeniem indukcyjnym, zdanie T_{k+1} — tezą indukcyjną, a rozumowanie uzasadniające prawdziwość zdania T_{k+1} na podstawie zdania T_k — krokiem indukcyjnym. Należy zawsze sprawdzać, czy oba warunki 1° i 2° są spełnione.

Rozwiążemy jeszcze dwa zadania za pomocą zasady indukcji zupełnej.

Przykład 1.3 Przy drodze w kształcie okręgu rozmieszczone są stacje benzynowe. W stacjach znajduje się benzyna w ilości wystarczającej (w sumie) do przejechania całej drogi. Udowodnić, że kierowca może tak wybrać stację, z której rozpocznie podróż, by przejechać całą drogę jadąc w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, jeśli bak jego pojazdu może zawsze pomieścić **całe** paliwo, które znajduje się w stacji, do której podjechał.

Niech T_k oznacza zdanie: jeśli przy drodze rozmieszczonych jest k stacji benzynowych, w których znajduje się benzyna w ilości wystarczającej do przejechania całej drogi, to kierowca może tak wybrać stację, z której rozpocznie podróż, by przejechać całą drogę jadąc w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

1° Zdanie T_1 jest prawdziwe, bo wtedy w jedynej stacji znajduje się całe paliwo.

2° Załóżmy, że prawdziwe jest zdanie T_k oraz, że przy drodze jest $k+1$ stacji, a w nich benzyna wystarczająca do przejechania całej drogi.

Niech S_1, $S_2, \ldots, S_k, S_{k+1}$ oznaczają stacje, przy czym stacja S_2 znajduje się bezpośrednio po stacji S_1, stacja S_3 znajduje się bezpośrednio po stacji S_2 itd., stacja S_{k+1} — po stacji S_k.

Udowodnimy, że w pewnej stacji S_j jest dosyć benzyny do przejechania do następnej stacji (jeśli $j = k+1$, to następną stacją jest S_1). Załóżmy, że tak nie jest, tzn.:benzyny w stacji S_1 jest za mało, by dojechać do stacji S_2, w której jest za mało benzyny dla przejechania do stacji S_3 itd. w stacji S_{k+1} jest za mało benzyny do przejechania do stacji S_1. Wtedy w stacjach S_1 i S_2 w sumie jest za mało benzyny do przejechania ze stacji S_1 do stacji S_3. W stacjach S_1, S_2, S_3 jest w sumie za mało benzyny do przejechania ze stacji S_1 do stacji S_4. Wobec tego we wszystkich stacjach jest za mało benzyny do przejechania ze stacji S_1 do stacji S_1, a to przeczy założeniu.

Możemy tak zmienić („obrócić”) numerację stacji, by w stacji S_1 było dość paliwa do dojechania do stacji S_2. Załóżmy teraz, że całą benzynę ze stacji S_2 przeniesiono do stacji S_1. Cała benzyna jest teraz w stacjach S_1, S_3, $S_4, \ldots, S_k$, S_{k+1}, których jest k. Z założenia indukcyjnego wynika, że można przejechać całą drogę rozpoczynając podróż z pewnej stacji S_i. Wróćmy teraz do sytuacji pierwotnej, tzn. benzyna jest znów we wszystkich $k+1$ stacjach. Oczywiście ze stacji S_i możemy dojechać do stacji S_1 — dopóki do niej nie dojedziemy sytuacja jest taka sama, jak w przypadku pustej stacji S_2. Ze stacji S_1 zabieramy całe paliwo i to pozwala dojechać do stacji S_2. Z niej zabieramy całe paliwo i w tym miejscu drogi jesteśmy w takiej samej sytuacji, jak w przypadku pustej stacji S_2, więc możemy jechać dalej.

Z zasady indukcji zupełnej wynika, że kierowca zawsze może tak wybrać stację, z której wyruszy w podróż, że uda mu się całą drogę przejechać. ■

Przykład 1.4 Wykażemy teraz bardzo użyteczną nierówność Bernoulli'ego. Załóżmy, że n jest liczbą całkowitą dodatnią zaś $a > -1$ liczbą rzeczywistą. Wtedy

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na$$

przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub gdy $n = 1$.

Niech T_k oznacza zdanie: jeśli $a > -1$, to $(1+a)^k \geqslant 1+ka$.

1° T_1 jest zdaniem prawdziwym, bo $(1+a)^1 = 1+a$.

2° Załóżmy, że zdanie T_k jest prawdą. Ponieważ $1+a > 0$, więc nierówność $(1+a)^k \geqslant 1+ka$ możemy pomnożyć stronami przez liczbę $1+a$. W wyniku otrzymujemy nierówność $(1+a)^{k+1} \geqslant$ $\geqslant (1+ka)(1+a) = 1+(k+1)a+ka^2 \geqslant 1+(k+1)a$, bo $ka^2 \geqslant 0$. Ponieważ zdanie T_1 jest prawdziwe i ze zdania T_k wynika zdanie T_{k+1}, więc nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby rzeczywistej $a > -1$. Można łatwo zauważyć, że jeśli $n \geqslant 2$ i $0 \neq a > -1$, to $(1+a)^n > 1+na$. ■

A teraz podamy przykład złego zastosowania zasady indukcji zupełnej w nadziei, ze Czytelnik znajdzie błąd w rozumowaniu.

Przykład 1.5 Udowodnimy, że wszystkie koty są tego samego koloru, tzn. udowodnimy, że dla każdej liczby naturalnej n zdanie T_n: każde n kotów jest tego samego koloru.

1° T_1 jest zdaniem prawdziwym, bo mówimy o jednym kocie.

2° Załóżmy, że prawdziwe jest zdanie T_k. Rozważmy grupę $k+1$ kotów. Ponumerujmy je liczbami $1, 2, \ldots, k, k+1$. Koty ponumerowane liczbami $1, 2, \ldots, k$ są tego samego koloru, bo jest ich k. Koty ponumerowane liczbami $2, 3, \ldots, k+1$ też są tego samego koloru, bo jest ich k. Wynika stąd, że wszystkie koty są takiego samego koloru jak drugi, trzeci itd., jak k–ty. Twierdzenie zostało ,,udowodnione". ■

Kończąc omawianie zasady indukcji zupełnej należy podkreślić różnicę między rozumowaniami indukcyjnymi przeprowadzanymi w innych dziedzinach wiedzy i rozumowaniami matematycznymi. Ogólnie rozumowaniem indukcyjnym nazywamy wyciąganie wniosków ogólnych z analizy przypadków szczególnych. Przykładowo — prawo Ohma nie zostało sformułowane w wyniku wyciągania wniosków z innych praw fizycznych. Po prostu w wielu pomiarach (we wszystkich przeprowadzonych) okazało się, że stosunek napięcia do natężenia zależy jedynie od przewodnika, przez który płynie prąd. Oznacza to, że dotychczasowe pomiary potwierdzają to prawo, ale teoretycznie mogłoby się zdarzyć, że jakiś nowy, dokładniejszy pomiar da inny rezultat. Inaczej jest w matematyce: nie sprawdzamy kolejno prawdziwości kilku lub kilkuset zdań T_n, lecz dowodzimy, że wszystkie one są prawdziwe.

Zadania

1. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór: $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

2. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór: $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

3. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$.

4. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór: $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

5. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór: $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$.

6. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór: $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

7. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór: $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.

8. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ zachodzi wzór: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$.

9. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór:

$\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 14}+\dots+\frac{1}{3n+2(3n+5)}=\frac{n}{3n+5}\,.$

10. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n>2$ i dla każdej liczby rzeczywistej $a>0$ zachodzi nierówność:
$(1+a)^n>1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2\,.$

11. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n>2$ zachodzi nierówność: $2^{n(n-1)/2}>1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\,.$

12. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n>1$ zachodzi nierówność: $(n+1)^n>2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n\,.$

13. Udowodnić, że n prostych na płaszczyźnie, z których każde dwie mają punkt wspólny, ale żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt, dzieli tę płaszczyznę na $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ części.

14. Niech $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $p_4=7$, $p_5=11$, itd., p_n jest n–tą liczbą pierwszą. Dowieść, że $p_n>3n$ dla $n\geqslant 12$.

15. Na okręgu obrano $n>2$ punktów i każdy połączono odcinkiem każdym innym. Czy można wykreślić te odcinki jednym ciągiem tak, by koniec pierwszego był początkiem drugiego, koniec drugiego — początkiem trzeciego itd. i żeby przy tym koniec ostatniego odcinka był początkiem pierwszego.

16. Niech $\pi(n)$ oznacza liczbę liczb pierwszych nie większych od liczby naturalnej n. Udowodnić, że $\pi(n)\leqslant\frac{n}{2}$ dla $n\geqslant 8$.

17. Załóżmy, że liczby x_1, x_2, … , x_n mają ten sam znak oraz że $x_1>-1$, $x_2>-1$, … , $x_n>-1$. Dowieść, że
$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\dots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\dots+x_n\,.$
Wyjaśnić, kiedy zachodzi równość.

18! Udowodnić, że jeśli suma liczb dodatnich jest równa n, to ich iloczyn jest nie jest większy niż 1.

19. Udowodnić, ze szachownicę wymiaru $(4k+1)\times(4k+1)$ można obejść ruchem skoczka szachowego przechodząc dokładnie jeden raz przez każde pole.

20. Niech $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$, $F_4=3$, …, $F_{n+2}= =F_{n+1}+F_n$. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość $F_{n+2}\cdot F_n-F_{n+1}^2=(-1)^{n+1}\,.$

21. Na dworze króla Artura zebrało się $2n$ rycerzy. Żaden z nich nie ma więcej niż $n-1$ wrogów wśród nich. Udowodnić, że Merlin — doradca króla Artura — może ich rozsadzić przy

Okrągłym Stole tak, by żaden nie był sąsiadem swego wroga.

22. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $1000^n - 1$ jest podzielna przez 37.

23. Udowodnić, że 7 jest dzielnikiem liczby $2222^{5555} + 5555^{2222}$.

24. Udowodnić, że 13 jest dzielnikiem liczby $1000^n + (-1)^n$ dla każdej liczby naturalnej n.

O POJĘCIU ZBIORU, ZAWIERANIE

Przypomnimy teraz pojęcie zbioru. Zbioru, tak jak punktu czy liczby, nie definiujemy. Słowa ,,zbiór'' będziemy używać w znaczeniu prawie zgodnym z potocznym. Można więc mówić o zbiorze książek w bibliotece, o zbiorze uczniów w klasie, o zbiorze ludzi, o zbiorze liczb naturalnych, o zbiorze punktów odcinka, o zbiorze trójkątów itp.

Zbiory składają się z elementów. To, że a jest elementem zbioru A zapisujemy tak: $a \in A$. Jeśli $\mathbb{N}$ oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych, to zapis $100 \in \mathbb{N}$ oznacza: 100 jest elementem zbioru liczb naturalnych lub krócej: 100 jest liczbą naturalną. To, że a nie jest elementem zbioru A zapisujemy tak: $a \notin A$. Pisząc $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ stwierdzamy, że $\frac{1}{2}$ nie jest liczbą naturalną. Zwykle zbiory będziemy oznaczać wielkimi literami alfabetu łacińskiego, a ich elementy — małymi.

Jeśli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B, to mówimy, że zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B lub że zbiór A jest zawarty w zbiorze B, lub że zbiór B zawiera zbiór A. Czasem mówimy, że zbiór B jest nadzbiorem zbioru A. Piszemy $A \subseteq B$ lub $B \supseteq A$. Jeśli dodatkowo w zbiorze B są elementy, które nie należą do zbioru A, to piszemy $A \subset B$ lub $B \subset A$.

Przykład 2.1 Zbiór mężczyzn jest zawarty w zbiorze wszystkich ludzi. ■

Przykład 2.2 Zbiór ludzi jest zawarty w zbiorze wszystkich ssaków. ■

Przykład 2.3 Zbiór trójkątów jest zawarty w zbiorze wszystkich figur geometrycznych. ■

Przykład 2.4 Zbiór parzystych liczb naturalnych jest zawarty w zbiorze wszystkich liczb naturalnych. ■

Jeśli dwa zbiory mają te same elementy, to mówimy, że są one równe, piszemy wtedy $A = B$. Oczywiście jeśli $A \subseteq B$ i $A \supseteq B$, to $A = B$ i na odwrót. Zbiór, który nie zawiera żadnego elementu nazywamy pustym i oznaczamy symbolem $\emptyset$. Zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru.

Przykład 2.5 Zbiór punktów danego odcinka, których odległości od obu jego końców są liczbami całkowitymi jest pusty, jeśli długość odcinka nie jest liczbą całkowitą; jeśli długość odcinka jest równa liczbie całkowitej n, to zbiór ten składa się z $n+1$ punktów. Np. jeśli długość odcinka jest równa dwa, to zbiór składa się z obu końców i środka odcinka, jeśli długość odcinka jest równa $\frac{3}{2}$, to zbiór jest pusty. ■

Przykład 2.6 Zbiór ulic w danej miejscowości dłuższych niż 5 km. Jeśli daną miejscowością jest Warszawa, to zbiór ten jest niepusty — jednym z jego elementów jest ulica Puławska. Jeśli daną miejscowością jest Lędyczek, który w 1996 r miał 520 mieszkańców, to zbiór ten jest pusty. ■

Przykład 2.7 Zbiór nieśmiertelnych żółwi jest pusty. ■

Jeśli wszystkimi elementami zbioru A są $a, b, c, \ldots$, to piszemy $A = \{a, b, c, \ldots\}$. Na przykład, jeśli D jest zbiorem wszystkich cyfr dziesiątkowego układu pozycyjnego, to zachodzi równość $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, jeśli B jest zbiorem parzystych liczb naturalnych, które nie są większe niż 10, to $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Zachodzi równość $\{1, 2\} = \{2, 1\}$, bo oba zbiory mają te same elementy tylko wypisane w różnej kolejności. Mamy też równość $\{1, 1, 2\} = \{1, 2\}$, bo w obu zbiorach wystepują te same elementy, choć po lewej stronie jedynka została wypisana dwukrotnie.

$\{\{1\}\} \neq \{1\}$, bo elementem i to jedynym pierwszego zbioru jest **zbiór** złożony z liczby 1, a drugiego — **liczba** 1.

Zbiory można określać inaczej np. rozpatrując zbiór wszystkich elementów jakiegoś zbioru A, które mają pewną własność. Zbiór tak określony oznaczamy za pomocą nawiasu klamrowego, po symbolu $a \in A$ i dwukropku piszemy, o jaką własność chodzi.

Przykład 2.8 $\{n \in \mathbb{N}\colon\ 2$ jest dzielnikiem liczby $n\}$ jest zbiorem wszystkich parzystych liczb naturalnych ($\mathbb{N}$ zawsze oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych). ■

Przykład 2.9 Zbiór

$$\{n \in \mathbb{N}\colon \quad n < 20 \text{ i } n \text{ podzielne przez } 3\}$$

składa się z liczb 3, 6, 9, 12, 15 i 18, zatem

$\{n \in \mathbb{N}: \quad n < 20 \text{ i } n \text{ podzielne przez } 3\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\,.\}$ ■

Pojęcie zbioru upraszcza formułowanie wielu twierdzeń — często nawet umożliwia ich dokładne sformułowanie. Zbiory wprowadzono do matematyki w drugiej połowie XIX wieku — wtedy też zaczęto badać strukturę samych zbiorów, bez wnikania w naturę ich elementów. Część matematyki zajmująca się badaniem takich własności nazywana jest *teorią mnogości*.

ELEMENTY KOMBINATORYKI i DWUMIAN NEWTONA

Przyjrzyjmy się następującym pytaniom.

1. Ile różnych liczb czterocyfrowych można utworzyć z cyfr 1, 2, 3, 4 tak, by każda cyfra w jeden liczbie występowała tylko raz?
2. Na ile sposobów można ustawić na półce cztery różne tomy jednego dzieła?

W istocie rzeczy treść obu pytań jest taka sama. Chodzi o to na ile różnych sposobów można uporządkować elementy zbioru czteroelementowego. W dalszym ciągu będziemy używać, zgodnie z przyjętym w matematyce zwyczajem, słowa **permutacja** (czyli przestawianie — z łaciny) **zbioru n–elementowego** zamiast — uporządkowanie elementów zbioru n–elementowego.

Liczbę permutacji zbioru n–elementowego oznaczać będziemy symbolem $n!$ (czytaj: n silnia). Możemy teraz powiedzieć, że odpowiedzi na oba pytania są takie same, mianowicie $4!$. Na razie nic to nie daje, bo nie umiemy ,,obliczyć" liczby $4!$.

Wypada znaleźć wzór pozwalający obliczać $n!$.

1° Zauważmy, że $1! = 1$, bo elementy zbioru złożonego z jednego tylko elementu można uporządkować na jeden sposób.

2° Wyznaczymy liczbę $(n+1)!$ za pomocą liczby $n!$. Możemy rozważać permutacje zbioru $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$. Permutacji tego zbioru z liczbą 1 na pierwszym miejscu jest tyle, ile permutacji zbioru $\{2, 3, \ldots, n, n+1\}$, więc $n!$. Podobnie permutacji z liczba 2 na początku jest tyle, ile permutacji zbioru $\{1, 3, 4, \ldots, n, n+1\}$, więc również $n!$. Tyle samo jest też permutacji z liczbą 3 na początku itd. Wobec tego wszystkich permutacji jest $(n+1) \cdot n!$, zatem $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Z zasady indukcji zupełnej wynika więc

Twierdzenie 3.1
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ dla każdej liczby naturalnej n. ■

Możemy więc odpowiedzieć na zadane na wstępie pytania: liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach oraz sposobów ustawienia czterech tomów na półce jest $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Teraz zajmiemy się trzema innymi pytaniami.

3° Ile trzeba wypełnić kuponów Dużego Lotka, aby mieć pewność, że skreśliliśmy 6 wylosowanych liczb?

4° Na płaszczyźnie danych jest 7 prostych. Żadne dwie z nich nie są równoległe. Żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt. Ile jest wszystkich punktów przecięcia?

5° Dane są liczby x_1, x_2, x_3, ... ,x_n, y_1, y_2, y_3, ... , y_n. Rozpatrujemy iloczyn $(x_1+y_1)(x_2+y_2)(x_3+y_3)\cdot\ldots\cdot(x_n+y_n)$. Jeżeli otworzymy nawiasy, tzn. skorzystamy z rozdzielności mnożenia względem dodawania, to otrzymamy sumę wielu iloczynów, w każdym z nich pojawi się pewna liczba iksów oraz pewna liczba igreków. Dla $n = 3$ wygląda to tak

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)(x_3 + y_3) = x_1x_2x_3 + x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + \\ + x_1y_2y_3 + y_1x_2x_3 + y_1x_2y_3 + y_1y_2x_3 + y_1y_2y_3\,.$$

Niech $k \geqslant 0$ będzie liczbą całkowitą nie większą niż n. Ile jest w długiej sumie składników, w których występuje dokładnie $n - k$ iksów i k igreków?

Bez trudu można zauważyć, że wszystkie te pytania są zadaniami jednego typu. W pierwszym pytamy o liczbę sześcioelementowych podzbiorów zbioru, który ma 49 elementów. W drugim — o liczbę par (więc dwuelementowych podzbiorów) prostych, których jest 7. W trzecim pytaniu chodzi o k–elementowe podzbiory zbioru składającego się z n elementów (element to jeden z nawiasów). Trzecie pytanie jest najogólniejsze.

Liczbę k–elementowych podzbiorów zbioru n–elementowego oznaczamy **symbolem Newtona** $\binom{n}{k}$. Znajdziemy teraz wzór, za pomocą którego można obliczyć $\binom{n}{k}$.

Lemat 3.2
Jeśli k i n są liczbami naturalnymi i $1 \leqslant k \leqslant n$, to zachodzi równość $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

Dowód. k–elementowy podzbiór zbioru $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ albo jest zawarty w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$, albo zawiera element $n+1$. Zbiorów „pierwszego rodzaju" jest $\binom{n}{k}$. Zbiorów „drugiego rodzaju" jest $\binom{n}{k-1}$, bowiem każdy z nich jest wyznaczony przez $k-1$–elementowy podzbiór zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Wynika stąd, że wszystkich k–elementowych podzbiorów zbioru $n+1$–elementowego jest $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k+1}$. ■

Twierdzenie 3.3
Dla dowolnych nieujemnych liczb całkowitych k, n, dla których $k \leqslant n$, zachodzi równość $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$.[3.1]

Dowód. Zastosujemy indukcję względem n. Niech T_n oznacza zadanie: *dla każdej nieujemnej liczby całkowitej $k \leqslant n$ zachodzi równość $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.*

1° Zdanie T_0 jest prawdziwe, bo $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\cdot 0!} = 1$ a zbiór pusty ma dokładnie jeden podzbiór 0–elementowy, czyli pusty.

2° Załóżmy, że zdanie T_n jest prawdziwe i $k > 0$. Mamy wtedy

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k+1)+k}{k\cdot(n-k+1)} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k\cdot(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}$$

Pierwsza równość wynika z lematu, druga z założenia indukcyjnego, a potem już tylko działania na ułamkach. Udowodniliśmy prawdziwość zdania T_n przy założeniu, że $n \geqslant k > 0$.

Mamy $\binom{n+1}{0} = 1$, bo jest jeden zbiór pusty i $\frac{(n+1)!}{0!(n+1)!} = 1$, więc $\binom{n+1}{0} = \frac{(n+1)!}{0!(n+1)!}$. Mamy też $\binom{n+1}{n+1} = 1$, bo zbiór, który ma $n+1$ elementów zawiera tylko jeden podzbiór $n+1$–elementowy (mianowicie siebie) i $\frac{(n+1)!}{(n+1)!0!} = 1$, więc również $\binom{n+1}{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!0!}$. ■

Podamy teraz nieco inny dowód tego twierdzenia. Załóżmy, że $1 \leqslant k \leqslant n$. Mamy wybrać k elementów ze zbioru liczącego n elementów. Pierwszy możemy wybrać na n sposobów. Drugi

[3.1] W ostatniej równości zakładamy, że $k \geqslant 1$.

element wybieramy spośród $n-1$ elementów, więc możemy to zrobić na $n-1$ sposobów. Następny element możemy wybrać na $n-2$ sposoby itd. Stąd wynika, że k elementów możemy wybrać na $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ sposobów, ale mówimy tu o uporządkowanym wybieraniu: wiadomo, który element jest pierwszy, który drugi itd. Ponieważ k elementów można uporządkować na $k!$ sposobów, więc liczba nieuporządkowanych wyborów równa jest $\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$. ■

Teraz można łatwo odpowiedzieć na zadane pytania.

3° Sześć liczb z czterdziestu dziewięciu można wybrać na $\binom{49}{6} = \frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 13\,983\,816$ sposobów.

4° Siedem prostych przecina się w $\binom{7}{2} = \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2} = 21$ punktach.

5° Składników zawierających $n-k$ iksów i k igreków jest $\binom{n}{k}$.

Zauważmy, że z odpowiedzi na ostatnie pytanie wynika, że jeśli $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a$ i $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = b$, to w rozwinięciu $(a+b)^n$ na sumę wielu składników wyraz $a^{n-k}b^k$ występuje ze współczynnikiem $\binom{n}{k}$. Stąd wynika

Twierdzenie 3.4 (dwumian Newtona)

$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i naturalnej n. ■

Udowodnimy wzór Newtona raz jeszcze stosując indukcję. Skorzystamy z lematu 3.2.

1° Oczywiście $(a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$.

2° Załóżmy, że zachodzi równość

$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$.

Mamy wtedy $\left(\text{przyp. } \binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0} \text{ i } \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}\right)$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \left(\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n\right)(a+b) = \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}ab^n = \\
&\qquad + \binom{n}{0}a^n b + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1} = \\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \cdots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}.
\end{aligned}$$

Dowód został zakończony. ■

Podstawiając we wzorze dwumianowym $a = 1 = b$ otrzymujemy $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$. Udowodniliśmy więc, że

Twierdzenie 3.5 (o liczbie podzbiorów)
Zbiór n–elementowy ma 2^n podzbiorów. ■

Tak jak poprzednio można udowodnić to twierdzenie bezpośrednio. Jest ono prawdziwe dla zbioru jednoelementowego, bo ma on dwa podzbiory: pusty i samego siebie. Załóżmy teraz, że zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$ ma 2^n podzbiorów. Podzielimy na dwie klasy podzbiory zbioru $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$: te, które zawierają liczbę $n+1$ i te które jej nie zawierają. Tych drugich jest tyle, ile podzbiorów ma zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$, więc 2^n. Pierwszych jest tyle samo, bo uzyskujemy je z drugich przez dołożenie liczby $n+1$. Wszystkich jest więc $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Zakończyliśmy dowód indukcyjny twierdzenia o liczbie podzbiorów. ■

Blaise Pascal wpadł na pomysł, by zapisywać współczynniki rozwinięcia $(a+b)^n$ w kolejnych wierszach trójkąta nazwanego później jego imieniem:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Wypisaliśmy pierwszych sześć wierszy trójkąta Pascala, oczywiście można wypisywanie kontynuować, ale zapewne każdy już widzi, jaki jest mechanizm tworzenia następnego wiersza z danego. Ten schemat działa dzięki wzorowi $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

Zadania

1. Numer telefoniczny może zaczynać się od dowolnej z dziesięciu cyfr. Ile jest siedmiocyfrowych numerów telefonicznych, których wszystkie cyfry są:

a. różne; b. nieparzyste.

2. 9 osób ustawia się w szereg. Ile jest różnych ustawień, w których wybrane trzy osoby stoją jedna obok drugiej?

3. Na ile sposobów można podzielić 30 osób na trzy grupy dziesięcioosobowe (kolejność grup oraz kolejność osób w grupie jest nieistotna)?

4. Iloma sposobami można podzielić grupę złożoną z trzech dziewczynek i trzech chłopców na dwie grupy, po troje dzieci w każdej, tak by w każdej grupie był co najmniej jeden chłopiec?

5. Na ile sposobów można podzielić grupę złożoną z czterech dziewczynek i czterech chłopców na dwie grupy po czworo dzieci w każdej, tak by w każdej grupie był co najmniej jeden chłopiec?

6. Ile par tanecznych (różnopłciowych) można utworzyć z m pan i n panów?

7. Na płaszczyźnie k prostych równoległych przecięto n prostymi równoległymi. Ile powstało równoległoboków?

8. Czy wśród liczb $1, 2, 3, \dots, 10^n$ więcej jest tych, w których zapisie dziesiętnym występuje siódemka co najmniej raz, czy tych, które zapisujemy nie używając siódemki?
Przeanalizować przypadki $n = 3$, $n = 6$, $n = 7$, $n = 10$.

9. Wierzchołki n–kąta leżą na okręgu. Żaden punkt wewnętrzny koła nie leży na trzech przekątnych tego wielokąta. Na ile części dzielą te płaszczyznę wszystkie boki i przekątne tego wielokąta?

10. Niech $k \geqslant 1$. Ile rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich ma równanie $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$?

11. Niech $k \geqslant 1$. Ile rozwiązań w liczbach całkowitych nieujemnych ma równanie $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$?

12. Ile jest par krawędzi danego sześcianu nie mieszczących się w jednej płaszczyźnie?

13. Wykazać, że liczba podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, które nie zawierają dwu kolejnych liczb naturalnych jest wyrazem ciągu Fibonacciego: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$. Którym?

14. Ile jest takich permutacji zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 31\}$, że liczby 1 i 2 występują w nich jedna obok drugiej?

15. Ile jest takich permutacji zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 31\}$, że iloczyn *każdych* dwu sąsiednich liczb jest parzysty?

16. Na ile sposobów można posadzić na 25 miejscowej ławie

10 panów i 15 pań, tak by między każdymi dwoma panami siedziała co najmniej jedna pani.

17. Na ile sposobów można posadzić n osób przy okrągłym stole? Dwa sposoby uważamy za takie same, jeśli w obydwóch każdy ma tych samych sąsiadów po obu stronach.

18. Poprowadzono $n-1$ prostych równoległych do poziomych boków danego kwadratu tak, że dzielą one boki pionowe na n równych odcinków i $n-1$ prostych pionowych, które dzielą boki poziome na n równych odcinków. Ile powstało kwadratów, a ile prostokątów?

19. Poprowadzono $n-1$ płaszczyzn prostopadłych do każdej krawędzi danego sześcianu, które dzielą ją na n równych odcinków. Ile powstało sześcianów, a ile prostopadłościanów?

20. Na ile sposobów można wybrać k pól z szachownicy $n \times n$, aby w żadnej kolumnie, ani w żadnym wierszu nie znalazły się dwa pola?

21. Iloma sposobami można pomalować ściany sześcianu sześcioma danymi kolorami, jeśli za różne uważamy te sposoby, które nie dadzą się otrzymać (jeden z drugiego) przez obrót sześcianu? Każdą ścianę malujemy jednym kolorem, innym niż pozostałe ściany.

22. Wykazać, że $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

23. Wykazać, że $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$.

24. Wykazać, że $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + +3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$ dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$.

25. Wykazać, że $(a+b+c)^n = \sum \frac{n!}{k!\ell!m!} a^k b^\ell c^m$ przy czym sumowanie rozciąga się na takie wszystkie trójki nieujemnych liczb całkowitych, że $k + \ell + m = n$.

26. Udowodnić, że $\sum \frac{n!}{k!\ell!m!} = 3^n$ przy czym sumowanie rozciąga się na takie wszystkie trójki nieujemnych liczb całkowitych, że $k + \ell + m = n$.

27! Udowodnić, że $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \binom{n}{5} + \cdots = 0$.

28! Udowodnić, że $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$.

29! Udowodnić, że $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}$.

30. Obliczyć $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\binom{n}{n-1} + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$.

31. Obliczyć $\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - 4\binom{n}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}$

RACHUNEK ZDAŃ

Zdania z zakresu matematyki są albo prawdziwe, albo fałszywe — w matematyce nie stosuje się zdań wyrażających życzenie, przypuszczenie itp. Jeśli zdanie jest prawdziwe, to mówimy, że jego wartość logiczna jest 1, zdaniom fałszywym przypisujemy wartość logiczną 0.

Z dwóch zdań możemy utworzyć na wiele różnych sposobów nowe zdanie. Najprostsze metody w matematyce to:

(i) połączenie dwóch zdań α i β spójnikiem **i** — nowe zdanie to koniunkcja zdań α, β, oznaczamy je symbolem $\alpha \wedge \beta$.

(ii) połączenie dwóch zdań α i β spójnikiem **lub** — nowe zdanie to alternatywa zdań α, β, oznaczamy je symbolem $\alpha \vee \beta$.

(iii) zbudowanie zdania postaci „jeśli α, to β" — nowe zdanie nazywamy **implikacją** (wynikaniem), α nazywamy poprzednikiem implikacji a β — następnikiem, oznaczamy je symbolem $\alpha \Rightarrow \beta$.

(iv) zaprzeczenie danemu zdaniu α, oznaczamy je przez $\neg\alpha$.

Ustalimy teraz, kiedy koniunkcja, alternatywa, implikacja i negacja są zdaniami prawdziwymi, a kiedy — fałszywymi.

Koniunkcja. Niech α oznacza zdanie: *liczba* 2 *dzieli liczbę* 12, β — zdanie: *liczba* 3 *dzieli liczbę* 12. Wtedy zdanie $\alpha \wedge \beta$ oznacza zdanie: *liczba* 2 *dzieli liczbę* 12 *i liczba* 3 *dzieli liczbę* 12, tzn. *liczby* 2 *i* 3 *są dzielnikami liczby* 12. W tym przypadku ze zdań prawdziwych α i β otrzymaliśmy prawdziwe zdanie $\alpha \wedge \beta$. Niech α oznacza zdanie: *liczba* 5 *dzieli liczbę* 12, β — zdanie: *liczba* 3 *dzieli liczbę* 12. Wtedy zdanie $\alpha\wedge\beta$ oznacza zdanie: *liczba* 5 *dzieli liczbę* 12 *i liczba* 3 *dzieli liczbę* 12, tzn. *liczby* 5 *i* 3 *są dzielnikami liczby* 12. W tym przypadku ze zdania fałszywego α i prawdziwego β otrzymaliśmy nieprawdziwe zdanie $\alpha \wedge \beta$. Jeśli α oznacza zdanie: *liczba* 5 *dzieli liczbę 12*, β — zdanie: *liczba* 7 *dzieli liczbę* 12, to zdanie $\alpha \wedge \beta$ oznacza zdanie: *liczba* 5 *dzieli liczbę* 12 *i liczba* 7 *dzieli liczbę* 12, tzn. *liczby* 5 *i* 7 *są dzielnikami liczby* 12. W tym przypadku z dwóch zdań fałszywych α i β otrzymaliśmy zdanie fałszywe $\alpha \wedge \beta$.

Te trzy przykłady sugerują prawdziwość następującego prawa: koniunkcja dwóch zdań jest prawdziwa, jeśli oba zdania są prawdziwe. Jeśli jedno ze zdań α i β lub oba te zdania są fałszywe, to również ich koniunkcja $\alpha \wedge \beta$ jest fałszywa. Symbolicznie zapisujemy to prawo tak: $1 \wedge 1 \equiv 1$, $1 \wedge 0 \equiv 0$, $0 \wedge 1 \equiv 0$, $0 \wedge 0 \equiv 0$.

Alternatywa. W matematyce przyjmujemy, że alternatywa $\alpha \vee \beta$ dwóch zdań jest prawdziwa, jeśli choćby jedno z tych zdań jest prawdziwe oraz że alternatywa dwóch zdań fałszywych jest zdaniem fałszywym. Symbolami zapisujemy to tak:

$$1 \vee 1 \equiv 1, \qquad 1 \vee 0 \equiv 1, \qquad 0 \vee 1 \equiv 1, \qquad 0 \vee 0 \equiv 0.$$

Zdanie: *liczba* 2 *jest dzielnikiem liczby* 12 *lub liczba* 3 *jest dzielnikiem liczby* 12 jest prawdą; zdanie: *liczba* 2 *jest dzielnikiem liczby* 12 *lub liczba* 5 *jest dzielnikiem liczby* 12 jest też prawdą, natomiast zdanie *liczba* 5 *jest dzielnikiem liczby* 12 *lub liczba* 7 *jest dzielnikiem liczby* 12 jest fałszem.

Wypada tu podkreślić różnicę miedzy potocznym znaczeniem spójnika *lub* a jego matematycznym znaczeniem. W mowie potocznej zazwyczaj używamy spójnika *lub* wtedy, gdy jedno ze zdań jest prawdą, a drugie — fałszem.

Implikacja Zdanie $\alpha \Rightarrow \beta$ uważamy za fałszywe, gdy poprzednik α jest prawdą, a następnik β, — fałszem, tzn. z prawdy fałsz nie wynika. W innych przypadkach implikacja $\alpha \Rightarrow \beta$ jest prawdziwa, tzn. prawda wynika zarówno z prawdy jak i z fałszu. Symbolicznie zapisujemy to tak:

$$(1 \Rightarrow 0) \equiv 0, \quad (0 \Rightarrow 0) \equiv 1, \quad (1 \Rightarrow 1) \equiv 1, \quad (0 \Rightarrow 1) \equiv 1.$$

Podkreślić trzeba zdecydowanie, że mówimy tu o prawdziwości zdania złożonego $\alpha \Rightarrow \beta$, a nie o prawdziwości zdania β. Na przykład zdanie *jeśli liczba* 4 *jest dzielnikiem liczby* 12*, to liczba* 2 *jest dzielnikiem liczby* 12 jest zdanie prawdziwym bo poprzednik i następnik są zdaniami prawdziwymi. Zdanie *jeśli liczba* 2 *dzieli liczbę* 6*, to liczba* 5 *dzieli liczbę* 6 jest fałszem, bo jest prawdą, a następnik — fałszem. Zdanie *jeśli liczba* 2 *dzieli liczbę* 7*, to liczba* 5 *dzieli liczbę* 7 jest prawdziwe, bo poprzednik i następnik są zdaniami fałszywymi. Zdanie *jeśli liczba* 5 *dzieli liczbę* 6*, to liczba* 2 *dzieli liczbę* 6 jest zdaniem prawdziwym, bo poprzednik jest fałszywy, a następnik — fałszywy.

Negacja. Zdanie $\neg\alpha$ jest prawdziwe, jeśli zdanie α jest fałszywe, tzn. zaprzeczenie fałszu jest prawdą, symbolicznie zapisujemy to wzorem $\neg 0 \equiv 1$. Zdanie $\neg\alpha$ jest fałszywe, jeśli zdanie α jest prawdziwe, tzn. zaprzeczenie prawdy jest fałszem: $\neg 1 \equiv 0$.

Ta regułą jest całkowicie zgodna z potocznym rozumieniem zdania *nie jest prawdą, że ...*

Przykład 4.1 Zdanie *nie jest prawdą, że liczba* 2 *dzieli liczbę* 5 jest prawdziwe, bo jest zaprzeczeniem fałszu. Zdanie *nie jest prawdą, ze liczba* 2 *dzieli liczbę* 4 jest zaprzeczeniem prawdy, czyli fałszem. ■

Równoważność. Jeśli ze zdania α wynika zdanie β i ze zdania β wynika zdanie α, to mówimy, że zdania te są równoważne. Piszemy wtedy $\alpha \Leftrightarrow \beta$ lub $\alpha \equiv \beta$. Często zamiast mówić: *zdanie* α *jest równoważne zdaniu* β mówimy, że *zdanie* α *zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdanie* β. Oczywiście prawda jest równoważna prawdzie $(1 \Leftrightarrow 1) \equiv 1$, fałsz — fałszowi $(0 \Leftrightarrow 0) \equiv 1$, natomiast prawda nie jest równoważna fałszowi: $(1 \Leftrightarrow 0) \equiv 0$ i $(0 \Leftrightarrow 1) \equiv 0$.

Przykład 4.2 Liczba 2 dzieli liczbę 28 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba -2 dzieli liczbę 28. Liczba całkowita a dzieli liczbę całkowitą b wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $-a$ dzieli liczbę b. Liczba jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 2 i przez 3. ■

Wypowiemy teraz kilka podstawowych praw logiki, których będziemy wielokrotnie używać. Lista ta nie będzie pełna, ale Czytelnik — w razie potrzeby — wyprowadzi sobie inne.

Twierdzenie 4.1 (o przechodniości implikacji)
Jeśli ze zdania α wynika zdanie β i ze zdania β wynika zdanie γ, to ze zdania α wynika zdanie γ:

$$\big((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma)\big) \Rightarrow \big(\alpha \Rightarrow \gamma\big).$$

Dowód. Implikacja jest fałszywa jedynie wtedy, gdy poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy. Jeśli zdanie $\alpha \Rightarrow \gamma$ jest fałszywe, to zdanie α jest prawdziwe, a zdanie γ — fałszywe. Zdanie $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma)$ ma być prawdziwe. Oba człony tej koniunkcji muszą być prawdziwe, zatem zdanie β musi być jednocześnie prawdziwe (bo $\alpha \Rightarrow \beta$) i fałszywe (bo $\beta \Rightarrow \gamma$), ale to nie jest możliwe. Dowód został zakończony. ■

Przykład 4.3 Oznaczmy literą α zdanie: $a^3 \neq 0$, literą β

— zdanie: $a \neq 0$, literą γ — zdanie: $a^2 > 0$.

Oczywiście $\alpha \Rightarrow \beta$, tzn. jeśli $a^3 \neq 0$, to $a \neq 0$ i $\beta \Rightarrow \gamma$, czyli: jeśli $a \neq 0$, to $a^2 > 0$. Stad i z przechodniości implikacji wynika, że $\alpha \Rightarrow \gamma$, czyli: jeśli $a^3 \neq 0$, to $a^2 > 0$. ■

Przykład 4.4 Niech A, B, C będą dowolnymi zbiorami. Niech α oznacza zdanie: $A \subseteq B$, β — zdanie: $B \subseteq C$, a γ zdanie: $A \subseteq C$. Zdanie α można rozumieć w taki sposób: jeśli $p \in A$, to $p \in B$, analogicznie zdania β i γ. Z przechodniości implikacji wynika, że w tej sytuacji jeśli $p \in A$, to $p \in C$, zatem $A \subseteq C$. Innymi słowy z przechodniości implikacji wynika przechodniość zawierania, a to oznacza, że podzbiór podzbioru jest podzbiorem zbioru. ■

Twierdzenie 4.2 (reguła odrywania)
Jeśli α jest zdaniem prawdziwym i ze zdania α wynika zdanie β, to zdanie β jest prawdziwe, czyli $\big(\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta)\big) \Rightarrow \beta$.

Dowód. Implikacja jest nieprawdziwa jedynie wtedy, gdy jej następnik jest fałszem, a poprzednik prawdą. Musi więc być $\beta \equiv 0$ i $\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta) \equiv 1$, zatem $\alpha \equiv 1$ i $(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv 1$. Wobec tego zdanie α musiałoby być jednocześnie prawdziwe i fałszywe, a to nie jest możliwe.

Przykład 4.5 Niech α oznacza zdanie: *iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest liczb podzielną przez* 3, β — zdanie: *jeśli* a *jest liczbą całkowitą, to* $a^3 - a$ *jest liczbą podzielną przez* 3. Zdanie α jest prawdziwe. Implikacja $\alpha \Rightarrow \beta$ również, bowiem $a^3 - a = (a-1)a(a+1)$. Z reguły odrywania wynika prawdziwość zdania β. ■

Twierdzenie 4.3
Jeśli ze zdania $\neg\alpha$ wynika fałszywe zdanie β, to zdanie α jest prawdziwe: $\big((\neg\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \neg\beta\big) \Rightarrow \alpha$.

Dowód. Tak jak w poprzednich dowodach sprawdzimy, w jakiej sytuacji implikacja mogłaby być nieprawdziwa. Zdanie α, czyli następnik, musiałoby być fałszywe, a zdanie $(\neg\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \neg\beta$, czyli poprzednik, — prawdziwe. Oznacza to, że zdanie β musiałoby być fałszywe i implikacja $\neg\alpha \Rightarrow \beta$ — prawdziwa, ale to nie jest możliwe, bo zdanie $\neg\alpha$ jest prawdziwe, a zdanie β fałszywe. ■

Przykład 4.6 Niech α oznacza zdanie : *liczba* 44 *nie jest dzielnikiem liczby* 235, a β — zdanie: *liczba* 2 *jest dzielnikiem liczby* 235. Ze zdania $\neg\alpha$ wynika zdanie β, które jest fałszywe, więc zdanie α jest prawdziwe. ■

Twierdzenie 4.3 jest jednym z najprostszych schematów, wg. których przeprowadzamy tzw. ,,dowody nie wprost", czyli takie, w których z zaprzeczenia tezy wnioskujemy zdanie fałszywe.

Twierdzenie 4.4 (prawa de Morgana)
Zaprzeczeniem alternatywy dwóch zdań jest koniunkcja ich zaprzeczeń: $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)$.
Zaprzeczeniem koniunkcji dwóch zdań jest alternatywa ich zaprzeczeń: $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha) \vee (\neg\beta)$.

Dowód. Udowodnimy pierwsze z wymienionych praw. Strona lewa jest zdaniem prawdziwym wtedy i tylko wtedy, gdy alternatywa $\alpha \vee \beta$ jest zdaniem fałszywym, a to ma miejsce jedynie wtedy, gdy oba zdania α, β są fałszywe, a ten warunek jest równoważny temu, że koniunkcja ich zaprzeczeń, czyli zdań prawdziwych jest prawdziwa. W taki sam sposób można uzasadnić prawdziwość drugiego prawa de Morgana. ■

Przykład 4.7 Zdanie: *nieprawda, że liczby* 2 *i* 3 *są dzielnikami liczby* 8 jest równoważne zdaniu: 2 *nie jest dzielnikiem liczby* 8 *lub* 3 *nie jest dzielnikiem liczby* 8. Zdanie : *nieprawda, że liczba* 2 *lub liczba* 3 *dzieli liczbę* 8 jest równoważne zdaniu: 2 *nie dzieli liczby* 8 *i* 3 *nie dzieli liczby* 8. ■

Twierdzenie 4.5 (prawo podwójnego przeczenia)
Zaprzeczenie zaprzeczenia zdania α to zdanie α: $\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$. ■

Oczywisty dowód tego twierdzenia pomijamy. Podkreślić należy, że w języku polskim podwójne przeczenie oznacza często to samo co pojedyńcze, np. zdanie — ,, nie mam żadnego samochodu" oznacza, że autor tej wypowiedzi nie ma samochodu pomimo, że zostały tu użyte dwa przeczenia: ,,nie" oraz ,,żadnego".

Podane tu przykłady praw logicznych nie wyczerpują listy ważnych tautologii. Są natomiast jednymi z najczęściej stosowanych w matematyce. W zadaniach Czytelnik znajdzie więcej ważnych praw logiki. Można je łatwo udowodnić metodą zerojedynkową, tzn. podstawić 0 oraz 1 na wszystkie możliwe sposoby w miejsce zdań, następnie sprawdzić jaką wartość logiczną ma wtedy zdanie złożone. Jeśli zawsze otrzymujemy 1, to mamy do czynienia z prawem logiki. Takie zdania, które są zawsze prawdziwe, nazywane są również **tautologiami**.

Twierdzenia matematyczne mają postać implikacji. Jej poprzednik nazywany jest założeniem, a następnik — tezą. Dowód twierdzenia, z formalnego punktu widzenia, polega na stosowaniu praw logiki, przy czym za prawdziwe uważane są zdania udowodnione wcześniej oraz definicje. Ponieważ dowodzenie trzeba od czegoś zacząć, więc niektóre zdania uważane są za prawdziwe i niewymagające dowodu. Takie zdania nazywane s pewnikami lub aksjomatami. W teorii liczb rzeczywistych przyjmuje się bez dowodu między innymi, że dodawanie liczb rzeczywistych jest przemienne, tzn. $a+b=b+a$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b. Bez dowodu przyjmujemy też, że $a+(b+c)=(a+b)+c$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a,b,c, czyli łączność dodawania .

Znajomość praw logiki ułatwia sprawdzenie poprawności rozumowania. Zwykle jednak stosujemy na tyle oczywiste prawa logiki, że nie potrzeba się na nie w sposób jawny powoływać. Należy jedna zdawać sobie sprawę z tego, według jakiego schematu logicznego rozumujemy.

Dokładne sformułowanie założeń twierdzeń, pewników, definicji itp. jest ważne — chcemy mieć jakąś gwarancję tego, że rozumując nie dojdziemy do sprzeczności, czyli że nie udowodnimy jednocześnie zdania i jego zaprzeczenia, bo to zmusiłoby nas do uznań wszystkich zdań za prawdziwe. W kłopoty można popaść łatwo, jeśli nie sprecyzujemy, jak można używać słów i jakie jest ich dokładne znaczenie. Powiedzmy, że dowódca rozkazał żołnierzowi–fryzjerowi ogolić wszystkich tych żołnierzy, którzy nie ogolą się sami. Co ma zrobić ów nieszczęśnik? Czy ma się ogolić sam — wtedy ogoli żołnierza, który sam się goli, czy też ma się nie ogolić — wtedy nie ogoli jednego z żołnierzy, którzy nie ogolili się samodzielnie?[4.1]

[4.1] Przykład pochodzi od Bertanda Russella i jednego z nawybitniejszych filozofów i matematyków XIX i XX wieku (1872 – 1970).

Zadania

1. Udowodnić, że niezależnie od wartości logicznych zdań α i β prawdziwe są zdania:

(1) $(\neg\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow \alpha \vee \beta$;

(2) $\neg(\alpha \Rightarrow \neg\beta) \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta$;

te dwa wzory oznaczają, że można zdefiniować alternatywę i koniunkcję za pomocą negacji i implikacji;

(3) $(\neg\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$;

(4) $\big(\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)\big) \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta$;

te dwa wzory oznaczają z kolei, że można zdefiniować implikację i koniunkcję za pomoca negacji i alternatywy.

2. Zdefiniować implikację i alternatywę za pomocą koniunkcji i negacji.

3. Udowodnić, że negacji nie można zdefiniować za pomocą:

(1) alternatywy i koniunkcji;

(2) alternatywy i implikacji;

(3) koniunkcji i implikacji.

4. Zapisać za pomocą symboli logicznych i udowodnić następujące prawa logiki:

(1) jeśli ze zdania α wynika zdanie β i z zaprzeczenia zdania α wynika zdanie β, to zdanie β jest prawdziwe;

(2) jeśli prawdziwa jest alternatywa zdań α i β, to z tego, że ze zdania α wynika zdanie γ i ze zdania β wynika zdanie γ, wynika prawdziwość zdania γ.

5. Napisać zaprzeczenia następujących zdań:

(1) jeśli 7 jest liczbą dodatnią, to -7 jest liczbą ujemną;

(2) jeśli 2 i 5 są liczbami dodatnimi, to z tego, że $x > 2+5$ wynika, że $x > 0$;

(3) jeśli sześcian można ułożyć z cegieł o wymiarach $1\times2\times4$, to krawędź sześcianu ma długość różną od 6.

6. Udowodnić, że następujące zdania są tautologiami:

(1) $\alpha \Rightarrow \alpha$;	(2) $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$;
(3) $\alpha \Rightarrow \big(\beta \Rightarrow (\alpha \wedge \beta)\big)$;	(4) $\alpha \vee \neg\alpha$;
(5) $[(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \alpha] \Rightarrow \beta$.	(6) $\alpha \Rightarrow [(\beta \wedge \neg\alpha) \Rightarrow \gamma]$;
(7) $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$;	(8) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$;

(9) $[(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \alpha] \Rightarrow \alpha$; (10) $(\neg\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha$;
(11) $\neg\alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$; (12) $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha$;
(13) $[\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)] \Leftrightarrow [\beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)]$;
(14) $[\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)] \Rightarrow [(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)]$.

7. Z jakich praw logiki korzystamy w następujących rozumowaniach:

(a) Jeśli x jest liczbą nieparzystą, to liczba x^3 też jest nieparzysta. Suma dwu liczb nieparzystych jest parzysta, zatem jeśli x jest liczbą nieparzystą, to liczba $x^3 + x$ jest parzysta. Suma liczby parzystej i nieparzystej jest nieparzysta, zatem jeśli liczba x jest nieparzysta, to liczba x^3+x+1 jest nieparzysta. Jeśli liczba x jest parzysta, to x^3 też jest parzysta, więc liczba $x^3 + x + 1$ jest nieparzysta. Zarówno z założenia, że liczba x jest parzysta, jak i z założenia, że liczba x jest nieparzysta wynika, że liczba x^3+x+1 jest nieparzysta. Wynika stąd, że liczba $x^3 + x + 1$ jest nieparzysta dla każdej liczby całkowitej x .

(b) Niech a będzie liczbą naturalną, która nie jest podzielna przez 5 . Gdyby jakieś dwie liczby spośród a , $2a$, $3a$, $4a$ dawały taką samą resztę z dzielenia przez 5 , to po odjęciu mniejszej od większej otrzymalibyśmy liczbę podzielną przez 5 , a to jest niemożliwe, bo żadna z liczb a , $2a$, $3a$ nie dzieli się przez 5 . Oznacza to, że liczby a , $2a$, $3a$, $4a$ dają różne reszty z dzielenia przez 5 . Wobec tego resztami tymi są liczby 1 , 2 , 3 , 4 być może w innej kolejności. Wynika stąd, że liczby $a \cdot 2a \cdot 3a \cdot 4a$ i $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ dają z dzielenia przez 5 tę samą resztę, więc ich różnica, czyli liczba $4!a^4 - 4! = 4!(a^4 - 1)$ jest podzielna przez 5 . Ponieważ liczba pierwsza 5 nie dzieli liczby $4!$, zatem dzieli liczbę $a^4 - 1$. ■

DZIAŁANIA NA ZBIORACH

Definicja 5.1 (sumy zbiorów)
Sumą $A \cup B$ zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony ze wszystkich elementów zbioru A i wszystkich elementów zbioru B:

$$s \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B\,,$$

czyli x jest elementem zbioru $A \cup B$ wtedy i tylko wtedy, gdy należy do zbioru A lub do zbioru B. ■

Definicja 5.2 (części wspólnej zbiorów)
Częścią wspólną lub iloczynem $A \cap B$ zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony ze wszystkich tych elementów, które jednocześnie należą do zbioru A i do zbioru B:

$$s \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B\,.$$

Jeśli $A \cap B = \emptyset$, to mówimy, że zbiory A i B są rozłączne. ■

Definicja 5.3 (różnicy zbiorów)
Różnicą $A \setminus B$ zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony z tych elementów zbioru A, które nie są elementami zbioru B:

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B\,. \blacksquare$$

Definicja 5.4 (iloczynu kartezjańskiego zbiorów)
Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony ze wszystkich takich par (a,b), że $a \in A$ i $b \in B$. Pary różniące się kolejnością elementów uważamy za różne, tzn. $(a,b) = (c,d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c$ i $b = d$. Iloczyn kartezjański oznaczamy symbolem $A \times B$.
Przyjmujemy, że jeśli $A = \emptyset$ lub $B = \emptyset$, to $A \times B = \emptyset$. ■

Przykład 5.1 Niech $A = \{2,4,6,8\}$, $B = \{3,6,9\}$. Mamy $A \cup B = \{2,3,4,6,8,9\}$, $A \cap B = \{6\}$, $A \setminus B = \{2,4,8\}$, $B \setminus A = \{3,9\}$.
Elementami zbioru $A \times B$ są pary:

$$\begin{array}{l} (2,3),\ (2,6),\ (2,9),\\ (4,3),\ (4,6),\ (4,9),\\ (6,3),\ (6,6),\ (6,9),\\ (8,3),\ (8,6),\ (8,9), \end{array}$$

a zbioru $B \times A$ — pary:

$$\begin{array}{l} (3,2),\ (3,4),\ (3,6),\ (3,8),\\ (6,2),\ (6,4),\ (6,6),\ (6,8),\\ (9,2),\ (9,4),\ (9,6),\ (9,8). \end{array}$$

I jeszcze np. $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(6,6)\}$. ■

Następujące twierdzenie wynika od razu z definicji:

Twierdzenie 5.5 (o przemienności i łączności)
Dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą wzory:
$$A \cup B = B \cup A\,,\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\,,$$
$$A \cap B = B \cap A\,,\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\,. \ ■$$

Twierdzenie 5.6 (o rozdzielności)
Dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą równości:
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,,$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,.$$
Dowód. Jeśli $x \in A$, to $x \in A \cup B$ i $x \in A \cup C$, zatem $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Jeśli $x \in B \cap C$, to $x \in B \subseteq B \cup A$ oraz $x \in C \subseteq C \cup A$, zatem $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Wykazaliśmy, że $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Załóżmy, że $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Wtedy $x \in A \cup B$ i $x \in A \cup C$. Jeśli $x \in A$, to $x \in A \cup (B \cap C)$, a jeśli $x \notin A$, to $x \in B$ i $x \in C$, więc $x \in B \cap C$, zatem $x \in A \cup (B \cap C)$. Wobec tego $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Udowodniliśmy, że
$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)\,.$$
Stąd wynika, że $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Drugą równość wykazujemy w taki sam sposób. ■

Twierdzenie 5.7 (o dopełnieniu dopełnienia)
Dla dowolnych zbiorów A, B zachodzi równość
$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B\,.$$
Dowód. $x \in A \setminus (A \setminus B) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg\big(x \in A \wedge \neg(x \in B)\big) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge \big(\neg(x \in A) \vee (x \in B)\big) \Leftrightarrow \big((x \in A) \wedge \neg(x \in A)\big) \vee$
$\vee \big((x \in A) \wedge (x \in B)\big) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B) \Leftrightarrow x \in A \cap B$. ■

Uwaga 5.8
Jeśli $B \subseteq A$, to $A \setminus (A \setminus B) = B$. Czytelnik zwróci uwagę na to, że wzór ten bardzo przypomina prawo podwójnego przeczenia, zresztą użyte w dowodzie twierdzenia 5.7.

Warto też zauważyć, że dowodzone twierdzenie jest oczywiste: po usunięciu ze zbioru tych jego elementów, które są poza zbiorem B, zostają w zbiorze A tylko te elementy, które są elementami zbioru A, a to oznacza, że zbiór $A \setminus (A \setminus B)$ jest równy $A \cap B$. ■

Twierdzenie 5.9 (wzory de Morgana)
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
Dowód. Udowodnimy pierwszy z tych wzorów.
$x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in B \cup C)$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(\in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B) \wedge \neg(x \in C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \big(x \in A \wedge \neg(x \in B)\big) \wedge \big(x \in A \wedge \neg(x \in C)\big) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \wedge (x \in A \setminus C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
Dowód drugiego wzoru jest prawie taki sam. ■

Uwaga 5.10
W dowodzie twierdzenia 5.10 skorzystaliśmy z praw de Morgana z rachunku zdań. Czytelnik widzi, że po zastąpieniu koniunkcji zdań iloczynem zbiorów, alternatywy zdań — sumą zbiorów, zaprzeczenia zdania — odejmowaniem zbioru od zbioru A w prawach de Morgana z rachunku zdań, otrzymujemy wzory de Morgana dla rachunku zbiorów. ■

Zadania

1. Niech $n(A)$ będzie liczbą elementów zbioru skończonego A. Dowieść, że jeśli zbiory A i B są skończone, to $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ i $n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B)$.

2. Niech A_1, A_2, ..., A_k będą zbiorami skończonymi. Udowodnić, że zachodzi wtedy wzór:
$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + \cdots + n(A_k) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - \ldots - n(A_1 \cap A_k) - n(A_2 \cap A_3) - \ldots - n(A_{k-1} \cap A_k) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \cdots + (-1)^{k-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k).$$

3. Różnicą symetryczną $A \dot{-} B$ dwóch zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony z tych i tylko tych elementów, które należą do dokładnie jednego z tych zbiorów, czyli $A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Udowodnić, że:
(1) $A \dot{-} B = B \dot{-} A$,

(2) $A \dot{-} B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,

(3) $A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C$.

4. Udowodnić, że zbiór $A_1 \dot{-} A_2 \dot{-} \ldots \dot{-} A_k$ składa się z tych i tylko tych elementów, które należą do nieparzystej liczby zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_k$. (Nawiasów nie piszemy, bo na mocy poprzedniego zadania różnica symetryczna jest działaniem łącznym.)

5. Znaleźć wzór wyrażający liczbę elementów różnicy symetrycznej k zbiorów: $A_1 \dot{-} A_2 \dot{-} \ldots \dot{-} A_k$ w zależności od liczb $n(A_1)$, $n(A_2)$,$\ldots, n(A_k)$, $n(A_1 \cap A_2)$, $n(A_1 \cap A_3)$, $\ldots$, $n(A_{k-1} \cap A_k)$, $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$, $\ldots$, $n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)$.

KWANTYFIKATORY

W matematyce często pojawiają się zdania postaci *dla każdego x zachodzi $\varphi(x)$*, *dla pewnego x zachodzi $\varphi(x)$*, np. dla każdej liczby naturalnej x zachodzi nierówność $x \geqslant 1$, dla pewnej liczby naturalnej x zachodzi nierówność $x < 100$, każdy zbiór zawiera zbiór pusty, istnieje liczba naturalna, która nie jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych (np. liczba 3).

Wyrażenia *dla każdego $x\ldots$*, dla każdego $x \in A$ zastępujemy w razie potrzeby symbolem $\forall_x$. $\forall_{x\in A}$ — ten symbolem nazywamy kwantyfikatorem[6.1] ogólnym lub dużym. Wyrażenia *dla pewnego x*, *dla pewnego $x \in A$*, *istnieje takie x*, *że ...*, *istnieje takie $x \in A$*, *że* zastępujemy symbolem $\exists$, $\exists_{x\in A}$. Ten symbol nazywamy kwantyfikatorem szczegółowym lub małym, czasem egzystencjalnym.

Stosując wprowadzone właśnie oznaczenia zamiast słów można cztery zdania wypowiedziane na początku tego rozdziału zapisać tak: $(\forall_{x\in\mathbb{N}})(x \geqslant 1)$, $(\exists_{x\in\mathbb{N}})(x < 100)$, $(\forall_A)(A \supseteq \emptyset)$, $(\exists_{x\in\mathbb{N}})(\forall_{a,b\in\mathbb{Z}})(x \neq a^2+b^2)$. Podkreślić wypada, że należy je przeczytać tak: *każda liczba naturalna x jest większa od 1 lub równa 1*, *istnieje liczba naturalna x mniejsza niż 100*, *każdy zbiór A zawiera zbiór pusty*, *istnieje liczba naturalna x, która nie jest równa sumie a^2+b^2 dla każdych liczb całkowitych a, b* — tu symbole $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ oznaczają jak zwykle zbiory liczb naturalnych i całkowitych. Pod znakiem kwantyfikatora może też wystąpić zdanie, np. $(\forall_{x>7})(x^2 > 49)$, należy to przeczytać tak: kwadrat każdej liczby większej niż 7 jest większy niż 49.

Zachodzi następujące

Twierdzenie 6.1 (wzory de Morgana)
$\neg(\forall_x\varphi(x)) \equiv \exists_x(\neg\varphi(x))$, $\quad\neg(\exists_x\varphi(x)) \equiv \forall_x\neg\varphi(x)$. ■

[6.1] Słowo kwantyfikator pochodzi od łacińskich słów **quantum** — ile i **facere** — czynić. Kwantyfikator ogólny oznacza, że zdanie $\varphi(x)$ jest prawdziwe ogólnie (dla bardzo wielu, bo dla wszystkich x), kwantyfikator szczegółowy oznacza, że zdanie $\varphi(x)$ jest prawdziwe dla co najmniej jednego x, czyli że jest prawdziwe w szczególnych przypadkach. Oznaczenie dziś stosowane pochodzą z angielskiego $\forall$ to odwrócona litera A, bo **dla każdego** to po angielsku **for all**, kwantyfikator szczegółowy oznaczamy symbolem $\exists$, więc odwróconą literą E, bo **istnieje** to po angielsku **exists**.

Wypowiemy je słowami. Zdanie *nieprawda, że dla każdego* x *zachodzi zdanie* $\varphi(x)$ jest równoważne zdaniu *istnieje* x, *dla którego prawdą jest zaprzeczenia zdania* $\varphi(x)$. Zdanie *nie jest prawdą, że istnieje* x, *dla którego zdanie* $\varphi(x)$ *jest prawdziwe* jest równoważne zdaniu *dla każdego* x *prawdziwe jest zaprzeczenie zdania* $\varphi(x)$.

Przykład 6.1

$$\neg\big(\forall_{x\in\mathbb{N}}(x \geqslant 1)\big) \Leftrightarrow \big(\exists_{x\in\mathbb{N}}\neg(x \geqslant 1)\big) \Leftrightarrow \big(\exists_{x\in\mathbb{N}}(x < 1)\big). \blacksquare$$

Przykład 6.2

$$\neg\big(\exists_{x\in\mathbb{N}}\forall_{a,b\in\mathbb{Z}}\big)(x \neq a^2+b^2) \Leftrightarrow \forall_{x\in\mathbb{N}}\big(\neg\forall_{a,b\in\mathbb{Z}}\big)(x \neq a^2+b^2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \big(\forall_{x\in\mathbb{N}}\exists_{a,b\in\mathbb{Z}}\big)\neg(x \neq a^2+b^2) \Leftrightarrow \big(\forall_{x\in\mathbb{N}}\exists_{a,b\in\mathbb{Z}}\big)(x = a^2+b^2). \blacksquare$$

Jeśli dwa kwantyfikatory ogólne występują jeden po drugim, to możemy zmienić ich kolejność: $\forall_x\forall_y\varphi(x,y) \Leftrightarrow \forall_y\forall_x\varphi(x,y)$, np. zdanie $\forall_{x\in\mathbb{N}}\forall_{y\in\mathbb{N}}(x^2+y+1 \in \mathbb{N})$ jest równoważne zdaniu $\forall_{y\in\mathbb{N}}\forall_{x\in\mathbb{N}}(x^2+y+1 \in \mathbb{N})$. To samo dotyczy kolejnych kwantyfikatorów szczegółowych.

Nie wolno zmieniać kolejności występowania kwantyfikatora ogólnego i szczegółowego: zdania $\forall_x\exists_y(\varphi(x,y))$ i $\exists_y\forall_x(\varphi(x,y))$ na ogól nie są równoważne. Zdanie $\forall_{x\in\mathbb{N}}\exists_{y\in\mathbb{N}}(x < y+7)$ jest prawdziwe (czytamy je: dla każdej liczby naturalnej x istnieje taka liczba naturalna y, że $x < y+7$ — wystarczy przyjąć $y = x+1$). Zdanie $\exists_{y\in\mathbb{N}}\forall_{x\in\mathbb{N}}(x < y+7)$ jest fałszywe (czytamy je: istnieje taka liczba $y \in \mathbb{N}$, że nierówność $x < y+7$ zachodzi dla każdej liczby $x \in \mathbb{N}$), bowiem nie jest prawdą, że $y+8 < y+7$, a jeśli $y \in \mathbb{N}$, to również $y+8 \in \mathbb{N}$.

Jeśli A jest zbiorem niepustym, to ze zdania $\forall_{x\in A}\,\varphi(x)$ wynika zdanie $\exists_{x\in A}\,\varphi(x)$, np. ze zdania $\forall_{x\in\mathbb{N}}\, x \geqslant 1$ wynika zdanie $\exists_{x\in\mathbb{N}}\, x \geqslant 1$, np. $x = 1$. Odwrotnego wynikania na ogół nie ma, np. z prawdziwego zdania $\exists_{x\in\mathbb{N}}\, x^2 < 7$ nie wynika zdanie $\forall_{x\in\mathbb{N}}\, x^2 < 7$, które prawdziwe nie jest, bo na przykład nie jest prawdą, że $3^2 < 7$.

Symboli logicznych nie należy nadużywać, bo może prowadzić to do zapisu utrudniającego zrozumienie treści zdania. Przekonamy się, że w pewnych sytuacjach pomagają one np. zrozumieć różnicę między różnymi stwierdzeniami brzmiącymi dosyć podobnie. Jednak zdanie:

$$\exists_{p\in\mathbb{N}}\,\forall_{x\in\mathbb{N}}\,\forall_{y\in\mathbb{N}}\big(p \neq 1 \wedge (p = xy \Rightarrow \\ \Rightarrow ((x = 1 \wedge y = p) \vee (x = p \wedge y = 1)))\big)$$

jest równoważne zdaniu: *istnieje liczba naturalna, która ma dokładnie dwa dzielniki* 1 *i* p, czyli zdaniu: *istnieje liczba pierwsza.* W tym przypadku, zdaniem autora, symbole logiczne raczej przeszkadzają.

RELACJE I FUNKCJE

Definicja 7.1 (relacji)
Dowolny podzbiór R iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$ nazywamy relacją. Mówimy, że element x zbioru X jest w relacji z elementem y zbioru Y wtedy i tylko wtedy, gdy para (x, y) jest elementem zbioru R. Piszemy wtedy xRy. Jeśli $X = Y$, to mówimy o relacji w zbiorze X. ■

Przykład 7.1 Podzbiór $\{(x, y) \in X \times X\colon \quad x = y\}$ zbioru $X \times X$ nazywamy relacją równości w zbiorze X. ■

Przykład 7.2 Podzbiór $\{(x, y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\colon \quad x < y\}$ zbioru $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ nazywamy relacją mniejszości w zbiorze liczb naturalnych. ■

Przykład 7.3 Podzbiór $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\colon \quad y = x^2 + 1\}$ zbioru $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ jest relacją w zbiorze $\mathbb{N}$. ■

Przykład 7.4 Niech X będzie zbiorem wszystkich odcinków na płaszczyźnie. W zbiorze tym określamy relację przystawania przyjmując, że dwa odcinki są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy mają równą długość. ■

Definicja 7.2 (relacji równoważności)
Relacja R w zbiorze X nazywana jest relacją równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące trzy warunki:
1° $\forall_{x\in X}\, xRx$, czyli relacja R jest zwrotna;
2° $\forall_{x\in X}\forall_{y\in X}\, xRy \Leftrightarrow yRx$, czyli relacja R jest symetryczna;
3° $\forall_{x\in X}\forall_{y\in X}\forall_{z\in X}\, (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$, czyli relacja R jest przechodnia. ■

Czytelnik zauważy bez trudu, że relacje 7.1 i 7.4 są relacjami równoważności, natomiast relacja 7.2 nie jest symetryczna ani zwrotna. Relacja 7.3 nie jest ani zwrotna, ani symetryczna, ani przechodnia.

Jeśli R jest relacją równoważności w zbiorze X, to zbiór $[x]$ złożonych z tych elementów zbioru X, które są w relacji R z elementem x, tzn. $[x] = \{y \in X\colon \quad xRy\}$, nazywamy klasą abstrakcji elementu x. Relacje równoważności zbioru X wyznacza jego podział na klasy abstrakcji, tzn. prawdziwe jest

Twierdzenie 7.3
Jeśli R jest relacją równoważności w zbiorze X, to każdy element zbioru X należy do dokładnie jednej klasy abstrakcji, różne klasy abstrakcji są rozłączne.

Dowód. Ze zwrotności relacji R wynika, że $x \in [x]$. Załóżmy, że $t \in [x] \cap [y]$. Niech $s \in [x]$. Wtedy xRt, yRt i xRs. Z symetryczności R wynika, że tRx. Teraz skorzystamy dwa razy z przechodniości: $(yRt) \wedge (tRx) \Rightarrow (yRx)$ i $(yRx) \wedge (xRs) \Rightarrow (yRs)$. Wykazaliśmy, że jeśli $s \in [x]$, to $s \in [y]$, czyli $[x] \subseteq [y]$. Analogicznie dowodzimy, że $[y] \subseteq [x]$. Oznacza to, że $[x] = [y]$. ■

Czytelnik łatwo sprawdzi, że klasy abstrakcji relacji równości są jednoelementowe, a klasy relacji przystawania odcinków składają się z nieskończenie wielu elementów.

Inną ważną grupę stanowią relacje porządkujące.

Definicja 7.4 (relacji porządkującej)
Relacja R nazywana jest porządkującą, albo porządkiem w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące warunki:
1° jest przechodnia, czyli $\forall_{x\in X}\forall_{y\in X}\forall_{z\in X}\, (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2° dla dowolnych $x, y, z \in X$ zachodzi dokładnie jedna z trzech możliwości: xRy, yRx, $x = y$ — ta własność to **trichotomia**. ■

Relacja mniejszości w zbiorze liczb naturalnych jest porządkiem, natomiast relacja $x \leq y$ porządkiem już nie jest. Alfabetyczna lista uczniów danej klasy wyznacza porządek w zbiorze uczniów, pod warunkiem że w klasie nie ma dwóch uczniów o tym samym imieniu i nazwisku.

Jednym z najważniejszych pojęć w matematyce jest pojęcie funkcji. Zaczniemy od definicji.

Definicja 7.5 (funkcji)
Jeśli każdemu elementowi $x \in X$ przypisany został dokładnie jeden element $y \in Y$, to mówimy, ze zdefiniowana została funkcja przekształcająca zbiór X w zbiór Y. Jeśli tę funkcję oznaczymy przez f, to piszemy $f\colon X \longrightarrow Y$. Element $y \in Y$ przyporządkowany **argumentowi** $x \in X$ oznaczamy symbolem $f(x)$, więc $y = f(x)$, i nazywamy go **obrazem** punktu x lub **wartością** funkcji f w punkcie x. Zbiór X nazywamy **dziedziną** lub

zbiorem argumentów funkcji f, zbiór Y nazywamy **przeciwdziedziną** funkcji f, a jego podzbiór $\{y \in Y\colon \quad \exists_{x\in X}\, y = f(x)\}$ złożony ze wszystkich wartości funkcji f nazywamy zbiorem wartości funkcji f i oznaczamy symbolem $f(X)$. ■

Jasne jest, że funkcja jest szczególnym przypadkiem relacji.

Przykład 7.5 Jeśli funkcja $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ przypisuje każdej liczbie naturalnej x jej kwadrat, to możemy napisać $f(x) = x^2$. W tym przypadku dziedziną funkcji f jest zbiór wszystkich liczb naturalnych, przeciwdziedziną też ten zbiór, a zbiorem wartości tej funkcji zbiór $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$. ■

Przykład 7.6 Funkcja $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ przypisuje każdej liczbie naturalnej jej ostatnią cyfrę, czyli cyfrę jedności (w zapisie dziesiętnym). Wtedy $f(1) = 1$, $f(13) = 3$, $f(107) = 7$, $f(350) = 0$ itd. Zbiorem wartości tej funkcji jest zbiór wszystkich cyfr układu dziesiątkowego, czyli zbiór $\{0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. ■

Przykład 7.7 Niech X oznacza zbiór wszystkich żyjących ludzi, a Y — zbiór wszystkich imion. Przypisując człowiekowi jego pierwsze imię, określamy funkcję na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y. Może się zdarzyć, że jakieś imiona są ,,chwilowo" nie wykorzystywane. W takiej sytuacji zbiór wartości określonej funkcji jest mniejszy niż jej przeciwdziedzina Y. ■

Przykład 7.8 Permutacje zbioru $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ można potraktować jako takie funkcje przekształcające zbiór X w siebie, które różnym elementom zbioru X przypisują różne wartości. ■

Przykład 7.9 Sumę dwu liczb naturalnych można potraktować jako wartość funkcji f określonej na zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ o wartościach w zbiorze $\mathbb{N}$. Wtedy $f(m, n) = m + n$. Tę funkcję nazywamy dodawaniem, jej wartość sumą. Jej zbiorem wartości jest $\{2, 3, 4, \ldots\}$, a przeciwdziedziną — zbiór $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. ■

Przykład 7.10 Jeśli X jest dowolnym zbiorem niepustym i $f(x) = x$ dla każdego $x \in X$, to funkcję f nazywamy identycznością lub tożsamością na zbiorze X. ■

Przykład 7.11 Jeśli $c \in Y$ i dla każdego $x \in X$ zachodzi równość $g(x) = c \in Y$, to mówimy, że funkcja g jest stała, jej jedyną wartością jest c, jej zbiór wartości to $\{c\}$. ■

Przykład 7.12 Niech K będzie zbiorem kwadratów liczb naturalnych: $K = \{1, 4, 9, 16, \ldots\} = \{k \in \mathbb{N}: \ \exists_{n \in \mathbb{N}} k = n^2\}$. Wzór $h(k) = \sqrt{k}$ określa funkcję ze zbioru K w zbiór $\mathbb{N}$. ■

Definicja 7.6 (funkcji przekształcającej *na* **)**
Mówimy, że funkcja $f: X \longrightarrow Y$ przekształca zbiór X na zbiór Y wtedy i tylko wtedy, gdy $Y = f(X)$, czyli gdy obraz funkcji pokrywa się z jej przeciwdziedziną. Piszemy wtedy $f: X \xrightarrow{na} Y$. ■

Funkcje z przykładów 7.8, 7.10 i 7.12 przekształcają swe dziedziny na swe przeciwdziedziny.

Definicja 7.7 (funkcji różnowartościowej)
Mówimy, że funkcja $f: X \longrightarrow Y$ jest różnowartościowa, jeśli różnym elementom zbioru X przypisano różne elementy przeciwdziedziny Y: z równości $f(x_1) = f(x_2)$ wynika równość $x_1 = x_2$. ■

Funkcje z przykładów 7.5, 7.8 i 7.10 są różnowartościowe.

Definicja 7.8 (złożenia funkcji)
Jeśli dane są dwie funkcje $f: X \longrightarrow Y$ i $g: Y \longrightarrow Z$, to funkcja $h: X \longrightarrow Z$ zdefiniowana wzorem $h(x) = g\big(f(x)\big)$ nazywana jest złożeniem funkcji g z funkcją f. Oznaczamy ją symbolem $g \circ f$. ■

Przykład 7.13 Niech funkcje $f, g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ będą dane wzorami $f(n) = n^2$, $g(n) = 2$. Wtedy $g \circ f(n) = g\big(f(n)\big) = g(n^2) = 2$ oraz $f \circ g(n) = f\big(g(n)\big) = f(2) = 2^2 = 4$. Wynika stąd, że nawet jeśli $X = Z$, to na ogół $g \circ f \neq f \circ g$. ■

Definicja 7.9 (funkcji odwrotnej)
Funkcję $g: Y \longrightarrow X$ nazywamy odwrotną do funkcji $f: X \to Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy obie funkcje $g \circ f$ oraz $f \circ g$ są identycznościami. ■

Przykład 7.14 Identyczność jest funkcją odwrotną do siebie na dowolnym zbiorze. ■

Przykład 7.15 Niech $K = \{n^2 \colon \ n \in \mathbb{N}\}$. Niech $f \colon \mathbb{N} \longrightarrow K$ będzie dana wzorem $f(n) = n^2$, a funkcja $g \colon K \longrightarrow \mathbb{N}$ — wzorem $g(k) = \sqrt{k}$. Wtedy $f\big(g(k)\big) = f(\sqrt{k}) = \big(\sqrt{k}\big)^2 = k$, zatem $f \circ g$ jest identycznością na zbiorze K. $g\big(f(n)\big) = g(n^2) = \sqrt{n^2} = n$, zatem również $g \circ f$ jest identycznością. Wobec tego g jest funkcją odwrotną do f. ■

Przykład 7.16 Niech $f(n) = n^2$ dla $n \in \mathbb{N}$. Niech n będzie liczbą naturalną i niech $g(n)$ oznacza największą taką liczbę naturalną k, że $k^2 \leq n$, np. $g(1) = 1$, $g(2) = 1$, $g(3) = 1$, $g(4) = 2$, $g(5) = 2$, $g(9) = 3$, $g(17) = 4$. Wtedy $g \circ f(n) = g\big(f(n)\big) = g(n^2) = n$, zatem $g \circ f$ jest identycznością. Mamy również $f\big(g(17)\big) = f(4) = 4^2 = 16$, zatem funkcja $f \circ g$ nie jest identycznością. Wobec tego funkcja g nie jest funkcją odwrotną do funkcji f pomimo tego, że $g \circ f = id$. ■

Twierdzenie 7.10 (o istnieniu funkcji odwrotnej)
Funkcja $f \colon X \longrightarrow Y$ ma funkcję odwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnowartościowa i przekształca zbiór X *na* zbiór Y.
Dowód. Załóżmy, że $g \colon Y \longrightarrow X$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f \colon X \longrightarrow Y$. Niech $x_1, x_2 \in X$ będą **różnymi** punktami dziedziny X. Jeśli $f(x_1) = f(x_2)$, to $x_1 = g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) = x_2$, wbrew założeniu, zatem $x_1 \neq x_2$. Wykazaliśmy różnowartościowość funkcji f. Mamy $y = f\big(g(y)\big)$ dla każdego $y \in Y$, zatem każdy element y zbioru Y jest wartością funkcji f.

Przypuśćmy teraz, że różnowartościowa funkcja $f \colon X \longrightarrow Y$ przekształca zbiór X na zbiór Y. Definiujemy: $g(y) = x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y = f(x)$. Ponieważ dla każdego punktu $y \in Y$ istnieje dokładnie jeden punkt $x \in X$ spełniający ten warunek, więc wzór $g(y) = x$ określa funkcję. Z określenia wynika, że $f\big(g(y)\big) = f(x) = y$ oraz $g\big(f(x)\big) = g(y) = x$, zatem $f \circ g = id$ i $g \circ f = id$, więc g jest funkcją odwrotną do f. ■

Wniosek 7.11 (z dowodu)
Jeśli funkcja f ma funkcję odwrtoną, to tylko jedną. ■

Definicja 7.12 (wykresu funkcji)
Wykresem funkcji $f\colon X \longrightarrow Y$ nazywamy zbiór
$$\{(x, f(x)): \quad x \in X\}. \ \blacksquare$$

Z formalnego punktu widzenia nie ma żadnej różnicy między funkcją i jej wykresem. Prowadzi to do następującej definicji

Definicja 7.13 (funkcji)
Podzbiór $f \subseteq X \times Y$ nazywamy funkcją przekształcającą zbiór X w zbiór Y, jeśli dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden taki element $y \in Y$, że $(x, y) \in f$. Ten element y nazywamy wartością funkcji f w punkcie x i oznaczamy symbolem $f(x)$. $\blacksquare$

Ta definicja ma tę przewagę nad podaną poprzednio, że nie występuje w niej niejasne pojęcie *przyporządkowania* — wszystko jest sprowadzone do zbiorów.

Rozpatrywanie wykresów często ułatwia badanie własności funkcji zwłaszcza wtedy, gdy mamy do czynienia z funkcjami, których argumentami i wartościami są liczby — możemy taką funkcję obejrzeć na obrazku.

Zadania

1. Ile jest relacji symetrycznych w zbiorze n–elementowym?

2! Ile jest wszystkich rekacji w zbiorze czteroelementowym?

3! Podać przykład relacji symetrycznej i przechodniej, która nie jest zwrotna.

4. Czy relacja R określona w zbiorze wszystkich liczb w następujący sposób: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy $x - y$ jest liczbą naturalną, jest relacją równoważności? A porządkiem?

5. Określmy w zbiorze takich par liczb całkowitych, których drugi element jest liczbą naturalną, relację R w następujący sposób: $(a, b)R(x, y) \Leftrightarrow ay = bx$. Wykazać, że R jest relacją równoważności.

6. Które z relacji z przykładów 7.1 — 7.4 są funkcjami?

7! Które z następujących przyporządkowań są funkcjami:

(a) człowiekowi przypisujemy jego matkę;

(b) człowiekowi przypisujemy jego babkę;

(c) liczbie wymiernej przypisujemy licznik ułamka przedsta wiającego ją w postaci ilorazu liczb całkowitych;

(d) liczbie naturalnej przypisujemy sumę jej cyfr w układzie dziesiętnym?

8! Podać przykład funkcji, która przekształca zbiór liczb naturalnych *na* zbiór:

(a) liczb całkowitych; (b) liczb wymiernych.

9! Czy okrąg jest wykresem funkcji, jeśli tak, to jakiej?

10. Dowieść, że jeśli funkcja przekształca odcinek w siebie nie zwiększając odległości między punktami (odległość punktów nie jest mniejsza niż odległość ich obrazów) i każdy koniec odcinka jest swym obrazem, to jest ona identycznością.

11. Dowieść, że jeśli funkcja przekształca kwadrat w siebie nie zwiększając odległości między punktami (por. poprzednie zadanie) i każdy wierzchołek kwadratu jest swoim obrazem, to funkcja ta jest identycznością.

12. Ile jest różnowartościowych funkcji przekształcających zbiór k–elementowy w zbiór n–elementowy?

13. Ile jest wszystkich funkcji przekształcających zbiór k–elementowy w zbiór n–elementowy?

14. Niech $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ będą liczbami pierwszymi, n_1, n_2, $\ldots$, n_k – naturalnymi. Dowieść, że liczba $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ ma $(n_1+1)(n_2+1)\cdot \ldots \cdot (n_k+1)$ dzielników naturalnych.

15. Niech X będzie zbiorem k–elementowym, 2^X — zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru X (łącznie z X i $\emptyset$). Niech a_1, a_2, $\ldots$, a_n będą takimi liczbami całkowitymi nieujemnymi, że $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = k$. Dowieść, że liczba takich funkcji $f\colon \{1,2,\ldots,n\} \longrightarrow 2^X$, że

(a) zbiór $f(i)$ ma a_i elementów dla każdego $i \in \{1,2,\ldots,n\}$,

(b) $f(i) \cap f(j) = \emptyset$, gdy $i \neq j$,

(c) $f(1) \cup f(2) \cup \ldots \cup f(n) = X$

jest równa $\frac{k!}{a_1!a_2!\ldots a_k!}$.

16. Korzystając z poprzedniego zadania znaleźć współczynnik przy $x^r y^s z^t$ w rozwinięciu $(x+y+z)^k$, tu $a^0 = 1$, $r,s,t \geqslant 0$, $r+s+t = k$, r,s,t — całkowite.

PODSTAWOWE WŁASNOŚCI DZIAŁAŃ I NIERÓWNOŚCI W ZBIORZE LICZB RZECZYWISTYCH

W dalszym ciągu będziemy zajmować się głównie własnościami liczb rzeczywistych, funkcjami określonymi na zbiorach złożonych z liczb rzeczywistych, których wartościami są liczby rzeczywiste. Historia liczb rzeczywistych jest bardzo długa. Ludzie najpierw posługiwali się liczbami naturalnymi, następnie wymiernymi dodatnimi, później odkryto liczby niewymierne, wreszcie zaczęto też używać liczby ujemne.

Teoria liczb rzeczywistych została usystematyzowana dopiero w XIX wieku. Liczby naturalne, zgodnie ze swą nazwą, są najprostszym rodzajem liczb i dlatego często najpierw rozwijana jest ich teoria, następnie z ich pomocą konstruowane są liczby całkowite (jako różnice naturalnych), potem wymierne (jako ilorazy liczb całkowitych), wreszcie rzeczywiste. Ten ostatni krok jest dosyć pracochłonny.

Postąpimy więc odwrotnie — przyjmiemy bez dowodu pewne własności liczb rzeczywistych (będą to pewniki zwane też aksjomatami) i na ich podstawie udowodnimy pozostałe, określając ,,po drodze" liczby naturalne, całkowite i wymierne.

Zakładamy, że dany jest zbiór $\mathbb{R}$. Jego elementy nazywać będziemy liczbami rzeczywistymi. Zakładamy, że w zbiorze $\mathbb{R}$ są określone dwa działania — dodawanie $+$ oraz mnożenie $\cdot$, tzn. funkcje z $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, relacja mniejszości $<$. Są też wyróżnione elementy 0 i 1. Podamy teraz listę pewników.

D1 Dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ zachodzi $(a+b)+c = a+(b+c)$ — dodawanie jest łączne.

D2 Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi $a+b = b+a$ — dodawanie jest przemienne.

D3 Dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ istnieje taka liczba $x \in \mathbb{R}$, że $a+x=0$ — istnienie liczby przeciwnej.

D4 Dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $a+0=a$.

M1 Dla dowolnych liczb $a, b, c \in \mathbb{R}$ zachodzi $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ — mnożenie jest łączne.

M2 Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi $a\cdot b = b\cdot a$ — mnożenie jest przemienne.

M3 Dla każdej liczby $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ istnieje taka liczba $x \in \mathbb{R}$, że $a \cdot x = 1$ — istnienie liczby odwrotnej.

M4 Dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ $a \cdot 1 = a$ — charakteryzacja jedynki.

MD Dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ zachodzi $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ — mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

N1 Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi dokładnie jedna z trzech możliwości $a < b$, $a = b$, $b < a$ — prawo trichotomii.

N2 Dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ z nierówności $a < b$ i $b < c$ wynika, że $a < c$ — nierówność jest przechodnia.

N3 Dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ z nierówności $a < b$ wynika, że $a+c < b+c$ — do nierówności można dodać stronami liczbę, to prawo wiąże nierówność z dodawaniem.

N4 Dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ z tego, że $a < b$ i $0 < c$ wynika, że $a \cdot c < b \cdot c$ — nierówności można pomnożyć stronami przez liczbę dodatnią, to prawo wiąże nierówność z mnożeniem.

ZJ $0 \neq 1$.

Później uzupełnimy tę listę pewnikiem ciągłości, z którego na razie w ogóle nie będziemy korzystać.

Czytelnik może być zdziwiony obecnością założenia $0 \neq 1$, ale bez tego moglibyśmy teoretycznie zajmować się zbiorem jednoelementowym złożonym z samego zera. W nim wszystkie pewniki są spełnione, jeśli przyjmiemy, że $0 = 1$.

Udowodnimy teraz szereg prostych własności.

Stwierdzenie 8.1
Jeśli dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $a + b = a$, to $b = 0$.
Dowód. Z **D3** wynika, że istnieje $x \in \mathbb{R}$ takie, że $a + x = 0$. Mamy więc $0 = a + x = (a + b) + x = (b + a) + x = b + (a + x) = {=}b + 0 = b$ — korzystaliśmy kolejno z określenia x, z przemienności dodawania, łączności dodawania, określenia x, własności liczby 0. ■

Z tego stwierdzenia wynika przede wszystkim, że istnieje dokładnie jeden element neutralny dodawania, mianowicie 0.

Stwierdzenie 8.2
Jeśli $y, z \in \mathbb{R}$ i zachodzi równość $a + y = a + z$, to $y = z$.
Dowód. Niech $a + x = 0$. Wtedy $y = y + 0 = y + (a + x) = {=}(y+a)+x = (a+y)+x = (a+z)+x = (z+a)+x = z+(a+x) =$

$= z + 0 = z$. ■

Definicja 8.3 (liczby przeciwnej)
$-a$ oznacza jedyną liczbę taką, że $a + (-a) = 0$. ■
To, że liczba, o której jest mowa jest tylko jedna wynika od razu ze stwierdzenia 8.2.

Stwierdzenie 8.4
Dla każdych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedna taka liczba x, że $a + x = b$.
Dowód. Niech $x = (-a) + b$. Wtedy zachodzą równości $a + x = = a + [(-a) + b] = [a + (-a)] + b = 0 + b = b + 0 = b$. Wykazaliśmy istnienie. Jednoznaczność wynika od razu ze stwierdzenia 8.2. ■

Definicja 8.5 (różnicy dwu liczb)
$a - b := a + (-b)$. ■

Stwierdzenie 8.6
Dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $-(-a) = a$,
dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $-(a + b) = -a - b$.
Dowód. $(-a) + [-(-a)] = 0 = a + (-a) = (-a) + a$, zatem na mocy stwierdzenia 8.2 zastosowanego do $-a$ zachodzi równość $-(-a) = a$.
Mamy $(a + b) + [-(a + b)] = 0 = a + (-a) = [a + (-a)] + 0 =$
$= [a + (-a)] + [b + (-b)] = \{[a + (-a)] + b\} + (-b) =$
$= \{a + [(-a) + b]\} + (-b) = \{a + [b + (-a)]\} + (-b) =$
$= \{[a+b]+(-a)\}+(-b) = [a+b]+[(-a)+(-b)] = [a+b]+[-a-b]$,
zatem ze stwierdzenia 8.2 wynika, że $-(a + b) = -a - b$. ■

Następnych kilka stwierdzeń podamy bez dowodu, bo ich dowody polegają na zastąpieniu dodawania mnożeniem, co każdy Czytelnik zrobi sam bez kłopotu.

Stwierdzenie 8.7
Jeśli dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$, przy czym $a \neq 0$, zachodzi równość $a \cdot b = a$, to $b = 1$. ■

Z tego stwierdzenia wynika przede wszystkim, że istnieje dokładnie jeden element neutralny mnożenia, mianowicie 1.

Stwierdzenie 8.8
Jeśli dla pewnych $y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $a \cdot y = a \cdot z$, przy czym $a \neq 0$, to $y = z$. ■

Definicja 8.9 (elementu odwrotnego)
Jeśli $a \neq 0$, to a^{-1} oznacza jedyną liczbę taką, że $a \cdot a^{-1} = 1$. ■
To, że liczba, o której jest mowa jest tylko jedna wynika od razu ze stwierdzenia 8.8.

Stwierdzenie 8.10
Dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $a \cdot 0 = 0$.
Dowód. Mamy $a+a\cdot 0 = a\cdot 1+a\cdot 0 = a\cdot(1+0) = a\cdot 1 = a = a+0$. Stąd i ze stwierdzenia 8.2 wynika, że $a \cdot 0 = 0$. ■

Z tego stwierdzenia wynika, że nie wolno dzielić równości przez liczbę 0: z równości $a \cdot 0 = b \cdot 0$ nie wynika, że $a = b$.

Stwierdzenie 8.11
Jeśli $a \neq 0$, to $a^{-1} \neq 0$.
Dowód. Jeśli $a^{-1} = 0$, to $0 = a \cdot 0 = a \cdot a^{-1} = 1$, wbrew temu, że $0 \neq 1$, zatem $a^{-1} \neq 0$. ■

Stwierdzenie 8.12
Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, istnieje dokładnie jedna taka liczba x, że $a \cdot x = b$. ■

Definicja 8.13 (ilorazu dwu liczb)
$\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$. ■

Stwierdzenie 8.14
Dla każdego $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi $(a^{-1})^{-1} = a$, dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$. ■

Stwierdzenie 8.15
Jeśli $a \cdot b = 0$, to $a = 0$ lub $b = 0$.
Dowód. Mamy $a \cdot 0 = 0 = a \cdot b$, więc jeśli $a \neq 0$, to na mocy stwierdzenia 8.8 zachodzi $0 = b$. ■

Stwierdzenie 8.16
Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzą równości $(-a)b = a(-b) = -\, ab$ oraz $(-a)(-b) = ab$. W szczególności $(-1)a = -a$.
Dowód. $a \cdot b + (-a) \cdot b = [a + (-a)] \cdot b = 0 \cdot b = b \cdot 0 = 0 = a \cdot b + [-(a \cdot b)]$. Ze stwierdzenia 8.2 wynika, że $(-a)b = -ab$. Stąd $a(-b) = (-b)a = -ba = -ab$ i $(-a)(-b) = -a(-b) = -\,[(-b)a] = -[-ba] = -[-ab] = ab$ — ostatnią równość wywnioskowaliśmy ze stwierdzenia 8.6.

Stwierdzenie 8.17
Dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $a(b-c) = ab - ac$.

Dowód. Mamy $a(b-c) = a \cdot [b + (-c)] = a \cdot b + a \cdot (-c) = $ $= a \cdot b + (-a \cdot c) = ab - ac$. ■

Stwierdzenie 8.18
Jeśli $a < b$ i $c < d$, to $a + c < b + d$.

Dowód. Z tego, że $a < b$ wynika, że $a + c < b + c$. Z tego, że $c < d$ wynika, że $b + c = c + b < d + b$. Z przechodniości nierówności wynika, że $a + c < b + d$. ■

Stwierdzenie 8.19
Jeśli $a < 0$, to $0 < -a$.

Dowód. Jeśli $a < 0$, to $0 = a + (-a) < 0 + (-a) = -a$. ■

Stwierdzenie 8.20
Jeśli jednocześnie $a < b$, $c < d$, $0 < b$, $0 < c$, to $ac < bd$.

Dowód. Z tego, że $a < b$ i $0 < c$ wynika, że $ac < bc$. Z tego, że $c < d$ i $0 < b$ wynika, że $bc = cb < db = bd$. Teza wynika z przechodniości nierówności. ■

Stwierdzenie 8.21 (prawa znaków)
Jeśli $0 < a$ i $0 < b$, to $0 < ab$. Jeśli $0 < a$ i $b < 0$, to $ab < 0$. Jeśli $a < 0$ i $b < 0$, to $0 < ab$.

Dowód. Pierwsza część wynika z N4 i stwierdzenia 8.10. Jeśli $a < 0 < b$, to $0 < -a$, więc $0 < (-a)b = -ab$ i wobec tego $ab < (-ab) + ab = 0$. Udowodniliśmy drugą część. Jeśli $a < 0$ i $b < 0$, to $0 < -a$ i $0 < -b$, zatem $0 < (-a)(-b) = ab$. ■

Definicja 8.22 (cyfr)
$2 := 1 + 1$, $3 := 2 + 1$, $4 := 3 + 1$, $5 := 4 + 1$, $6 := 5 + 1$, $7 := 8 + 1$, $8 := 7 + 1$, $9 := 8 + 1$. ■

Definicja 8.23 (kwadratu)
Dla każdej liczby rzeczywistej a definiujemy $a^2 := a \cdot a$.

Stwierdzenie 8.24
Jeśli $a \neq 0$, to $0 < a^2$.

Dowód. Mamy $a^2 = a \cdot a = (-a) \cdot (-a) > 0$, zatem a^2 jest iloczynem dwu liczb dodatnich, bo $a < 0 \Rightarrow 0 < -a$. ■

Stwierdzenie 8.25
$1 > 0$.
Dowód. $1 = 1^2$. ■

Od tej pory będziemy również pisać $a > b$ oczywiście wtedy i tylko wtedy, gdy $b < a$. Również $a \leqslant b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a < b$ lub $a = b$. Używany będzie też symbol $a \geqslant b$.

Definicja 8.26 (wartości bezwzględnej czyli modułu)

$$|a| = \begin{cases} a & \text{jeżeli } a \geqslant 0, \\ -a & \text{jeżeli } a < 0. \end{cases}$$ ■

Stwierdzenie 8.27
Jeśli $a, b \in \mathbb{R}$, to $\quad |-a| = |a|, \quad |a| \geqslant a, \quad |ab| = |a| \cdot |b|,$
$|a + b| \leqslant |a| + |b|, \quad \big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b|$.
Dwie ostatnie nierówności zwane są nierównościami trójkąta.
Dowód. Pierwsza równość jest zupełnie oczywista. Jeśli $a \geqslant 0$, to $|a| = a$, jeśli $a < 0$, to $|a| = -a > 0 > a$, zatem zawsze $|a| \geqslant a$. Stąd wynika, że $|a| + |b| \geqslant a + b$ oraz $|-a| + |-b| \geqslant$ $\geqslant -a + (-b) = -(a + b)$, a ponieważ $|a + b|$, to większa z liczb $a+b$ i $-(a+b)$, więc $|a|+|b| \geqslant |a+b|$. Z tej nierówności wynika, że $|a| = |(a - b) + b| \leqslant |a - b| + |b|$, zatem $|a| - |b| \leqslant |a - b|$. Oczywiście $|a - b| = |b - a| \geqslant |b| - |a| = -(|a| - |b|)$. Z dwu nierówności $|a - b| \geqslant |a| - |b|$ i $|a - b| \geqslant -(|a| - |b|)$ wynika, że $|a - b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$. ■

Tu drobny komentarz. Jeśli myślimy o liczbach rzeczywistych jako o punktach osi liczbowej, to liczba $|a| = |a-0|$ jest odległością punktu a od punktu 0, $|a - b|$ to odległość punktów a i b. Wobec tego ostatnia nierówność mówi, że różnica dwóch boków ,,trójkąta'' o wierzchołkach 0, a i b nie jest większa niż trzeci bok. Nierówność nie jest ostra, bo wszystkie trzy wierzchołki tego ,,trójkąta'' leżą na jednej prostej. Nierówność $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ mówi, że bok ,,trójkąta'' o wierzchołkach a, 0 i $-b$ nie jest większy niż suma dwóch pozostałych jego boków.

Zadania

Korzystając jedynie z pewników i własności udowodnionych w tym rozdziale udowodnić, że:

1! $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$.

2! Jeśli $a + c < b + c$, to $a < b$.

3! Jeśli $c > 0$ i $ac > bc$, to $a > b$.

4! Jeśli $c < 0$ i $ac > bc$, to $a < b$.

5. $a^2 + b^2 \geqslant ab$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$.

6. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geqslant (ax + by)^2$ dla dowolnych $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

7. $a > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^{-1} > 0$.

8! $|a| \leqslant c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-c \leqslant a \leqslant c$.

9! $|a + b| = |a| + |b|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ab \geqslant 0$.

10. Jeśli $|a - b| \leqslant a$, to $ab \geqslant 0$. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

11. Jeśli $x + y + z = 1$, to $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

12. Jeśli $ab > 0$, to $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$.

13. $x^2 + x + 1 > 0$ i $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

14. $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

15. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $|x + 1| < 7$?

16. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $|x + 1| > 7$?

17. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $|x + 2| + |x - 6| = 8$?

18. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $|x + 2| + |x - 2| \leqslant 9$?

19. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\left|\frac{x+1}{x+2}\right| > 1$?

20. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\left|\frac{x-4}{x^2+x+5}\right| > 1$?

21. Niech $\max(a, b)$ oznacza większą z liczb a, b, $\min(a, b)$ — mniejszą z nich, $\max(a, a) = a = \min(a, a)$. Dowieść, że $\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$. Wyrazić podobnie $\min(a, b)$.

22. Niech $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. Definiujemy dodawanie, mnożenie i nierówność wzorami (elementy zbioru $\mathbb{Z}_3$ to reszty z dzielenia przez 3) $0+0 = 0$, $0+1 = 1+0 = 1$, $0 + 2 = 2 + 0 = 2$, $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 2 + 1 = 0$, $2 + 2 = 1$, $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 2 = 2 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 = 2$, $2 \cdot 2 = 1$, $0 < 1 < 2 < 0$. Dowieść, że wtedy w zbiorze $\mathbb{Z}_3$ spełnione są wszystkie pewniki z wyjątkiem N2 (przechodniości nierówności). A jak jest w podobnie zdefiniowanych zbiorach $\mathbb{Z}_4$ i $\mathbb{Z}_5$?

23. Wykazać, że w $\mathbb{Z}_5$ każdy niezerowy element ma odwrotność, a w $\mathbb{Z}_4$ — tylko niektóre.

24. Wywnioskować przemienność dodawania z pozostałych pewników.

LICZBY NATURALNE, CAŁKOWITE, WYMIERNE

W zbiorze liczb rzeczywistych wyróżnia się pewne podzbiory. Zaczniemy od najważniejszego, tj. od zbioru liczb naturalnych.

Definicja 9.1 (zbioru liczb naturalnych)
Zbiorem $\mathbb{N}$ liczb naturalnych nazywamy najmniejszy z tych zbiorów $A \subseteq \mathbb{R}$, które spełniają dwa warunki:

1° $1 \in A$;

2° jeśli $n \in A$, to również $n+1 \in A$.

Elementy zbioru $\mathbb{N}$ nazywamy liczbami naturalnymi. ■

Sformułowanie *najmniejszy z tych zbiorów* $A \subseteq \mathbb{R}$*, które spełniają dwa warunki* oznacza, że zbiór $\mathbb{N}$ jest podzbiorem każdego zbioru, które je spełnia. Zbiorów, które spełniają warunki 1° i 2° jest oczywiście dużo, np. zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, zbiór wszystkich liczb wymiernych, zbiór wszystkich liczb całkowitych. Zbiór liczb naturalnych zawiera wszystkie liczby, które należą do każdego z nich. Z warunku 1° wynika, że $1 \in \mathbb{N}$, stąd i z warunku 2° wynika, że $2 = 1+1 \in \mathbb{N}$ itd.

Z definicji zbioru $\mathbb{N}$ wynika od razu następujące

Stwierdzenie 9.2 (zasada indukcji zupełnej)
Jeśli zbiór A spełnia warunki 1° i 2°, to $A \supseteq \mathbb{N}$. ■

Z tego twierdzenia wynika zasada indukcji zupełnej w sformułowaniu znanym ze wcześniejszych rozdziałów. Aby się o tym przekonać wystarczy przyjąć, że zbiór A składa się z tych liczb naturalnych n, dla których zdanie T_n jest prawdziwe. Z warunków 1° i 2° z zasady indukcji zupełnej z rozdziału 1. wynika, że zbiór A spełnia warunki 1° i 2° z definicji zbioru liczb naturalnych, a to oznacza, że $A \supseteq \mathbb{N}$, zatem zdanie T_n jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n. Wprowadzimy dodatkowe oznaczenie.

Definicja 9.3
$\mathcal{N}(k)$ jest najmniejszym zbiorem spełniającym dwa warunki:

1° $k \in \mathcal{N}(k)$;

2° jeśli $n \in \mathcal{N}(k)$, to również $n+1 \in \mathcal{N}(k)$. ■

Jasne jest, że $\mathcal{N}(1) = \mathbb{N}$. Dodatkowe oznaczenie wprowadzamy po to, by nie dowodzić dwukrotnie tych samych twierdzeń tą samą metodą, a większość zachodzić będzie w dla zbiorów postaci

$\mathcal{N}(k)$, a nie tylko dla $\mathcal{N}(1) = \mathbb{N}$.

Stwierdzenie 9.4
Jeśli $n \in \mathcal{N}(k)$, to $n \geqslant k$.
Dowód. Niech $A = \{n \in \mathcal{N}(k): \quad n \geqslant k\}$. Oczywiście $k \in A$. Jeżeli $n \in A$, to $n \geqslant k$, więc $n+1 > n \geqslant k$. Stąd wynika, że $n+1 \in N(k)$, zatem również $n+1 \in A$. Wobec tego $A \supseteq \mathcal{N}(k)$, a z definicji zbioru A od razu wynika, że $A \subseteq \mathcal{N}(k)$. Oznacza to, że $A = \mathcal{N}(k)$, zatem jeśli $n \in \mathcal{N}(k)$, to $n \geqslant k$. ■

Stwierdzenie 9.5
Jeśli $n \in \mathcal{N}(k)$ i $n > k$, to $n-1 \in \mathcal{N}(k)$.
Dowód. Niech $A = \{k\} \cup \{n > k: \quad n-1 \in \mathcal{N}(k)\}$, czyli A składa się z liczby k i tych liczb n należących do $\mathcal{N}(k)$, dla których spełniona jest teza. Jeśli $n \in A$, to $n+1 \in \mathcal{N}(k)$, a ponieważ $n = (n+1)-1 \in A \subseteq \mathcal{N}(k)$, więc $n+1 \in A$. Stąd $A \supseteq \mathcal{N}(k)$, a ponieważ $A \subseteq \mathcal{N}(k)$, więc $A = \mathcal{N}(k)$. ■

Stwierdzenie 9.6
Jeśli $n \in \mathcal{N}(k)$ i $m > n$ oraz $m \in \mathcal{N}(k)$, to $m \geqslant n+1$.
Dowód. Zdefiniujmy zbiór A jak zwykle:

$$A = \{n \in \mathcal{N}(k): \quad \text{jeśli } m \in \mathcal{N}(k) \text{ i } m > n, \text{ to } m \geqslant n+1\}.$$

Jeśli $m > k$ i $m \in \mathcal{N}(k)$, to $m-1 \in \mathcal{N}(k)$ (poprzednie stwierdzenie), więc $m-1 \geqslant k$. Stąd $m = m-1+1 \geqslant k+1$, zatem $k \in A$. Niech $n \in A$ i $m > n+1$. Wtedy $m-1 > n$, zatem $m-1 \geqslant n+1$, więc $m = (m-1)+1 \geqslant (n+1)+1$, zatem $n+1 \in \mathcal{N}(k)$. ■

Wniosek 9.7
Jeśli $n < x < n+1$ i $n \in \mathcal{N}(k)$, to $x \notin \mathcal{N}(k)$. ■

Twierdzenie 9.8 (Zasada minimum)
Każdy niepusty podzbiór A zbioru $\mathcal{N}(k)$ ma element najmniejszy, w szczególności w każdym zbiorze złożonym z liczb naturalnych jest liczba najmniejsza.
Dowód. Jeśli $k \in A$, to k jest najmniejszym elementem zbioru A, bo jest najmniejszym elementem zbioru $\mathcal{N}(k)$. Załóżmy więc, że $k \notin A$ oraz że w niepustym zbiorze A nie ma liczby najmniejszej. Niech B będzie zbiorem tych liczb $n \in \mathcal{N}(k)$, dla których nierówność $n < a$ zachodzi dla każdego $a \in A$. Oczy-

wiście $k \in B$. Jeśli $n \in B$, to $n < a$ dla każdego $a \in A$. Stąd wynika, że dla każdego $a \in A$ zachodzi nierówność $n+1 \leqslant a$. Jeśli $n+1 \in A$, to $n+1$ jest najmniejszą liczbą w zbiorze A. Jeśli $n+1 \neq a$ dla każdej liczby $a \in A$, to $n+1 \in B$. Jeśli więc w zbiorze A nie ma liczby najmniejszej, to zbiór B zawiera $\mathcal{N}(k)$, ale to oznacza, że zbiór A jest pusty, wbrew założeniu. ■

Definicja 9.9 (zbioru ograniczonego z góry)
Mówimy, że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry liczbą M wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $a \in A$ zachodzi $a \leqslant M$. ■

Twierdzenie 9.10 (Zasada maksimum)
Każdy niepusty zbiór $A \subseteq \mathcal{N}(k)$, ograniczony z góry przez liczbę $M \in \mathcal{N}(k)$ ma element największy, w szczególności w każdym złożonym z liczb naturalnych zbiorze, który jest ograniczony z góry liczbą naturalną, jest liczba największa.

Dowód. Niech $A \subseteq \mathcal{N}(k)$ będzie zbiorem ograniczonym z góry elementem zbioru $\mathcal{N}(k)$. W zbiorze ograniczeń górnych zbioru A należących do $\mathcal{N}(k)$ istnieje najmniejsze. Oznaczmy je przez $M \in \mathcal{N}(k)$. Liczba $M-1$ nie jest ograniczeniem górnym zbioru A, więc dla pewnej liczby $n \in A$ zachodzi nierówność podwójna $M \geqslant n > M-1$. Wynika stąd, że $n+1 > M$, a ponieważ między n i $n+1$ nie ma liczb ze zbioru $A \subseteq \mathcal{N}(k)$, więc $M = n$. ■

Uwaga 9.11 (o zasadzie Archimedesa)
Zbiór $\mathcal{N}(k)$ nie jest ograniczony z góry żadna liczbą rzeczywistą, w szczególności dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje liczba naturalna $n > x$. Można udowodnić, że to twierdzenie nie wynika z podanych do tej pory pewników. Trzeba skorzystać z pewnika ciągłości, który sformułujemy później. ■

Stwierdzenie 9.12
Jeśli $m, n \in \mathcal{N}(k)$ i $m > n$, to $m - n \in \mathbb{N}$.

Dowód. Niech $n \in \mathcal{N}(k)$. Niech A oznacza zbiór złożony z tych liczb $m \in \mathcal{N}(n+1)$, dla których $m-n \in \mathbb{N}$. Oczywiście $n+1 \in A$. Jeśli $m \in A$, to $m+1-n = (m-n)+1 \in \mathbb{N}$, bowiem $m-n \in \mathbb{N}$. Z tego wynika, że $m+1 \in A$. Stąd wynika, że $A \supseteq \mathcal{N}(n+1)$, a to kończy dowód, bo jeśli $m > n$ i $m \in \mathcal{N}(k)$, to $m \in \mathcal{N}(n+1)$. ■

Stwierdzenie 9.13
Suma i iloczyn liczb naturalnych są liczbami naturalnymi.

Dowód. Niech $n \in \mathbb{N}$. Niech $A = \{m \in \mathbb{N}\colon \quad m+n \in \mathbb{N}\}$. Oczywiście $1 \in A$. Jeśli $m \in A$, to $m+n \in A$, a z tego wynika, że $(m+1)+n = (m+n)+1 \in A$, zatem $m+1 \in A$. Wobec tego $A \supseteq \mathbb{N}$, a to oznacza, że dla każdej liczby naturalnej m suma $n+m$ też jest liczbą naturalną.

Niech $n \in \mathbb{N}$ i niech $B = \{m \in \mathbb{N}\colon \quad mn \in \mathbb{N}\}$. Ponieważ $1 \cdot n = n \in \mathbb{N}$, więc $1 \in B$. Jeśli $m \in B$, to $mn \in B$ i wobec tego $(m+1) \cdot n = mn + n \in B$, bo suma liczb naturalnych jest liczbą naturalną, co już wiemy. Wobec tego $B \supseteq \mathbb{N}$, a to oznacza, że iloczyn liczb naturalnych jest liczbą naturalną. ■

Udowodnimy teraz twierdzenie, które każdy chętnie uzna za oczywiste. Dowód podajemy po to, by pokazać, jak można ściśle takie twierdzenie sformułować i uzasadnić. Chodzi o to, że jeśli chcemy umieścić jakieś przedmioty w szufladkach i szufladek jest mniej niż przedmiotów, to musimy do co najmniej jednej z szufladek włożyć dwa przedmioty. O liczbach $1, 2, \ldots, n$ należy w poniższym twierdzeniu myśleć jako o numerach szufladek, a o liczbach $1, 2, \ldots, n, n+1$ jako o numerach przedmiotów.

Twierdzenie 9.14 (zasada szufladkowa Dirichleta)
Jeśli $f\colon \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1\} \longrightarrow \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ jest jakąkolwiek funkcją, to istnieją dwie różne liczby $k, \ell \in \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1\}$, dla których zachodzi równość $f(k) = f(\ell)$.

Dowód. Wykażemy to twierdzenie przez indukcję względem n. Dla $n = 1$ twierdzenie jest prawdziwe, bo istnieje tylko jedyna funkcja $f\colon \{1, 2\} \longrightarrow \{1\}$. Jest ona zdefiniowana za pomocą wzorów: $f(1) = 1$ i $f(2) = 1$, więc przyjmujemy $k = 1$ i $\ell = 2$.

Niech $O_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla każdej funkcji $f\colon O_n \longrightarrow O_{n-1}$. Załóżmy, że istnieje funkcja różnowartościowa $f\colon O_{n+1} \longrightarrow O_n$. Jeżeli dla każdego $k \leqslant n$ spełniona jest nierówność $f(k) < n$, to f przekształca zbiór O_n w zbiór O_{n-1} i jest różnowartościowa, co przeczy założeniu indukcyjnemu. Wobec tego istnieje taka liczba $k \leqslant n$, że $f(k) = n$. Ponieważ funkcja f jest różnowartościowa, więc $f(n+1) \neq f(k) = n$, zatem $f(n+1) < n$. Niech $g(j) = f(j)$ dla

$j \in O_n$, $j \neq k$ i $g(k) = f(n+1)$. Jasne jest, że zdefiniowaliśmy różnowartościową funkcję $g\colon O_n \longrightarrow O_{n-1}$, co w świetle założenia indukcyjnego jest niemożliwe. Dowód został zakończony. ■

Czytelnik zapewne zwrócił uwagę na to, że prawie wszystkie dotąd przeprowadzone rozumowania z udziałem liczb naturalnych opierają się na zasadzie indukcji zupełnej. Przyzwyczajeni jesteśmy bowiem do traktowania liczb naturalnych jako narzędzia umożliwiającego liczenie, a zasada indukcji w swej istocie mówi o tym ściśle.

Zamierzamy zająć się teraz podzielnością. Wygodniej jest mówić o podzielności w zbiorze liczb całkowitych, więc zaczniemy od omówienia podstawowych własności liczb całkowitych

Definicja 9.15 (zbioru liczb całkowitych)
Zbiorem liczb całkowitych nazywany jest taki najmniejszy zbiór $\mathbb{Z} \supseteq \mathbb{N}$, że jeśli $a, b \in \mathbb{Z}$, to również $a - b \in \mathbb{Z}$. Elementy zbioru $\mathbb{Z}$ nazywamy liczbami całkowitymi. ■

Twierdzenie 9.16
$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{a \in \mathbb{R}\colon \quad -a \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, czyli liczba jest całkowita wtedy i tylko wtedy, gdy jest naturalna lub gdy przeciwna do niej jest naturalna, lub gdy jest zerem.

Dowód. Niech $A = \mathbb{N} \cup \{a \in \mathbb{R}\colon \quad -a \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Oczywiście zbiór A zawiera wszystkie liczby naturalne i wszystkie liczby przeciwne do liczb naturalnych.

Niech $a, b \in A$. Wykażemy, że $a - b \in A$. Mamy do rozważenia cztery przypadki: $a, b \in \mathbb{N}$, $-a, b \in \mathbb{N}$, $a, -b \in \mathbb{N}$ oraz $-a, -b \in \mathbb{N}$.

Zaczniemy od pierwszego z nich. Jeśli $a \geqslant b$, to $a - b \in \mathbb{N}$ lub $a - b = 0$ — wynika to ze stwierdzenia 9.12. Załóżmy, że $a < b$. Ze stwierdzenia 9.12 wnioskujemy, że $b - a \in \mathbb{N}$, zatem również $a - b = -(b - a) \in A$.

Teraz drugi przypadek: $-a, b \in \mathbb{N}$. Ze stwierdzenia 9.12 wnioskujemy, że $-a + b \in \mathbb{N}$, zatem $a - b = -(a - b) \in A$.

Trzeci przypadek: $a - b = a + (-b)$, więc $a - b \in \mathbb{N} \subseteq A$.

Czwarty przypadek $a+b = -[(-a)+(-b)]$, liczba $(-a)+(-b)$ jest naturalna jako suma liczb naturalnych, więc przeciwna do niej znajduje się w zbiorze A. Wynika stąd, że $A = \mathbb{Z}$. ■

Stwierdzenie 9.17
Suma i iloczyn liczb całkowitych są liczbami całkowitymi.

Dowód. Niech $a, b \in \mathbb{Z}$. Wtedy $-b \in \mathbb{Z}$, więc $a+b=a-(-b)$ jest liczbą całkowita, por. poprzednie stwierdzenie.

$ab = -[a(-b)] = -[(-a)b] = (-a)(-b)$, a ponieważ iloczyn liczb naturalnych jest liczbą naturalną i liczba przeciwna do naturalnej jest całkowita, więc $ab \in \mathbb{Z}$. ■

Twierdzenie 9.18
W każdym niepustym, ograniczonym z góry liczbą całkowitą zbiorze, złożonym liczb całkowitych istnieje liczba największa.
W każdym niepustym, ograniczonym z dołu liczbą całkowitą zbiorze złożonym z liczb całkowitych istnieje liczba najmniejsza.
Dowód. Niech $A \subseteq \mathbb{Z}$ będzie niepustym zbiorem i niech $M \in \mathbb{Z}$ będzie jego ograniczeniem górnym. Niech $B = \{-a\colon \quad a \in A\}$. Zbiór B jest ograniczony z dołu, bo $B \subseteq \mathcal{N}(-M)$. Z zasady minimum wynika, że w zbiorze B jest element najmniejszy. Oznaczmy go przez b i niech $M_0 = -b$. Oczywiście $M_0 \in A$ i jeśli $a \in A$, to $a \leqslant M_0$.

Jeśli $A \subseteq \mathbb{Z}$ będzie niepustym, ograniczonym z dołu liczbą całkowitą c zbiorem złożonym z liczb całkowitych, to $A \subseteq \mathcal{N}(c)$, więc w zbiorze A jest element najmniejszy — wynika to z zasady minimum. ■

Definicja 9.19 (potęgi)
1° $a^1 = a$, $a^{n+1} = a^n \cdot a$ dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ i każdej liczby rzeczywistej a.
2° $a^0 = 1$ dla każdego $a \neq 0$.
3° $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ dla każdej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i każdej liczby całkowitej $n < 0$. ■

Symbolu 0^0 nie definiujemy, później stanie się jasne dlaczego, aczkolwiek należy stwierdzić, że w wielu sytuacjach przyjmuje się, że $0^0 = 1$, głównie dla uproszczenia zapisu.

Lemat 9.20
Dla każdego $a \neq 0$ i dowolnych nieujemnych liczb całkowitych m, n zachodzi równość $a^{m+n} = a^m a^n$.
Dowód. Ustalmy dowolnie liczbę $m \in \mathcal{N}(0)$. Zastosujemy in-

dukcję względem $n \in \mathcal{N}(0)$. Mamy $a^{m+0} = a^m = a^m \cdot 1 = a^m \cdot a^0$, zatem teza zachodzi dla $n = 0$. Załóżmy, że dla pewnej liczby naturalnej n zachodzi wzór $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$. Wtedy

$$a^{m+n+1} = a^{m+n} \cdot a = \left(a^m \cdot a^n\right) \cdot a = a^m \cdot \left(a^n \cdot a\right) = a^m \cdot a^{n+1},$$

co kończy dowód indukcyjny. ■

Lemat 9.21
Dla każdego $a \neq 0$ i dowolnych nieujemnych liczb całkowitych m, n zachodzi równość $a^{m-n} = a^m a^{-n}$.

Dowód. Jeśli $m = n$, to zachodzą następujące równości

$$a^{m-n} = a^0 = 1 = \tfrac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \tfrac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n}.$$

Jeżeli $m > n$, to na mocy poprzedniego lematu zachodzi równość

$$a^{m-n} a^n = a^{m-n+n} = a^m, \text{ więc } a^{m-n} = a^m \cdot \tfrac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n}.$$

Jeśli $m < n$, to $a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}} = \frac{1}{a^n \cdot a^{-m}} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{1/a^m} = a^{-n} \cdot a^m$. ■

Lemat 9.22
Dla każdego $a \neq 0$ i dowolnych ujemnych liczb całkowitych m, n zachodzi równość $a^{m+n} = a^m a^n$.

Dowód. Prawdziwy jest ciąg równości:

$$a^{m+n} = \frac{1}{a^{-m-n}} = \frac{1}{a^{-m} a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = a^m \cdot a^n. \ ■$$

Z ostatnich trzech lematów wynika

Twierdzenie 9.23 (podstawowa własność potęgi)
Dla dowlnych liczb całkowitych a, b i dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ zachodzi równość: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$. ■

Definicja 9.24 (dzielnika)
Liczba całkowita a jest dzielnikiem liczby całkowitej b wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita k taka, że $ak = b$. Piszemy wtedy $a|b$. ■

Stwierdzenie 9.25
Jeśli $a|b$ i $b|c$, to $a|c$.

Dowód. Jeśli $b = ka$ i $c = b\ell$, to $c = (k\ell)a$. ■

Stwierdzenie 9.26
Każda liczba całkowita jest dzielnikiem 0.

Dowód. Wynika to z tego, że $a \cdot 0 = 0$. ■

Definicja 9.27 (dzielenia z resztą)

Jeśli a i b są liczbami całkowitymi, $b \neq 0$ i istnieją liczby całkowite q, r takie, że $a = bq + r$ i $0 \leqslant r < |b|$, to mówimy, że q jest ilorazem z dzielenia a przez b zaś r — resztą z dzielenia liczby a przez liczbę b. ■

Stwierdzenie 9.28

Dla dowolnych liczb całkowitych a, $b \neq 0$ istnieje dokładnie jedna para liczb całkowitych q, r taka, że $a = bq + r$ i $0 \leqslant r < |b|$.

Dowód. Z równości $bq + r = (-b)(-q) + r$ wynika, że wystarczy udowodnić to stwierdzenie dla $b > 0$. W dalszym ciągu zakładamy, że $b > 0$. Z zasady maksimum dla liczb całkowitych wynika, że w zbiorze $\{n \in \mathbb{Z}\colon \quad nb \leqslant a\}$ istnieje element największy $q \in \mathbb{Z}$. Niech $r = a - qb$. Oczywiście

$$0 \leqslant r = a - qb < (q+1)b - qb = b.$$

Istnienie ilorazu i reszty zostało wykazane.

Jeśli $bq + r = bq_1 + r_1$ i $0 \leqslant r, r_1 < b$, to $r - r_1 = b(q_1 - q)$. Oczywiście $|r_1 - r| < b$ (różnica dwu liczb nieujemnych mniejszych niż b ma wartość bezwzględną mniejszą niż b). Wobec tego $|b(q_1 - q)| < b$, ale to wymusza nierówność $|q_1 - q| < 1$, czyli $|q_1 - q| = 0$, więc $q_1 = q$. Mamy więc $r - r_1 = b(q_1 - q) = 0$. Dowód został zakończony. ■

Definicja 9.29 (największego wspólnego dzielnika)

Największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b nazywamy największą z takich liczb d, że $d|a$, $d|b$ czyli największy ze wspólnych dzielników liczb a i b. ■

Z tego, że $a|b$ i $b \neq 0$ wynika oczywiście, że $|a| \leqslant |b|$. Największym wspólnym dzielnikiem liczb 6 i 4 jest 2. Liczby $a = 0$ i $b = 0$ nie mają największego wspólnego dzielnika. Jedynymi dzielnikami jedynki są liczby ± 1.

Definicja 9.30 (liczb względnie pierwszych)

Dwie liczby całkowite są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy ich największym wspólnym dzielnikiem jest 1. ■

Liczby 15 i 28 są względnie pierwsze, podobnie 323 i 143.

Twierdzenie 9.31 (o największym wspólnym dzielniku) Jeśli a, b są liczbami całkowitymi i co najmniej jedna z nich jest różna od 0, to mają one największy wspólny dzielnik, $\mathrm{nwd}(a, b)$. Istnieją liczby całkowite k, m takie, że $ak + bm = \mathrm{nwd}(a, b)$.[9.1]

Dowód. Niech $D = \{ax + by\colon \ \ x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z},\ ax + by > 0\}$. $D \neq \emptyset$, bo jeśli $a \neq 0$, to $|a| \in D$, gdyż $|a| = a \cdot 1 + b \cdot 0$, gdy $a > 0$ i $|a| = a \cdot (-1) + b \cdot 0$, gdy $a < 0$. Oznaczmy przez $d = ak + bm$ najmniejszą liczbą w zbiorze D. Ponieważ zbiór D złożony jest z liczb dodatnich, więc $d > 0$. Wykażemy, że $d|a$. Jest tak, gdy $a = 0$. Załóżmy, że $a \neq 0$. Wtedy istnieją liczby całkowite q, r takie, że $a = qd + r$ i $0 \leqslant r < d$. Stąd $r = a - qd = a(1 - kq) + b(-qm)$. Jeśli $r > 0$, to $r \in D$, co przeczy temu, że najmniejszą liczbą w zbiorze D jest d. Wobec tego $r = 0$, ale to oznacza, że $a = qd$, czyli że $d|a$. Analogicznie $d|b$. Wykazaliśmy, że d jest wspólnym dzielnikiem liczb a, b. Jeśli $\delta|a$ i $\delta|b$, to istnieją takie liczby $\lambda, \kappa \in \mathbb{Z}$, że $a = \lambda\delta$ i $b = \kappa\delta$, zatem $d = ak + bl = \delta(k\lambda + m\kappa)$, zatem $\delta|d$, więc $|\delta| \leqslant d$. Oznacza to, że $d = \mathrm{nwd}(a, b)$. ∎

Opiszemy teraz sposób znajdowania największego wspólnego dzielnika dwu liczb naturalnych a i b, zwany algorytmem Euklidesa. Przy okazji otrzymamy nieco dłuższy, ale za to konstruktywny, dowód twierdzenia o największym wspólnym dzielniku. Załóżmy, że $b \neq 0$. Istnieją wtedy takie liczby całkowite q_0 i r_0, że $a = q_0 b + r_0$ i $0 \leqslant r_0 < b$. Jeśli $d|a$ i $d|b$, np. $d = \mathrm{nwd}(a, b)$, to $d|(a - q_0 b) = r_0$, czyli największy wspólny dzielnik liczb a, b jest dzielnikiem b i r_0, więc $d \leqslant \mathrm{nwd}(b, r_0)$. Jeśli liczba δ jest dzielnikiem liczb b i r_0, np. $\delta = \mathrm{nwd}(b, r_0)$, to jest też dzielnikiem liczby $a = q_0 b + r_0$, czyli największy wspólny dzielnik liczb b i r_0 jest też dzielnikiem a, więc $\delta \leqslant \mathrm{nwd}(a, b)$. Z nierówności $d \leqslant \delta$ i $\delta \leqslant d$ wynika równość $\mathrm{nwd}(a, b) = d = \delta = \mathrm{nwd}(b, r_0)$.

Jeśli $r_0 > 0$, to istnieją takie liczby $q_1 \in \mathbb{Z}$ i $r_1 \in \mathbb{Z}$, że $b = q_1 r_0 + r_1$ i $0 \leqslant r_1 < r_0$. Tak jak poprzednio otrzymujemy

[9.1] W licznych książkach poświęconych teorii liczb największy wspólny dzielnik liczb a,b oznaczany jest symbolem (a,b).

równość $\mathrm{nwd}(b,r_0) = \mathrm{nwd}(r_0,r_1)$. Jeśli $0 < r_1$, to istnieją takie liczby $q_2 \in \mathbb{Z}$ i $r_2 \in \mathbb{Z}$, że $r_0 = q_2 r_1 + r_2$, $0 \leqslant r_2 < r_1$ oraz $\mathrm{nwd}(r_0,r_1) = \mathrm{nwd}(r_1,r_2)$. To postępowanie możemy powtarzać do chwili, w której reszta z dzielenia będzie równa 0. Taki moment musi nastąpić, bo $r_0 > r_1 > r_2 > \ldots$, a w każdym zbiorze liczb naturalnych istnieje najmniejsza. Niech r_n będzie najmniejszą liczbą. Oznacza to, że $r_{n+1} = 0$, więc $r_{n-1} = q_{n+1} r_n$. Stąd wynikają równości

$r_n = \mathrm{nwd}(r_{n-1},r_n) = \mathrm{nwd}(r_{n-2},r_{n-1}) = \ldots = \mathrm{nwd}(b,r_0) = \mathrm{nwd}(a,b)$.

Przykład 9.1 Niech $a = 68$ i $b = 26$. Mamy wtedy:

$68 = 2 \cdot 26 + 16$, $q_0 = 2$, $r_0 = 16$;
$26 = 1 \cdot 16 + 10$, $q_1 = 1$, $r_1 = 10$;
$16 = 1 \cdot 10 + 6$, $q_2 = 1$, $r_2 = 6$;
$10 = 1 \cdot 6 + 4$, $q_3 = 1$, $r_3 = 4$;
$6 = 1 \cdot 4 + 2$, $q_4 = 1$, $r_4 = 2$;
$4 = 2 \cdot 2 + 0$, $q_5 = 1$, $r_5 = 0$.

Wobec tego $\mathrm{nwd}(68,26) = 2 = 6 - 4 = 6 - (10 - 6) = =2 \cdot 6 - 10 = 2(16 - 10) - 10 = 2 \cdot 16 - 3 \cdot 10 = 2 \cdot 16 - 3(26 - 16) = =5 \cdot 16 - 3 \cdot 26 = 5(68 - 2 \cdot 26) - 3 \cdot 26 = 5 \cdot 68 - 13 \cdot 26$. Znaleźliśmy więc największy wspólny dzielnik i przedstawiliśmy go w postaci $k \cdot 42 + m \cdot 26$, więc $k = 5$, $m = -13$. Nie twierdzimy, że to jedyna możliwość, bo np. $2 = (5 + 26) \cdot 68 - (13 + 68) \cdot 26$. ■.

Przykład 9.2 Niech $a = 452\,261$, $b = 10\,489$. Mamy teraz $452\,261 = 43 \cdot 10489 + 1234$, $10489 = 8 \cdot 1234 + 617$ i $1234 = 2 \cdot 617$, zatem największym wspólnym dzielnikiem liczb $a = 452\,261$ oraz $b = 10\,489$ jest liczba

$617 = 10\,489 - 8 \cdot 1234 = 10\,489 - 8(452\,261 - 43 \cdot 10\,489) = =345 \cdot 10\,489 - 8 \cdot 452\,261$.

Czytelnik zechce sprawdzić, że liczby 617 i $\frac{452261}{617} = 733$ są pierwsze. Widać stąd, że pomysł poszukiwania największego wspólnego dzielnika za pomocą metody opisywanej w szkołach podstawowych nie jest w tym przypadku najlepszy … ■

W tych dwóch przykładach pokazaliśmy ,,przy okazji” nieco inny dowód twierdzenia o największym wspólnym dzielniku dwu liczb. Pokażemy jeszcze jeden dowód, tym razem indukcyjny.

Dowód indukcyjny
Niech T_n oznacza zdanie: dla każdych liczb naturalnych a i $b \leqslant n$ istnieją takie liczby całkowite x, y, że $\mathrm{nwd}(a, b) = ax + by$.
1° Zdanie T_1 jest prawdziwe, bo niezależnie od $a \in \mathbb{N}$ największym wspólnym dzielnikiem a i b (teraz $b = 1$), jest liczba 1, więc wystarczy przyjąć $x = 0$ i $y = 1$.
2° Założmy, ze zdanie T_n jest prawdziwe. Udowodnimy zdanie T_{n+1}. Niech $a \in \mathbb{N}$ i $b = n+1$. Oznaczmy $d = \mathrm{nwd}(a, b)$. Wtedy istnieją takie liczby całkowite q i r, że $a = qb+r$ oraz $0 \leqslant r < b$. Tak jak poprzednio stwierdzamy, że $d = \mathrm{nwd}(a, b) = = \mathrm{nwd}(b, r)$. Jeśli $r = 0$, to przyjmujemy $x = 0$ i $y = 1$, bo największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b jest w tym przypadku b. Jeśli $r > 0$, to na mocy zdania T_n istnieją takie liczby całkowite x_1 oraz y_1, że

$$d = bx_1 + ry_1 = bx_1 + (a - qb)y_1 = ay_1 + b(x_1 - qy_1)\,.$$

Wystarczy przyjąć $x = y_1$ i $y = x_1 - qy_1$. ■

Z twierdzenia o największym wspólnym dzielniku wynika

Wniosek 9.32
Liczba naturalna d jest największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wspólny dzielnik a i b jest dzielnikiem liczby d. ■

Ten wniosek często jest przyjmowany za definicję największego wspólnego dzielnika dwu liczb.

Definicja 9.33 (liczby pierwszej)
$p \in \mathbb{Z}$ jest liczbą **pierwszą** wtedy i tylko wtedy, gdy $|p| > 1$ i jedynymi naturalnymi dzielnikami liczby $|p|$ są liczby 1 i $|p|$. Liczba całkowita a nazywana jest **złożoną** wtedy i tylko wtedy, gdy $|a| > 1$ i nie jest ona liczbą pierwszą.[9.2] ■

Liczbami pierwszymi są ± 2, ± 3, ± 5, ± 7, ± 11, ...

Liczbami złożonymi są ± 4, ± 6, ± 8, ± 9, ± 10, ...

Liczby -1, 0 i 1 nie są ani pierwsze, ani złożone.

Twierdzenie 9.34 (o rozkładaniu na czynniki pierwsze)
Każdą liczbę naturalną większą od 1 można przedstawić w postaci

[9.2] W szkołach często zasięg tej definicji jest ograniczony do liczb dodatnich.

iloczynu liczb pierwszych.

Dowód. Zastosujemy indukcję zaczynając od liczby 2.

1° Liczba 2 jest iloczynem liczb pierwszych (złożonym z jednego czynnika).

2° Załóżmy, że wszystkie liczby mniejsze niż n są iloczynami liczb pierwszych. Jeśli n jest liczbą pierwszą, to jest iloczynem (złożonym z jednego czynnika). Jeśli n jest liczbą złożoną, to istnieją takie liczby naturalne $a > 1$, $b > 1$, że $ab = n$. Wobec tego $1 < a < n$ i $1 < b < n$, zatem każda z liczb a, b jest iloczynem liczb pierwszych, więc ich iloczyn też. Stąd wynika, że każda liczba naturalna większa od 1 i mniejsza od $n+1$ jest iloczynem liczb pierwszych. ■

Twierdzenie 9.35 (charakteryzujące liczby pierwsze)

Liczba $p \neq 0$ jest pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy $|p| > 1$ i z tego, że $p|ab$ wynika, że $p|a$ lub $p|b$.

Dowód. Jeśli p **nie** jest liczbą pierwszą, to istnieją takie liczby całkowite a, b, że $p = ab$ i $|a| > 1$, $|b| > 1$. Jeśli $p|a$, to $a = kp$ dla pewnej liczby całkowitej k i wobec tego $p = kpb$, więc $1 = kb$, co oznacza, że $|b| = 1$, wbrew założeniu.

Załóżmy teraz, że $p|ab$ i że p jest liczbą pierwszą. Jeśli $p \nmid a$, to $\mathrm{nwd}(a, p) = 1$, zatem istnieją liczby całkowite k, m takie, że $ak + pm = 1$. Wobec tego $b = bak + bpm$. Z założenia $p|abk$ i oczywiście $p|bpm$, więc $p|(abk + bpm) = b$. ■

Wniosek 9.36

Jeśli liczby p, p_1, p_2, $\ldots$, p_n są pierwsze i $p \mid p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, to istnieje takie $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, że $p \mid p_j$, więc $|p_j| = |p|$.

Dowód. Stosujemy indukcję względem n. ■

Twierdzenie 9.37 (zasadnicze twierdzenie arytmetyki[9.3])

Niech $a \neq 0$ będzie liczbą całkowita, która nie jest dzielnikiem 1. Istnieją wtedy takie liczby pierwsze $p_1, p_2, \ldots, p_n$, że zachodzi równość $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$.

Jeśli $a = \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 \cdot \ldots \cdot \tilde{p}_m$ i liczby $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_m$ są pierwsze,

[9.3] czyli twierdzenie o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze to $n = m$ i po ewentualnej zmianie kolejności (numeracji) zachodzą równości $p_1 = \eta_1\tilde{p}_1$, $p_2 = \eta_2\tilde{p}_2$, $\ldots$ $, p_n = \eta_n\tilde{p}_n$, gdzie $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \in \{-1, 1\}$.

Przed podaniem dowodu wypada powiedzieć, że to twierdzenie mówi, że każdą liczbę całkowitą, z wyjątkiem $0, -1, 1$ można przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych na jeden tylko sposób, jeśli nie brać pod uwagę zmian kolejności czynników ani zmian ich znaków: $6 = 2 \cdot 3 = (-2) \cdot (-3) = 3 \cdot 2 = (-3) \cdot (-2)$.

Dowód. Istnienie rozkładu na czynniki pierwsze wykazaliśmy już wcześniej.

Teraz zajmiemy się jednoznaczością rozkładu. Jeśli

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 \cdot \ldots \cdot \tilde{p}_m = \tilde{p}_1 \cdot (\tilde{p}_2 \cdot \ldots \cdot \tilde{p}_m),$$

to z wniosku 9.36 wynika, że istnieje takie $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, że $p_1 | \tilde{p}_j$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $j = 1$ (jeśli nie to zamieniamy miejscami $\tilde{p}_1$ z $\tilde{p}_j$). Wobec tego $p_1 = \pm\tilde{p}_1$. Wobec tego $p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = \pm\tilde{p}_2 \cdot \ldots \cdot \tilde{p}_m$. Po ewentualnej zmianie numeracji stwierdzamy, że $p_2 \mid \tilde{p}_2$, więc $p_2 = \pm p_2$, itd. Dowód został zakończony. ■

W książce ,,The Higher Arithmetic, An Introduction to the Theory of Numbers" Harolda Davenporta (przełożonej na język rosyjski) można znaleźć dowód, który nie korzysta z twierdzenia o największym wspólnym dzielniku i kilka innych dowodów zasadniczego twierdzenia arytmetyki. Ten korzystający z najprostszych środków przytoczymy. Tym razem nie skorzystamy z charakteryzacji liczb pierwszych.

Drugi dowód zasadniczego twierdzenia arytmetyki

Istnienie rozkładu wykazujemy tak, jak poprzednio, więc tej części dowodu nie przepisujemy. Załóżmy, że

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 \cdot \ldots \cdot \tilde{p}_m$$

jest najmniejszą liczbą naturalną, która ma dwa różne rozkłady na czynniki pierwsze i że liczby $p_1, p_2, \ldots, p_n, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_m$ są pierwsze i dodatnie. Jeśli te rozkłady są różne, to żadna z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_n$ nie pojawia się wśród liczb $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_m$. Możemy przyjąć, że $\tilde{p}_1 \leqslant \tilde{p}_2 \leqslant \ldots \leqslant \tilde{p}_m$ i $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_n$. Ponieważ liczba a nie jest pierwsza, więc $n \geqslant 2$ i $m \geqslant 2$, zatem $a \geqslant p_1^2$ i $a \geqslant \tilde{p}_1^2$ i oczywiście $p_1 \neq \tilde{p}_1$. Wobec tego $a > p_1\tilde{p}_1$, zatem liczba $a - p_1\tilde{p}_1$ jest liczbą naturalną mniejszą od a, zatem ma dokładnie jeden rozkład na iloczyn naturalnych czynników pierwszych. Wobec tego liczba $a - p_1\tilde{p}_1$ jest podzielna przez p_1 oraz przez $\tilde{p}_1 \neq p_1$, zatem również przez $p_1\tilde{p}_1$, bo ta ma tylko jeden rozkład na czynniki, a z tego wynika, że jeśli jest podzielna przez jakąś liczbę pierwszą, to ta liczba pierwsza występuje w **jedynym** rozkładzie na czynniki pierwsze.

Wobec tego $a - p_1\tilde{p}_1 = p_1\tilde{p}_1 q_1 q_2 \ldots q_j$ dla pewnych liczb pierwszych $q_1, q_2, \ldots, q_j$. Dzieląc tę równość stronami przez p_1 otrzymujemy $p_2 p_3 \ldots p_n - \tilde{p}_1 = \tilde{p}_1 q_1 q_2 \ldots q_j$, a stąd wynika, że liczba $\tilde{p}_1$ jest dzielnikiem liczby $p_2 p_3 \ldots p_n < a$, więc przedstawialnej w postaci iloczynu liczb pierwszych w jeden tylko sposób. Stąd jednak wynika, że wśród liczb $p_2, p_3, \ldots, p_n$ występuje liczba $\tilde{p}_1$, wbrew założeniu. ■

Po tym dowodzie H.Davenport napisał: *czytelnik zgodzi się, że chociaż dowód ten ani nie jest długi ani trudny, to jednak jest dosyć delikatny.*

Zasadnicze twierdzenie arytmetyki, twierdzenie o dzieleniu z resztą itd. wydają się na pierwszy rzut oka oczywiste, ale ich dowody całkiem proste nie są. Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze korzystamy np. wtedy, gdy z tego, że $2 \mid n$ i $3 \mid n$ wnioskujemy, że $6 \mid n$. Twierdzenie o największym wspólnym dzielniku przydaje się między innymi do rozwiązywania równań w liczbach całkowitych. Twierdzenie o dzieleniu z resztą stosujemy uzasadniając przeróżne cechy podzielności.

Następnymi bardzo ważnymi liczbami są wymierne i teraz o nich krótko opowiemy.

Definicja 9.38 (zbioru liczb wymiernych)
Zbiorem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ nazywamy najmniejszy zbiór taki, że $\mathbb{Q} \supseteq \mathbb{Z}$ i jeśli $a, b \in \mathbb{Q}$ oraz $b \neq 0$, to $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Elementy zbioru $\mathbb{Q}$ zwane są liczbami wymiernymi. ■

Stwierdzenie 9.39
Zbiór $\mathbb{Q}$ składa się z liczb postaci $\frac{a}{b}$, gdzie $b \neq 0$ i $a, b \in \mathbb{Z}$.
Suma, różnica, iloczyn i iloraz liczb wymiernych są liczbami wymiernymi (iloraz, gdy dzielimy przez liczbę różną od 0).

Dowód. Dla dowodu wystarczy wykazać, że w zbiorze ilorazów $\frac{a}{b}$ liczb całkowitych wykonalne są działania arytmetyczne. Mamy $\frac{a}{b} \cdot [\frac{c}{d}]^{-1} = ab^{-1}[cd^{-1}]^{-1} = ab^{-1}dc^{-1} = (ad)(cb)^{-1} = \frac{ad}{bc}$, co oznacza, że w zbiorze $\mathbb{Q}$ są jedynie ilorazy $\frac{a}{b}$ liczb całkowitych. Mamy $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ab^{-1} + cd^{-1} = add^{-1}(b)^{-1} + cbb^{-1}d^{-1} =$ $= [ad + bc]b^{-1}d^{-1} = [ad + bc](bd)^{-1}$. Analogicznie dowodzimy, że różnica ilorazów liczb całkowitych jest ilorazem liczb całkowitych. Mnożenie sprowadzamy do dzielenia, a iloraz liczb wymiernych jest liczbą wymierną, co wynika wprost z definicji zbioru $\mathbb{Q}$. ■

Twierdzenie 9.40 (o postaci nieskracalnej)
Dla każdej liczby wymiernej w istnieje dokładnie jedna taka para liczb $p \in \mathbb{Z}$ $q \in \mathbb{N}$, że $w = \frac{p}{q}$ i $\text{nwd}(p, q) = 1$.

Dowód. Ze stwierdzenia 9.39 wynika, że istnieją takie liczby całkowite a i b, że $w = \frac{a}{b}$. Oczywiście wtedy $w = \frac{-a}{-b}$, można więc od razu założyć, że b jest liczbą naturalną. Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b. Wtedy istnieją liczby $p \in \mathbb{Z}$ oraz $q \in \mathbb{N}$, że $a = pd$ i $b = qd$. Wtedy największym wspólnym dzielnikiem liczb p i q jest liczba 1. Stąd wynika, że $ab^{-1} = pd(qd)^{-1} = pdd^{-1}q^{-1} = pq^{-1} = \frac{p}{q}$.

Załóżmy, że $p, r \in \mathbb{Z}$, $q, s \in \mathbb{N}$, $\text{nwd}(p, q) = 1 = \text{nwd}(r, s)$ oraz $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$. Wtedy $ps = qr$. Ponieważ $s \mid qr$ i $\text{nwd}(r, s) = 1$, więc s jest dzielnikiem q, zatem $s \leqslant q$. Ta samo dowodzimy, że $q \leqslant s$. Stąd wynika, że $q = s$. Wobec tego również $p = r$. ■

Twierdzenie 9.41
Jeśli n jest liczbą naturalną, w — wymierną, a — całkowitą i $w^n = a$, to liczba w jest całkowita.

Twierdzenie to mówi, że wymierne pierwiastki z liczb całkowitych są całkowite.

Dowód. Niech $w = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ i niech liczby p, q będą względnie pierwsze. Z równości $w^n = a$ wynika, że $p^n = aq^n$. Jeśli liczba pierwsza r dzieli liczbę q, to dzieli też liczbę p^n, więc również liczbę p. Wtedy r jest wspólnym dzielnikiem obu liczb p i q, co jest niemożliwe, bo są one względnie pierwsze. Liczba q nie ma więc dzielników pierwszych, zatem $q = 1$. Wobec tego liczba $w = p$ jest całkowita. ■

Przypomnijmy teraz definicję pierwiastka.

Definicja 9.42 (pierwiastka)
Niech n będzie liczbą naturalną, $a \geqslant 0$ — liczbą rzeczywistą. Pierwiastkiem (arytmetycznym) stopnia n–tego z liczby a jest taka nieujemną liczba b, dla której zachodzi równość $b^n = a$. Jeśli n jest liczbą naturalną nieparzystą, a — dowolna liczbą rzeczywistą i $b^n = a$, to b jest pierwiastkiem arytmetycznym n–tego stopnia z liczby a. Piszemy wtedy $\sqrt[n]{a} = b$. ■

Aby sprawdzić poprawność definicji, należy sprawdzić, czy liczba b jest wyznaczona jednoznacznie przez podane warunki.
1° Jeśli $0 \leqslant c < b$, to dla każdej liczby naturalnej k zachodzi nierówność $c^k < b^k$ (indukcja). Wynika stąd, że dla dowolnego $a \geqslant 0$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje co najwyżej jedna liczba $b \geqslant 0$, dla której $a = b^n$.
2° Jeśli n jest liczbą nieparzystą i $a < 0$ i $b^n = a$, to $b < 0$. Jeśli $c < b < 0$, to $-c > -b > 0$, więc dla każdej liczby **nieparzystej** k zachodzi nierówność $-c^k = (-c)^k > (-b)^k = -b^k > 0$, czyli $c^k < b^k < 0$. Wynika stąd, że również w tym przypadku istnieje co najwyżej jeden pierwiastek n–tego stopnia z liczby ujemnej.

Nie można jednak wykazać istnienia pierwiastków na gruncie dotychczas przyjętych pewników, ponieważ wszystkie te pewniki są spełnione w zbiorze liczb wymiernych. Gdyby istnienie pierwiastków byłoby konsekwencją tych pewników, to istniałaby taka liczba wymierna b, że $b^2 = 2$. Jednak z twierdzenia, które udowodniliśmy wynika, że musiałaby ona być całkowita. To jednak nie jest możliwe, bo $1^2 < 2 < 2^2$. Dopiero po uzupełnieniu listy pewników o aksjomat Dedekinda będziemy w stanie udowodnić istnienie pierwiastków. Na razie przyjmiemy bez dowodu

Twierdzenie 9.43 (o istnieniu pierwiastków)
Jeśli $a \geqslant 0$ i $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$, to istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista $b \geqslant 0$ taka, że $a = b^k$. Jeśli $k \geqslant 1$ jest liczbą całkowitą nieparzystą, a jest dowolną liczbą rzeczywistą, to istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista b taka, że $b^k = a$. ⊠

Przykład 9.3 $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt[15]{0} = 0$, $\sqrt[6]{1\,000\,000} = 10$, $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt{1024} = 32$, $\sqrt[3]{-\frac{64}{27}} = -\frac{4}{3}$. ■

Przykład 9.4 Jeśli $n \geqslant 2$, to $\sqrt[n]{n} \notin \mathbb{Q}$, bo $1^n < n < 2^n$, gdyż z nierówności Bernoulli'ego wynika, że $2^n = (1+1)^n \geqslant 1+n > n$, a gdyby pierwiastek z liczby całkowitej był wymierny, to byłby liczbą całkowitą. ■

Zadania

1! Wywnioskować zasadę minimum z zasady maksimum.

2! Udowodnić, że odwrotność liczby naturalnej większej niż 1 nie jest liczbą naturalną.

3. W każde z pół nieskończonej kraty kwadratowej wpisano liczbę naturalną w ten sposób, ze jeśli a, b, c, d są liczbami wpisanymi w pola przyległe do pola, na którym znalazła się liczba n, to $a+b+c+d \leqslant 4n$. Dowieść, że w każde pole wpisano tę samą liczbę naturalną. [9.3]

4. Jaka jest największa liczba punktów, które można umieścić w trójkącie równobocznym o boku 2 w taki sposób, by odległość dowolnych dwóch nie była mniejsza niż 1.

5. W sali jest n osób. Udowodnić, że w sali są co najmniej dwie osoby mające tyle samo znajomych. Zakładamy tu, że jeśli osoba O_1 zna osobę O_2, to również O_2 zna osobę. O_1.

6. Ile skoczków można ustawić na szachownicy, jeśli pola na którym znajduje się skoczek nie nie może szachować inny skoczek.

7. Na okręgu danych jest 17 punktów. Każde dwa połączono odcinkiem niebieskim, zielonym lub żółtym. Dowieść, że istnieje trójkąt, którego wszystkie boki są tego samego koloru.

8. Spośród liczb $1, 2, 3, \ldots, 199, 200$ wybrano 101. Dowieść, że co najmniej jedna z nich dzieli inną.

9. Ułożyć kwadrat z kwadratów o bokach 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 14, 16, 18, 20, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 43, 51, 55, 56, 64, 81.

[9.3] Autorem tego zadania jest prof. dr hab. Maciej Skwarczyński.

10. Wykazać, że sześcianu nie można ułożyć z parami różnych sześcianów.

11. Niech $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Dowieść, że $a_n \geqslant 2^n$ dla $n = 1, 2, \ldots$

12! Udowodnić, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

13. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych, które z dzielenia przez 3 dają resztę 1.

14. Udowodnić, że jeśli $p > 0$ jest liczbą pierwszą, a — liczbą całkowitą, to liczba $a^p - a$ jest podzielna przez p.

15. Dowieść, że jeśli liczbę naturalną można przedstawić w postaci sumy kwadratów dwu liczb całkowitych dwoma różnymi sposobami, to jest ona złożona. Przedstawienia różniące się jedynie kolejnością składników uważamy za takie same.

16. Niech $\varphi(m)$ oznacza liczbę liczb naturalnych nie większych od $m \in \mathbb{N}$ i względnie pierwszych z m. Udowodnić, że jeśli liczby a i b są względnie pierwsze, to $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

17. Dowieść, że jeśli w rozkładzie liczby naturalnej n na czynniki pierwsze występują jedynie liczby pierwsze p_1, p_2,... p_k, to $\varphi(n) = n\big(1 - \frac{1}{p_1}\big)\big(1 - \frac{1}{p_2}\big) \cdot \ldots \cdot \big(1 - \frac{1}{p_k}\big)$ — funkcja φ jest zdefiniowana w poprzednim zadaniu.

18. Udowodnić, że jeśli liczba naturalne a i m są względnie pierwsze, φ z zadania 16, to $m \mid a^{\varphi(m)} - 1$.

19. Znaleźć wszystkie takie czwórki liczb całkowitych w, x, y, z, że zachodzi równość $w^4 + 2x^4 = 4(y^4 + 2z^4)$.

20. Udowodnić, że jeśli a i b są takimi liczbami całkowitymi, że $2a^2 + a = 3b^3 + b$, to liczby $a - b$, $2a + 2b + 1$ i $3a + 3b + 1$ są kwadratami liczb całkowitych.

21! Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele takich par liczb całkowitych a, b, że $2a^2 + a = 3b^2 + b$.

22. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele różnych par a, b liczb całkowitych, dla których $a^2 - 2b^2 = 1$.

23. Dowieść, że jeśli liczba pierwsza p nie dzieli liczby całkowitej a, to istnieje taka liczba całkowita b, że p dzieli liczbę $ab - 1$.

24. Załóżmy, że liczby q_1, q_2, ..., q_n są parami względnie pierwsze. Niech $r_1, r_2, \ldots, r_n$ będą liczbami całkowitymi. Udowodnić, że istnieje taka liczba całkowita x, która z dzielenia przez liczbę q_j daje resztę r_j.

25. Udowodnić, że liczba naturalna p jest pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy p jest dzielnikiem liczby $(p-1)!+1$.

26. Znaleźć wszystkie takie pary liczb całkowitych x, y, że zachodzi równość $xy = x + y$.

27. Znaleźć dwie ostatnie cyfry liczby $14^{14^{14}}$.

28. Udowodnić, że jeśli liczby p i $8p^2+1$ są pierwsze, to również liczba $8p^2-1$ jest pierwsza.

29. Ile zer ma na końcu liczba $1\,000\,000!$

30. Udowodnić, że jeśli $a \in \mathbb{Z}$, to liczby $a^3 + 2a$ i $a^4 + 3a^2 + 1$ są względnie pierwsze.

31. Udowodnić, że liczba n^2+3n+5 nie dzieli się przez 121 dla żadnej liczby całkowitej n.

32! Załóżmy, że jedyną liczbą naturalną, która dzieli wszystkie trzy liczby całkowite a, b, c jest jedynka. Dowieść, że równanie $ax+by = c$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a i b są względnie pierwsze.

33! Załóżmy, że jedyną liczbą naturalną, która dzieli wszystkie trzy liczby całkowite a, b, c jest jedynka. Udowodnić, że jeśli $ax_1 + by_1 = c = ax_2 + by_2$ dla pewnych liczb całkowitych x_1, y_1, x_2, y_2, to istnieje taka liczba całkowita n, że

$$x_1 - x_2 = bn \text{ oraz } y_2 - y_1 = an.$$

34. W 1948 r wiek Andrzeja był równy cyfrze jedności w liczbie równej sumie cyfr roku jego urodzenia. Ile lat miał Andrzej w roku 1957?

35. a i b są liczbami całkowitymi. Dowieść, że jeśli 21 jest dzielnikiem liczby $a^2 + b^2$, to 441 też jest jej dzielnikiem.

36. Udowodnić, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ oraz $x > y \geqslant 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ to $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} < \sqrt[n]{x-y}$.

37. Udowodnić, że liczba $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ nie jest całkowita dla żadnej liczby naturalnej $n > 1$.

38. Udowodnić, że jeśli $n \geqslant 3$ jest liczbą naturalną, to liczba $\sqrt{n^2-4}$ jest niewymierna.

39. Udowodnić, że $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} = 4$.

40! Udowodnić, że $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$.

41! Niech n będzie liczbą naturalną, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — liczbami naturalnymi. Dowieść, że $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

42. Udowodnić, że następujące liczby są niewymierne: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

43. Udowodnić, że jeśli $n \geqslant 2$ jest liczbą naturalną, to liczba $\sqrt{n^2+3n}$ jest niewymierna.

44. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich trójek dodatnich liczb wymiernych x, y, z, że $x^2+y^2+z^2=1$.

FUNKCJE LICZBOWE

Zbiory postaci $\{x \in \mathbb{R}\colon \ x \leqslant a\}$, $\{x \in \mathbb{R}\colon \ x \geqslant a\}$, $\{x \in \mathbb{R}\colon \ x < a\}$, $\{x \in \mathbb{R}\colon \ x > a\}$ oznaczane są symbolami $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$, (∞, a) i (a, ∞). Nazywamy półprostymi domkniętymi lub otwartymi o końcu a. Symbol ∞ odczytujemy jako nieskończoność — nie oznacza on żadnej liczby, więc nie można wykonywać działań z jego użyciem. Później niektóre działania z jego użyciem zostaną zdefiniowane.

Zbiory postaci $\{x \in \mathbb{R}\colon \ a \leqslant x \leqslant b\}$, $\{x \in \mathbb{R}\colon \ a < x < b\}$, $\{x \in \mathbb{R}\colon \ a \leqslant x < b\}$, $\{x \in \mathbb{R}\colon \ a < x \leqslant b\}$ nazywamy przedziałami, kolejno: domkniętym, otwartym, domknięto–otwartym i otwarto–domkniętym. Oznaczamy je następującymi symbolami $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$.

Jeśli $D \subseteq \mathbb{R}$ jest dowolnym zbiorem, a $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją, to f nazywamy funkcją liczbową. Najczęściej będziemy rozważać funkcje określone na całym zbiorze $\mathbb{R}$, na półprostych, na przedziałach lub sumach przedziałów i półprostych.

Przykład 10.1 Funkcja pierwiastek kwadratowy jest określona na domkniętej półprostej $[0, \infty)$, więc $f(x) = \sqrt{x}$, $D = [0, \infty)$. ■

Przykład 10.2 Funkcję pierwiastek trzeciego stopnia określamy na całej prostej $\mathbb{R}$, więc $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $D = \mathbb{R}$. ■

Przykład 10.3 Niech $D = \{x \in \mathbb{R}\colon \ x \neq 1\}$ czyli $D = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Wzór $f(x) = \frac{x}{x-1}$ określa funkcję na D. ■

Przykład 10.4 Przyjmijmy $D = \mathbb{R}$ i zdefiniujmy funkcję wzorem $f(x) = \lfloor x \rfloor$, gdzie przez $\lfloor x \rfloor$ oznaczamy największą spośród liczb całkowitych z półprostej $(-\infty, x]$. Prawdziwe są więc równości: $\lfloor 0 \rfloor = 0$, $\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1$, $\lfloor -\frac{3}{2} \rfloor = -2$. Później wykażemy, że ta definicja jest poprawna, tzn., że dla każdej liczby rzeczywistej x istnieją takie liczby całkowite m, n, że zachodzi nierówność $m < x < n$, co wygląda na oczywiste stwierdzenie, tym nie mniej wymaga dowodu, jeśli chcemy mieć pewność, że wszystko o czym mówimy, wynika z przyjętych założeń, czyli pewników. ■

Przykład 10.5 Funkcja Dirichleta. Niech $D = \mathbb{R}$ oraz

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } x \text{ jest liczbą niewymierną,} \\ 1 & \text{jeśli } x \text{ jest liczbą wymierną.} \end{cases} \blacksquare$$

Przykład 10.6 $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$. $\blacksquare$

W analizie często piszemy $f(x)$ zamiast f. Mówimy wtedy o funkcji $\frac{x}{x-1}$, x^2, $x - 13$ itp. Zazwyczaj przyjmujemy wtedy, że dziedziną jest największy zbiór, na którym funkcję można zdefiniować danym wzorem. Nie zawsze jest to całkiem jasne. Wtedy trzeba wyraźnie napisać, czym jest dziedzina funkcji. Przy takiej umowie (na ogół milczącej) pamiętamy, że równość $f(x) = g(x)$ oznacza równość **wartości** funkcji f i g w punkcie x, a nie równość funkcji f i g.

Funkcje liczbowe określone na tym samym zbiorze można dodawać, odejmować i mnożyć oraz mnożyć przez liczbę. Stosujemy wtedy oznaczenia $f+g$, $f-g$, fg i cf. Jeśli funkcja f nie znika w żadnym punkcie, tzn. jeśli $f(x) \neq 0$ dla każdego $x \in D$, to możemy też mówić o ilorazie $\frac{f}{g}$.

Uwaga 10.1
Przypominamy, że funkcją odwrotną do funkcji $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy taką funkcję $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzą obie równości $f(g(x)) = x$ i $g(f(x)) = x$. Funkcję odwrotną do funkcji f oznaczamy symbolem $f^{-1}(x)$. Jeśli $f(x) = x^3$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, więc na ogół $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{x^3}$. $\blacksquare$

Definicja 10.2 (funkcji ograniczonej)
Funkcję $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy ograniczoną z góry liczbą M wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) \leqslant M$ dla każdego $x \in D$. Analogicznie funkcja f jest ograniczona z dołu liczbą m wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) \geqslant m$ dla każdego $x \in D$. Jeśli funkcja f jest ograniczona z góry i z dołu, to mówimy, że jest ograniczona. $\blacksquare$

Funkcja Dirichleta jest ograniczona z góry przez 1, albo przez 378, a z dołu przez 0, więc jest ograniczona. Funkcja pierwiastek kwadratowy jest nieograniczona, choć jest ograniczona z dołu np. przez 0. Funkcja $\frac{x}{x-1}$ nie jest ograniczona ani z góry, ani z dołu.

Definicja 10.3 (funkcji monotonicznych)
Funkcję $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy ściśle rosnącą, jeśli z nierówności $x < y$ wynika nierówność $f(x) < f(y)$, ściśle malejącą, jeśli z nierówności $x < y$ wynika nierówność $f(x) > f(y)$.
Funkcję $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy funkcją niemalejącą wtedy i tylko wtedy, gdy z nierówności $x < y$ wynika nierówność $f(x) \leqslant f(y)$.
Funkcję $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy funkcją nierosnącą wtedy i tylko wtedy, gdy z nierówności $x < y$ wynika nierówność $f(x) \geqslant f(y)$.
Funkcje ściśle rosnące i funkcje ściśle malejące nazywamy ściśle monotonicznymi, a funkcje nierosnące i niemalejące — monotonicznymi. ■

Ostrzegamy tu Czytelnika, że w wielu podręcznikach występują funkcje niemalejące i rosnące. W innych z kolei funkcje rosnące i ściśle rosnące. Autor tego tekstu przyjął skrajne terminy za obowiązujące, aby uniknąć nieporozumień.

Funkcje x, x^3 są ściśle rosnące na zbiorze $\mathbb{R}$. Funkcja $\lfloor x \rfloor$ jest niemalejąca na $\mathbb{R}$. Funkcja $\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}$ jest ściśle malejąca, co Czytelnik powinien sprawdzić dokładnie. Funkcja x^2 **nie** jest ściśle rosnąca, ani nawet niemalejąca, bo $(-2 < -1$ i jednocześnie $4 = (-2)^2 < (-1)^2 = 1$. Nie jest też nierosnąca, więc tym bardziej nie jest ściśle malejąca, bo $1 < 2$ i $1 = 1^2 < 2^2 = 4$. Wobec tego funkcja x^2 nie jest monotoniczna na $\mathbb{R}$. Jest natomiast ściśle rosnąca na $[0, \infty)$ i jest ściśle malejąca na $(-\infty, 0]$, więc na każdej z tych półprostych jest ściśle monotoniczna.

Niech będą dane dwie funkcje f i g. Mówimy wtedy, że zbiór $\{x\colon\ f(x) < g(x)\}$ jest rozwiązaniem nierówności $f(x) < g(x)$, a zbiór $\{x\colon\ f(x) = g(x)$ rozwiązaniem równania $f(x) = g(x)$.

Liczby x, dla których spełniona jest równość $f(x) = 0$ nazywamy pierwiastkami funkcji f, czasem też mówimy, że są one zerami tej funkcji. Liczba -2 jest pierwiastkiem funkcji $x^2 - 4$, ale nie jest prawdą, że $\sqrt{4} = -2$.

Wykres funkcji liczbowej f, czyli zbiór wszystkich par postaci $\big(x, f(x)\big)$ jest podzbiorem $\mathbb{R}^2$, więc można go rysować na płaszczyźnie, na której obrano układ współrzędnych. Wtedy rozwiązanie równania $f(x) = g(x)$ składa się z pierwszych współrzędnych punktów wspólnych wykresów funkcji f i g. Podobnie można opisać zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < g(x)$.

W dalszej części zajmiemy się badaniem funkcji postaci

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k . \qquad \text{(wiel)}$$

Definicja 10.4 (wielomianu)
Jeśli $a_k \neq 0$, to taką funkcję postaci (wiel) nazywamy wielomianem k–tego stopnia. Jeśli $0 = a_0 = a_1 = \ldots = a_k$, to nazywamy taką funkcję wielomianem zerowym, którego stopień definiujemy jako $-\infty$. ■

W wielu podręcznikach stopień wielomianu zerowego nie jest definiowany w ogóle. Później udowodnimy, że jeśli równość

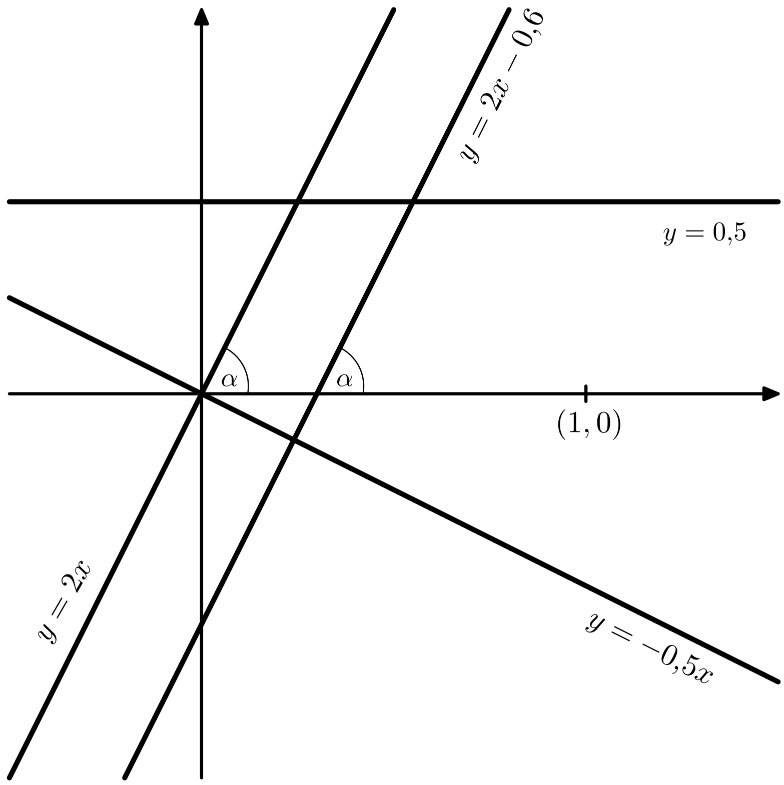
$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

zachodzi dla nieskończenie wielu liczb x, to $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., możemy przyjąć, że $0 = a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots$. Analogicznie $0 = b_{n+1} - b_{n+2} = \ldots$ To stwierdzenie oznacza, że funkcję można zapisać w postaci (wiel) na co najwyżej jeden sposób, dzięki czemu podana definicja ma sens.

Funkcja $1 - x$ jest wielomianem pierwszego stopnia. Funkcja $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ jest wielomianem trzeciego stopnia.

Definicja 10.5
Przyjmujemy, że dla każdej liczby rzeczywistej a zachodzą wzory $a + \infty = \infty$, $a - \infty = -\infty$, $a + (-\infty) = -\infty$, $a - (-\infty) = \infty$. Przyjmujemy też, że $-\infty < a < \infty$. ■

Teraz zajmiemy się wielomianami postaci $ax+b$. Jeśli $a = 0$, to mamy do czynienia z funkcją stałą. Jej wykresem jest linia prosta równoległa do osi OX, czyli pozioma (jeśli osie układu są narysowane standardowo).



Jest też jasne, że jeżeli $b \neq 0$, to wykresy wielomianów ax i $ax + b$ nie mają punktów wspólnych. Można powiedzieć, że wykres wielomianu $ax+b$ otrzymujemy przesuwając wykres wielomianu ax o b jednostek równolegle do osi OY. Ponieważ stosunek $\frac{ax}{x}$ jest równy a dla każdego $x \neq 0$, więc wykresem wielomianu ax jest prosta przechodząca przez punkt $(0, 0)$ i punkt $(1, a)$. Jeżeli $a \neq 0$, to tangensem kąta ostrego jaki ta prosta tworzy z osią OX jest liczba $|a|$, bowiem długości przyprostokątnych w trójkącie o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(1, a)$ są równe 1 oraz $|a|$, przy czym ta o długości $|a|$ leży naprzeciw kąta, którym się zainteresowaliśmy.

Wynika stąd, że wykresem wielomianu $ax + b$ jest prosta, która równoległa do opisanej poprzednio. Przecina ona oś pionową w punkcie $(0, b)$, a poziomą — w punkcie $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

Jeśli $a > 0$, to funkcja $ax + b$ jest ściśle rosnąca, jeśli $a < 0$ — ściśle malejąca. W obu przypadkach jest nieograniczona i to zarówno z dołu jak i z góry. Liczbę a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej $y = ax + b$.

Zadania

1. Udowodnić, że funkcja $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ jest ściśle rosnąca na $\mathbb{R}$.

2. Znaleźć maksymalne przedziały, na których funkcja $\frac{1}{1+x^2}$ jest monotoniczna.

3. Rozstrzygnąć, czy funkcja $\frac{x^2}{x^2+2x+2}$ jest ograniczona. Znaleźć maksymalne przedziały, na których jest monotoniczna.

4! Czy iloczyn funkcji ściśle rosnących jest ściśle rosnący. Czy suma funkcji ściśle rosnących jest ściśle rosnąca?

5! Dowieść, że złożenie funkcji ściśle monotonicznych jest też funkcją ściśle monotoniczną.

6! Czy funkcja odwrotna do funkcji monotonicznej jest ściśle monotoniczna?

7. Znaleźć taki wielomian f (możliwie niskiego stopnia), że dla każdej liczby $x \neq 0$ zachodzi równość $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

8! Naszkicować wykres funkcji $|x+3| - |x-1|$.

9. Znaleźć taki wielomian w pierwszego stopnia, że $w(x) \notin \mathbb{Z}$ dla $x \in \mathbb{Z}$.

10. Znaleźć wielomian w pierwszego stopnia, którego wykres przechodzi przez dokładnie jeden punkt o obu współrzędnych całkowitych.

11! Udowodnić, że jeśli wykres wielomianu pierwszego stopnia przechodzi przez dwa punkty o obu współrzędnych całkowitych, to przechodzi przez nieskończenie wiele takich punktów.

12. Udowodnić, że jeśli dla dowolnych $a_1, a_2, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f(a_1x_2 + a_2x_2) = a_1f(x_1) + a_2f(x_2)$, to funkcja f jest wielomianem stopnia nie większego niż 1.

13. Rozwiązać równanie $x^2 = \lfloor x \rfloor$.

14! Udowodnić, korzystając ewentualnie z twierdzenia Pitagorasa, że proste $y = ax$ i $y = Ax$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $aA = -1$.

15! Zbiór wszystkich punktów (x, y), dla których spełniona jest równość $5x - 12y + 13 = 0$, jest prostą. Udowodnić, że odległość punktu $(2, 3)$ od tej prostej jest równa $\frac{|5\cdot 2 - 12\cdot 3 + 13|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}$.

WIELOMIANY KWADRATOWE

Zajmiemy się teraz wielomianami stopnia drugiego, zwanymi kwadratowymi. Symbol w będzie w tym rozdziale oznaczać wielomian kwadratowy, tj.

$$w(x) = ax^2 + bx + c$$

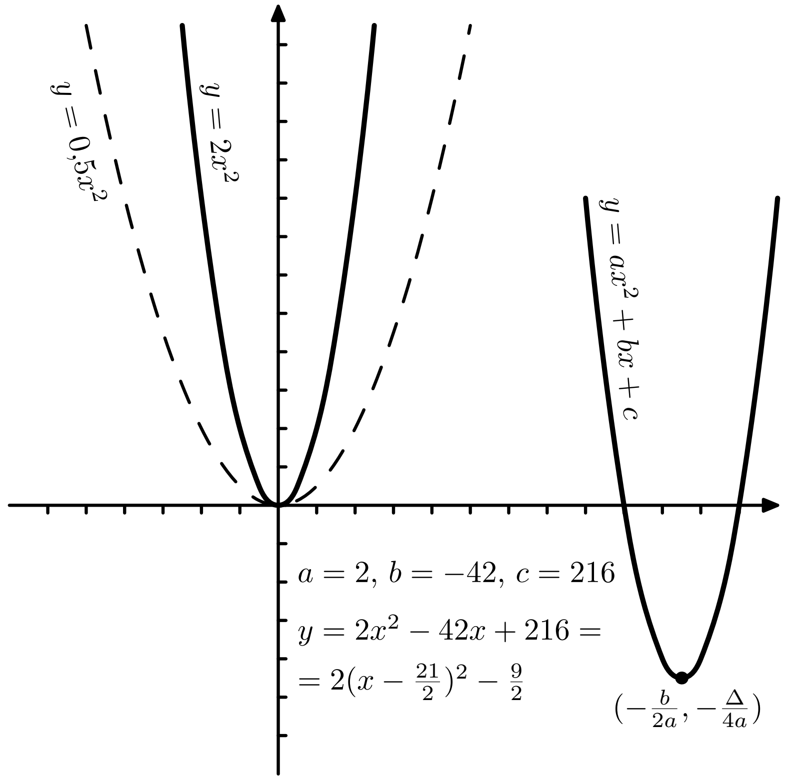
dla każdego $x \in \mathbb{R}$, przy czym a, b, c są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, $a \neq 0$. Możemy napisać

$$ax^2 + bx + c = a\big(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}\big) =$$

$$= a\big(x^2 + 2\tfrac{b}{2a}x + \big(\tfrac{b}{2a}\big)^2 - \big(\tfrac{b}{2a}\big)^2 + \tfrac{c}{a}\big) = a\big(x + \tfrac{b}{2a}\big)^2 - \tfrac{\Delta}{4a}\,,$$

gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$.

Ta postać wielomianu drugiego stopnia zwana jest **kanoniczną**, a wyrażenie $\Delta = b^2 - 4ac$ — **wyróżnikiem** tego wielomianu.



Można łatwo stwierdzić, że wykresy wielomianów $ax^2 + bx + c$ i ax^2 są przystające. Zachodzi następujące

Twierdzenie 11.1
Wykres wielomianu $ax^2 + bx + c$ otrzymujemy przesuwając wykres wielomianu ax^2 o $-\frac{\Delta}{4a}$ jednostek wzdłuż osi pionowej i o $-\frac{b}{2a}$ jednostek wzdłuż osi poziomej. ■

Definicja 11.2 (paraboli)
Figurę przystającą do wykresu funkcji ax^2, $a \neq 0$ nazywamy **parabolą**. ■

Wniosek 11.3
Parabola $y = ax^2 + bx + c$ jest symetryczna względem prostej $x = -\frac{b}{2a}$.

Dowód. Niech $x_1 = -\frac{b}{2a} - t$, $x_2 = -\frac{b}{2a} + t$. Wtedy $y_1 = a(-t)^2 - \frac{\Delta}{4a} = at^2 - \frac{\Delta}{4a} = y_2$, więc punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) są symetryczne względem prostej $x = -\frac{b}{2a}$ i leżą na paraboli $y = ax^2 + bx + c$. ■

Niektóre własności parabol są opisane w zadaniach kończących ten rozdział. Należy je rozwiązać.

Twierdzenie 11.4 (o wielomianie kwadratowym)
Jeśli $a > 0$ i $w(x) = ax^2 + bx + c$ dla $x \in \mathbb{R}$, to funkcja w jest nieograniczona z góry, natomiast jest ograniczona z dołu liczbą $w\big(-\frac{b}{2a}\big) = -\frac{\Delta}{4a}$, tzn. liczba $-\frac{\Delta}{4a}$ jest najmniejszą wartością funkcji w. Jeśli $a < 0$, to funkcja w jest nieograniczona z dołu, natomiast jest ograniczona z góry liczbą $w\big(-\frac{b}{2a}\big) = -\frac{\Delta}{4a}$, tzn. liczba $-\frac{\Delta}{4a}$ jest największą wartością funkcji w.

Dowód. Załóżmy, że $a > 0$. Załóżmy, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $ax^2 + bx + c \leqslant M$. Wykażemy, że jeżeli $x_0 = \frac{1}{\sqrt{a}}\big(\big|\frac{\Delta}{4a}\big| + |M| + 1\big) - \frac{b}{2a}$, to $w(x_0) > M$. Mamy $w(x_0) = \big(|M| + \big|\frac{\Delta}{4a}\big| + 1\big)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geqslant |M| + \big|\frac{\Delta}{4a}\big| + 1 - \frac{\Delta}{4a} \geqslant |M| + 1 > M$ wbrew temu, że liczba M jest ograniczeniem górnym funkcji w. Wynika stąd, że funkcja w nie jest ograniczona z góry.

Ponieważ $a\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2 \geqslant 0$, więc $w(x) \geqslant -\frac{\Delta}{4a} = w\big(-\frac{b}{2a}\big)$, zatem liczba $-\frac{\Delta}{4a}$ jest najmniejszą wartością funkcji w.

W taki sam sposób można rozpatrzeć przypadek $a < 0$. ■

Następne stwierdzenie wynika bezpośrednio z tego, że nierówność $0 \leqslant x_1 < x_2$ pociąga za sobą nierówność $x_1^2 < x_2^2$:

Twierdzenie 11.5 (o monotoniczności funkcji kwadratowej)
Funkcja $ax^2 + bx + c$ jest ściśle monotoniczna na każdej z półpros-

tych $\big(-\infty,-\frac{b}{2a}\big]$, $\big[-\frac{b}{2a},\infty\big)$. Jeżeli $a>0$, to na półprostej $\big(-\infty,-\frac{b}{2a}\big]$ jest ściśle malejąca, a na półprostej $\big[-\frac{b}{2a},\infty\big)$ — ściśle rosnąca. Jeśli $a<0$ — odwrotnie. ■

Teraz zajmiemy się równaniem $ax^2+bx+c=0$. Można je przepisać w formie $a\big(x+\frac{b}{2a}\big)^2=\frac{\Delta}{4a}$. Wynika stąd od razu

Twierdzenie 11.6 (o pierwiastkach wielomianu kwadratowego)
Jeśli $\Delta<0$, to równanie $ax^2+bx+c=0$ nie ma pierwiastków rzeczywistych. Jeśli $\Delta=0$, to jedynym pierwiastekiem równania $ax^2+bx+c=0$ jest liczba $-\frac{b}{2a}$. Jeśli $\Delta>0$, to równanie $ax^2+bx+c=0$ ma dokładnie dwa pierwiastki:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{i} \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.\ ■$$

W dalszym ciągu, gdy $\Delta\geqslant 0$, będziemy pisać $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ pamiętając, że jeśli $\Delta=0$, to $x_1=x_2$.

Wyjaśnimy teraz, kiedy można wielomian ax^2+bx+c przedstawić w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia pierwszego. Ponieważ pierwiastek każdego czynnika jest też pierwiastkiem iloczynu wielomianów, więc jeśli $\Delta<0$, to wielomianu ax^2+bx+c nie można przedstawić w postaci iloczynu wielomianów pierwszego stopnia. Załóżmy, że $\Delta\geqslant 0$. Możemy napisać równości:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \qquad \text{oraz} \qquad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Te wzory nazywane są wzorami Viète'a. Mamy więc

$a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2=ax^2+bx+c$.
Udowodniliśmy zatem

Twierdzenie 11.7 (o postaci iloczynowej i wzorach Viète'a)
Jeśli wyróżnik wielomianu ax^2+bx+c jest liczbą nieujemną, to dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi wzór:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

gdzie x_1,x_2 są pierwiastkami wielomianu ax^2+bx+c.

Liczby x_1,x_2 są pierwiastkami wielomianu ax^2+bx+c wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ i $x_1x_2=\frac{c}{a}$. ■

Z twierdzenia tego wynika łatwo, że w przedziale, którego końcami są liczby x_1 i x_2 wartości funkcji ax^2+bx+c mają znak przeciwny do znaku liczby a, zaś poza przedziałem domkniętym o końcach x_1, x_2 — taki sam jak liczba a.

Na tym kończymy przegląd podstawowych własności wielomianów kwadratowych.

Zadania

1. Naszkicować wykres funkcji $x^2-7x+12$. Rozwiązać nierówności $x^2-7x+12<0$ i $x^2-7x+12>0$.

2. Znaleźć liczby b i c wiedząc, że każda z nich jest pierwiastkiem równania $x^2+bx+c=0$.

3. Dla jakich liczb rzeczywistych m suma pierwiastków równania $x^2-mx+m(m+3)=0$ jest mniejsza o 3 od ich iloczynu?

4. Dla jakich liczb całkowitych k oba pierwiastki równania $kx^2-(1-2k)x+k-2=0$ są wymierne?

5. Dla jakich liczb rzeczywistych m jeden z pierwiastków równania $2x^2-(2m+1)x+m^2-9m+39=0$ jest dwa razy większy od drugiego?

6. Dla jakiego $m\in\mathbb{R}$ suma kwadratów pierwiatków równania $x^2+(m-2)x-(m-3)=0$ ma najmniejszą wartość?

7. Dowieść, że jeśli równania $x^2+mx+n=0$ i $x^2+px+q=0$ mają wspólny pierwiastek, to $(n-q)^2-(m-p)(np-mq)=0$.

8. Dowieść, że równanie $(x-a)(x-c)+2(x-b)(x-d)=0$, w którym $a<b<c<d$, ma dwa pierwiastki rzeczywiste.

9. Dowieść, że jeśli $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n\in\mathbb{R}$, to

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant$$
$$\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2.$$

10. Rozwiązać równanie $x^2+5x+4-5\sqrt{x^2+5x+28}=0$.

11! Udowodnić, że jeśli równość $ax^2+bx+c=Ax^2+Bx+C$ zachodzi dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$, to $a=A$, $b=B$ i $c=C$.

12! Dowieść, że prosta może mieć z parabolą 0, 1 lub 2 punkty wspólne i nie może mieć ich więcej.

13. Napisać wzór funkcji, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $y=x^2-4$ względem:

a) osi x, b) osi y, c) punktu $(0,0)$, d) prostej $y=-2$.

14. Naszkicować wykresy funkcji:

a) $y = |x^2 - 4x + 3|$, b) $y = x^3 + |-5x + 6|$,

c) $y = |x| + |1 - x^2|$, d) $y = 2x^2 + |x| - 1$,

e) $y = |x^2 - x| + 1 - x$, f) $y = |x^2| + |x|$,

g) $y = |x^2 - 4| - 4$, h) $y = -|x^2 - 2|$,

i) $y = |x^2 + 1| + |x|$.

15. Siatką drucianą o długości 60 m należy ogrodzić prostokątny plac przylegający jednym bokiem do muru. Jakie wymiary winien mieć plac, aby jego pole było największe?

16. Prostokąt ma boki długości a cm i b cm. Bok a powiększamy o x cm, zaś bok b zmniejszamy o x cm. Dla jakiej wartości x pole nowego prostokąta będzie największe?

17. Przekrój osiowy walca ma obwód 20 cm. Jak dobrać wymiary walca, aby pole jego powierzchni bocznej było największe?

18. Przekrój osiowy stożka ma obwód 30 cm. Czy można dobrać tak wymiary stożka, aby pole jego powierzchni było największe?

19. Okno ma kształt prostokąta zakończonego na górze trójkątem równobocznym. Obwód okna wynosi p. Jaka powinna być podstawa prostokąta, aby powierzchnia okna była największa?

20. Okno ma kształt prostokąta zakończonego na górze półkolem. Jaka powinna być podstawa prostokąta, aby przy obwodzie okna wynoszącym 2 m powierzchnia okna była największa?

21. Rozłożyć (w pamięci) na czynniki liniowe podane trójmiany:

a) $y = x^2 - 2x - 24$, b) $y = x^2 - 2x - 15$,

c) $y = x^2 - 13x - 48$, d) $y = 12x^2 - 20x + 3$,

e) $y = x^2 - mx - 2m^2$, f) $y = x^2 + (4m - n)x - 4mn$,

g) $y = x^2 - (2m - 3n)x - 6mn$.

22. Znaleźć równanie kwadratowe o całkowitych współczynnikach, którego pierwiastkiem jest liczba $4 - \sqrt{3}$.

23. Nie rozwiązując równania $x^2 - \frac{\sqrt{85}}{4}x + \frac{21}{16} = 0$ znaleźć sumę i różnicę sześcianów jego pierwiastków.

24. Nie rozwiązując równania $3x^2 + 17x - 14 = 0$ znaleźć wartość ułamka $\frac{3x_1^2+5x_1x_2+3x_2^2}{4x_1x_2^2+4x_1^2x_2}$, gdzie x_1, x_2 oznaczają pierwiastki danego równania.

25. Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ jeden z pierwiastków równania $4x^2 - 15x + 4m^2 = 0$ jest kwadratem drugiego?

26. Dla jakich wartości parametru $k \in \mathbb{R}$ rzeczywiste pierwiastki równania $x^4 - (3k+2)x^2 + k^2 = 0$ tworzą ciąg arytmetyczny? Liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tworzą ciąg arytmetyczny, jeżeli $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1}$.

27. Dowieść, że środki wszystkich tych odcinków równoległych do prostej $y = 2x - 5$, których oba końce leżą na paraboli o równaniu $y = 2x^2 - 13x + 7$, znajdują się na jednej prostej. Czy każdy punkt tej prostej jest środkiem jednego z opisanych odcinków?

28. Wykazać, że jeśli suma odległości punktu (x, y) od punktów $(0, \sqrt{5})$ i $(0, -\sqrt{5})$ jest równa 6, to $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Czy z tego, że $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ wynika, że suma odległości punktu (x, y) od punktów $F_1 = (0, \sqrt{5})$ i $F_2 = (0, -\sqrt{5})$ jest równa 6?

Definicja 11.8 (elipsy) Elipsą o ogniskach $F_1 \neq F_2$ nazywamy zbiór złożony ze wszystkich punktów P płaszczyzny, których suma odległości od punktów F_1 i F_2 jest równa d, gdzie d jest ustaloną liczbą większą od odległości ognisk F_1 i F_2. ■

29. Wykazać, że jeśli $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, to stosunek odległości punktu (x, y) od punktu $F_1 = (0, \sqrt{5})$ do odległości punktu (x, y) od prostej $y = \frac{9}{\sqrt{5}}$ jest równy $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

30. Wykazać, że jeśli $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, to stosunek odległości punktu (x, y) od punktu $F_1 = (0, \sqrt{13})$ do odległości punktu (x, y) od prostej $y = \frac{9}{\sqrt{13}}$ jest równy $\frac{\sqrt{13}}{3}$.

31. Wykazać, że $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy wartość bezwzględna różnicy odległości punktu (x, y) od punktów $F_1 = (0, \sqrt{13})$ i $F_2 = (0, -\sqrt{13})$ jest równa $2\sqrt{13}$.

Definicja 11.9 (hiperboli) Hiperbolą o ogniskach $F_1 \neq F_2$ nazywamy zbiór złożony ze wszystkich punktów P płaszczyzny, dla których moduł różnicy odległości od punktów F_1 i F_2 jest równy d, gdzie d jest ustaloną liczbą mniejszą od odległości ognisk F_1 i F_2. ■

32. Dowieść, że środki wszystkich tych odcinków równoległych do prostej $y = 2x - 5$, których oba końce leżą na elipsie o równaniu $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, znajdują się na jednej prostej. Czy każdy punkt tej prostej jest środkiem jednego z opisanych odcinków?
Znaleźć wszystkie proste równoległe do prostej $y = 2x - 5$, które mają dokładnie jeden punkt wspólny z elipsą o równaniu $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

33. Niech $F_1 = (0, \sqrt{5})$, $F_2 = (0, -\sqrt{5})$ i $A = \left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$. Znaleźć prostą ℓ przechodzącą przez punkt A, której jedynym punktem wspólnym z elipsą o równaniu $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ jest punkt A. Wykazać, że kąt między odcinkiem F_1A i prostą ℓ równy jest kątowi między odcinkiem F_2A i prostą ℓ.

34. Wykazać, że parabole $y = x^2$ i $y = 9x^2$ są podobne.
Dwa zbiory C i D na płaszczyźnie nazywamy podobnymi, jeśli istnieje takie przekształcenie $P: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i liczba $k > 0$, że stosunek odległości punktów $P(\mathbf{x}_1)$ i $P(\mathbf{x}_2)$ do odległości punktów $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^2$ i $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^2$ jest równy k dla dowolnych różnych punktów $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ oraz $P(C) = D$.

35. Ile punktów wspólnych z okręgiem może mieć wykres funkcji kwadratowej?

36. Ile punktów wspólnych mogą mieć dwie parabole?

37. Ile punktów wspólnych mogą mieć: elipsa o równaniu $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ i okrąg o równaniu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$?

38. Równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma 2 pierwiastki x_1, x_2. Znaleźć równanie kwadratowe, którego pierwiastkami są

(a) liczby x_1^2 i x_2^2, (b) liczby $-x_1$ i $-x_2$,
(c) liczby $\frac{1}{x_1}$ i $\frac{1}{x_2}$, (d) liczby $2x_1$ i $2x_2$.

39. Dla jakich liczb λ równanie $(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda - 2 = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek.

40. Znaleźć odległość punktu $(1, 2)$ od prostej, której o równaniem jest: $x - 3y + 2 = 0$.

41. Wykazać, że jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, to zachodzi równość $(x_1 - x_2)^2 = \frac{b^2-4ac}{a^2} = \frac{\Delta}{a^2}$.

42. Jaki warunek muszą spełniać liczby $a \neq 0, b, c$, aby równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ miało dwa pierwiastki rzeczywiste różnych znaków?

43. Jaki warunek muszą spełniać liczby $a \neq 0, b, c$, aby równanie $ax^2 + bx + c = 0$ miało dwa pierwiastki rzeczywiste, między którymi znajduje się liczba 1?

44. Jaki warunek muszą spełniać liczby $a \neq 0, b, c$, aby równanie $ax^2 + bx + c = 0$ miało dwa pierwiastki rzeczywiste, których suma jest równa ich iloczynowi?

45. Ile pierwiastków ma równanie $x^4 + 2(m-4)x^2 + 4 = 0$ w zależności od parametru m?

46. Ustalić w zależności od parametru m liczbę pierwiastków równania $x^4 + (2m-4)x^2 - m^2 + 4m - 2 = 0$.

47. Wykazać, że jeśli $x^3 + 2px + q = 0$, to $xq \leqslant p^2$.

48. Wykazać, że jeśli $x > 0$, $y > 0$ i $x + y = 1$, to zachodzi nierówność: $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geqslant 9$.

49. Wyrażenie $\sqrt{x-1} + \sqrt{x + 24 - 10\sqrt{x-1}}$ jest stałe na pewnym przedziale. Znaleźć ten przedział.

50. Dodatnie liczby wymierne a i b spełniają następującą równość $a^3 + 4a^2b = 4a^2 + b^4$. Udowodnić, że liczba $\sqrt{a} - 1$ jest kwadratem liczby wymiernej.

51. Niech m, n będą liczbami naturalnymi. Wykazać, że liczba $\sqrt{2}$ leży między liczbami $\frac{m}{n}$ i $\frac{m+2n}{m+n}$.

52. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x - |y+1| = 1, \\ x^2 + y = 10. \end{cases}$

53. Znaleźć wszystkie takie liczby rzeczywiste x, dla których zachodzi nierówność

$$\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}} \geqslant \frac{2}{3}.$$

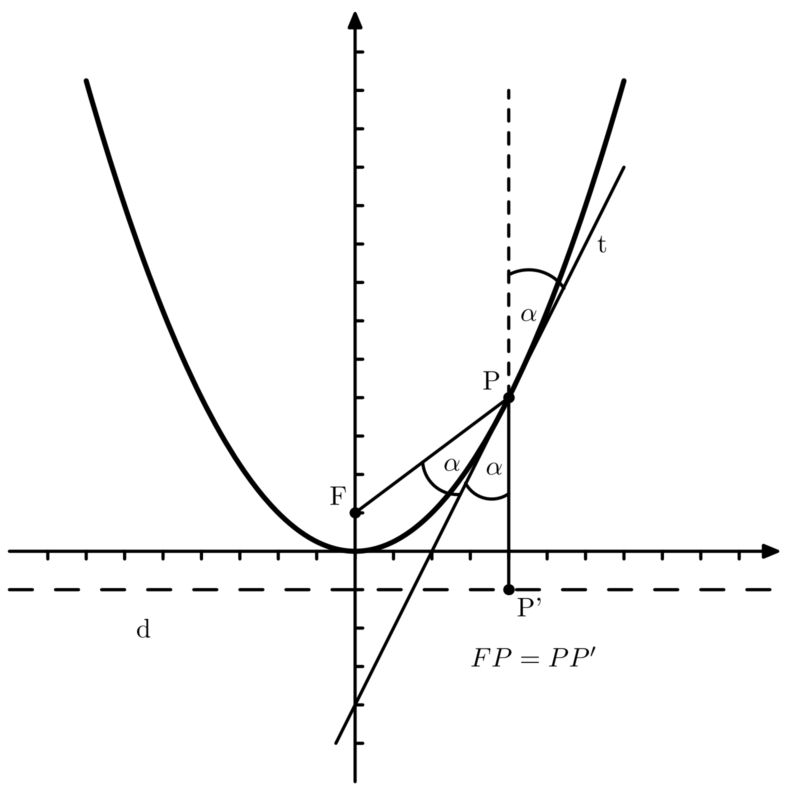
54. Niech $a > 0$ będzie liczbą rzeczywistą. Udowodnić, że zbiór punktów leżących nad parabolą $y = ax^2$ jest wypukły, tzn. jeśli $y_1 \geqslant ax_1^2$ i $y_2 \geqslant ax_2^2$ i $0 < t < 1$, to

$$ty_1 + (1-t)y_2 \geqslant a\big(tx_1 + (1-t)x_2\big)^2 .$$

55. Udowodnić, że parabola $y = ax^2 + bx + c$ jest zbiorem złożonym z punktów równoodległych od pewnego ustalonego punktu i pewnej ustalonej prostej.
Jest to geometryczna definicja paraboli, ustalony punkt nazywany jest ogniskiem, a prosta — kierownicą.

56. Udowodnić, że przez każdy punkt paraboli przechodzą dwie proste mające z parabolą jeden punkt wspólny.
Ta która nie jest równoległa do osi symetrii paraboli nazywana jest styczną.

57. Jeśli F jest ogniskiem paraboli $y = ax^2$, d — jej kierownicą, P punktem paraboli, to prosta t — styczna do paraboli w punkcie P jest dwusieczną kąta między prostą PF i prostą pionową przechodząca przez punkt P.
Oznacza to, że jeśli umieścimy ,,punktowe" źródło światła w ognisku F zwierciadła parabolicznego, tj. otrzymanego w wyniku obrotu paraboli wokół jej osi symetrii, to po odbiciu od zwierciadła otrzymamy wiązkę promieni równoległych.
Ta własność paraboli decyduje o tym, że np. anteny radioteleskopów mają kształt paraboliczny.



WIELOMIANY STOPNIA WYŻSZEGO NIŻ DWA

Przypominamy, że wielomianem k–tego stopnia nazywamy funkcję f postaci $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k$, gdzie współczynnik a_k jest liczbą różną od 0. Piszemy $\mathrm{st}\,(f) = k$ lub $\deg(f) = k$. Przyjmujemy, że stopień wielomianu zerowego jest równy $-\infty$.

W tym rozdziale zajmiemy się przedstawianiem wielomianu w postaci iloczynu wielomianów stopnia niższego. Zdefiniujemy dzielenie z resztą, pokażemy, że w zbiorze wszystkich wielomianów można szukać największego wspólnego dzielnika za pomocą algorytmu Euklidesa. Stąd wywnioskujemy twierdzenie o jednoznaczności rozkładu na czynniki nierozkładalne (odpowiednik liczb pierwszych). Ustalimy też związek między znajdowaniem pierwiastków wielomianu i rozkładaniem go na czynniki stopnia niższego.

Niestety w przypadku wielomianów stopnia wyższego znajdowanie pierwiastków jest na ogół trudne. Dlatego podamy przepis na znajdowanie wymiernych pierwiastków wielomianów o całkowitych współczynnikach.

Udowodnimy najpierw, że „dla dostatecznie dużych" $|x|$ liczby a_kx^k i $a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ mają ten sam znak.

Lemat 12.1
Jeśli k jest liczbą naturalną, $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ i $a_k \neq 0$, to istnieje taka liczba rzeczywista $M > 0$, że jeśli $|x| \geqslant M$, to
$$|a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{k-1}x^{k-1}| < |a_kx^k|.$$

Dowód. Niech $M = 2 + \frac{|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{k-1}|}{|a_k|}$. Zachodzą oczywiście nierówności $M \geqslant 2 > 1$ i $M > \frac{|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{k-1}|}{|a_k|}$. Załóżmy, że $|x| \geqslant M$. Wtedy $1 < |x|^{k-1}$, $|x| < |x|^{k-1}$, $\ldots$, $|x|^{k-2} < |x|^{k-1}$ oraz $|x| > \frac{|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{k-1}|}{|a_k|}$, zatem
$$|a_0 + a_1x + \cdots + a_{k-1}x^{k-1}| \leqslant |a_0| + |a_1x| + \cdots + |a_{k-1}x^{k-1}| \leqslant$$
$$\leqslant \big(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{k-1}|\big)|x|^{k-1} < |a_kx^k|. \ \blacksquare$$

Czytelnik zechce zastanowić się, w jaki sposób w dowodzie skorzystaliśmy z nierówności $k \geqslant 1$.

Twierdzenie 12.2
Jeśli dla pewnych liczb rzeczywistych a_0, a_1, ... , a_k równość $a_0+a_1x+\dots+a_kx^k=0$ zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x, to $0=a_0=a_1=\ldots=a_k$.

Dowód. Jeśli $k\geqslant 1$ i $a_k\neq 0$, to z lematu 12.1 wynika, że dla pewnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$|a_0+a_1x+\dots+a_{k-1}x^{k-1}|<|a_kx^k|\,.$$

wynika stąd, że

$$|a_0+a_1x+\dots+a_kx^k|\geqslant|a_kx^k|-|a_0+a_1x+\dots+a_{k-1}x^{k-1}|>0\,,$$

wbrew założeniu. Oznacza to, że muszą być spełnione równości $0=a_k=a_{k-1}=\ldots=a_1$, więc również $a_0=0$. ■

Twierdzenie 12.3 (o jednoznaczności współczynników)
Niech $a_0,a_1,\ldots,a_k,b_0,b_1,\ldots,b_n$ będą takimi liczbami rzeczywistymi, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość:

$$a_0+a_1x+\dots+a_{k-1}x^{k-1}+a_kx^k=b_0+b_1x+\dots+b_{n-1}x^{n-1}+b_nx^n$$

Wtedy $k=n$ i $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, ... , $a_{k-1}=b_{k-1}$, $a_k=b_k$.

Dowód. Przenosimy wszystkie składniki na jedną stronę i korzystamy z poprzedniego twierdzenia. ■

Uwaga 12.4
Prawdziwe jest twierdzenie mocniejsze — wystarczy założyć, że wartości wielomianów pokrywają się w skończonej liczbie punktów, większej zarówno od $k+1$ i od $n+1$, zob. zad 12.1. ■

Uwaga 12.5
Dzięki twierdzeniu o jednoznaczności współczynników wiemy, że stopień wielomianu jest zdefiniowany poprawnie. ■

Czytelnik bez trudu stwierdzi, że następujące wzory:

$$\mathrm{st}(f+g)\leqslant\max(\mathrm{st}(f),\mathrm{st}(g))\,,\qquad \mathrm{st}(f\cdot g)\leqslant\mathrm{st}(f)+\mathrm{st}(g)$$

są prawdziwe dla dowolnych wielomianów f i g.

Warto zwrócić uwagę na to, że dzięki umowie o stopniu wielomianu zerowego nie trzeba nic zakładać o f, o g, o $f+g$ lub o fg. W szczególności z drugiego z tych wzorów wynika, że jeśli iloczyn dwóch wielomianów jest wielomianem zerowym, czyli stopień iloczynu jest równy $-\infty$, to stopień co najmniej jednego z wielomianów f,g też musi równy $-\infty$, co oznacza, że co najmniej jeden z nich jest wielomianem zerowym.

Twierdzenie 12.6 (o dzieleniu z resztą)

Niech f i g będą dowolnymi wielomianami, przy czym $\mathrm{st}(g) \geqslant 0$, to istnieje wtedy dokładnie jedna para takich wielomianów q, r, że $f = qg + r$ i jednocześnie $\mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(g)$.

Wielomian q nazywamy ilorazem z dzielenia wielomianu f przez wielomian g, a wielomian r — resztą.

Dowód. Jeśli $\mathrm{st}(f) < \mathrm{st}(g)$, to przyjmujemy $q = 0$ i $r = f$. Dalej zakładamy, że $k = \mathrm{st}(f) \geqslant \mathrm{st}(g) = n$. Twierdzenie udowodnimy przez indukcję. Załóżmy, że teza jest prawdziwa dla wszystkich wielomianów f stopnia mniejszego niż k. W dalszym ciągu $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$, $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$, przy czym $a_k \neq 0 \neq b_n$.

Stopień wielomianu $f(x) - \frac{a_k}{b_n}x^{k-n}g(x)$ jest mniejszy niż k, zatem na mocy założenia indukcyjnego istnieją takie wielomiany q_1 i r, że $f(x) - \frac{a_k}{b_n}x^{k-n}g(x) = q_1(x)g(x) + r(x)$, przy czym $\mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(g)$. Niech $q(x) = q_1(x) + \frac{a_k}{b_n}x^{k-n}$. Wtedy $f = qg + r$ i $\mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(g)$. Wykazaliśmy istnienie wielomianów q i r.

Załóżmy, że $f = qg + r = q_1g + r_1$ i $\mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(g)$ oraz $\mathrm{st}(r_1) < \mathrm{st}(g)$. Wtedy zachodzi równość $(q - q_1)r = r_1 - r$, zatem $\mathrm{st}(q - q_1) + \mathrm{st}(g) = \mathrm{st}(r_1 - r) < \mathrm{st}(g)$. Wynika stąd, że $\mathrm{st}(q - q_1) < 0$, a to oznacza, że $\mathrm{st}(q - q_1) = -\infty$, więc $q - q_1$ jest wielomianem zerowym. Stąd wynika, że również $r_1 - r$ jest wielomianem zerowym, czyli $r_1 = r$. Udowodniliśmy jednoznaczność wielomianów q i r. ■

Uwaga 12.7

Czytelnik zauważy, że podany dowód różni się od dowodu analogicznego twierdzenia dla liczb całkowitych tym jedynie, że porównywanie liczb zastąpiliśmy porównywaniem stopni wielomianów. ■

Uwaga 12.8

Jeśli $\mathrm{st}(g) = 0$, tzn. gdy wielomian jest niezerową funkcją stałą, to dla każdego wielomianu f istnieje taki wielomian q, że $f = qg$. Można to zdanie wywniskować z twierdzenia o dzieleniu z resztą: istnieją takie wielomiany q, r, że $f = qg + r$ i $\mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(g) = 0$, więc $\mathrm{st}(r) = -\infty$, zatem wielomian r jest zerowy. ■

Pokażemy teraz jak można znajdować wielomiany q i r.

Przykład 12.1 Niech $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 2$ oraz $g(x) = {=}x^2 + x + 1$. Mamy $f(x) - 3x^2 g(x) = -11x^3 + 4x^2 + 2$. Teraz $-11x^3 + 4x^2 + 2 - (-11x)(x^2 + x + 1) = 15x^2 + 11x + 2$ i wreszcie $15x^2 + 11x + 2 - 15(x^2 + x + 1) = -4x - 13$. Wynika stąd, że $3x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 2 = (3x^2 - 11x + 15)(x^2 + x + 1) - 4x - 13$. Widać, że powtórzyliśmy dowód twierdzenia o dzieleniu z resztą w tej sytuacji. Zwykle zapisujemy to tak jak dzielenie liczb:

$$\begin{array}{l}
\underline{3x^2 - 11x + 15\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
(3x^4 - 8x^3 + \ 7x^2 + \ 0x + 2) : (x^2 + x + 1) \\
\underline{\ 3x^4 + 3x^3 + \ 3x^2\qquad\qquad} \\
\qquad - 11x^3 + \ 4x^2 + \ 0x \\
\qquad \underline{- 11x^3 - 11x^2 - 11x\quad} \\
\qquad\qquad\qquad 15x^2 + 11x + \ 2 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{15x^2 + 15x + 15} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad - \ 4x - 13
\end{array}$$

Przekonamy się niebawem, że szczególnie ważnym przypadkiem jest dzielenie wielomianów przez wielomiany postaci $x - c$. Horner zaproponował takie postępowanie (algorytm Hornera).

Niech $f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Załóżmy, że $f(x) = (x - c)q(x) + r$, gdzie r jest liczbą, jako wielomian stopnia mniejszego niż 1. Załóżmy, że

$$q(x) = b_{k-1} x^{k-1} + b_{k-2} x^{k-2} + \cdots + b_1 x + b_0 .$$

Mamy wtedy $(x - c)q(x) + r =$

$= b_{k-1} x^k + (b_{k-2} - cb_{k-1}) x^{k-1} + \cdots + (b_0 - cb_1)x + r - cb_0$.

Ponieważ równe wielomiany mają równe współczynniki, więc $a_k = b_{k-1}$, $a_{k-1} = b_{k-2} - cb_{k-1}$, $\ldots$, $a_1 = b_0 - cb_1$, $a_0 = r - cb_0$. Szukamy liczb b_{k-1}, b_{k-2}, $\ldots$, b_0, r. Otrzymujemy wzory: $b_{k-1} = a_k$, $b_{k-2} = cb_{k-1} + a_{k-1}$, $b_{k-3} = cb_{k-2} + a_{k-2}$, $\ldots$, $b_0 = cb_1 + a_1$, $r = cb_0 + a_0$.

Przykład 12.2 Podzielimy wielomian $-7x^3 + 2x^2 - 13x + 6$ przez wielomian $x + 2$. Wypisujemy współczynniki wielomianu, który dzielimy:

-7	2	-13	6
-7	$(-2)(-7)+2=$ $=16$	$(-2)16+(-13)=$ $=-45$	$(-2)(-45)+6=$ $=96$

W drugim wierszu wypisaliśmy współczynniki ilorazu oraz resztę pokazując działania prowadzące do ich obliczenia. W wyniku otrzymaliśmy równość:

$$-7x^3 + 2x^2 - 13x + 6 = (x+2)(-7x^2 + 16x - 45) + 96\,. \ \blacksquare$$

Definicja 12.9 (wielomianu unormowanego)
Wielomian, którego współczynnik kierujący jest równy 1 nazywamy unormowanym. ■

Czytelnik stwierdzi bez trudu, że jeśli wielomian unormowany w dzieli wielomian unormowany v i $\mathrm{st}(w) = \mathrm{st}(v)$, to $w = v$.

Jesteśmy gotowi do zdefiniowania największego wspólnego dzielnika dwóch wielomianów.

Definicja 12.10 (największego wspólnego dzielnika)
Największym wspólnym dzielnikiem wielomianów f i g nazywamy **unormowany** wielomian d, który dzieli jednocześnie wielomiany f i g i którego stopień jest największy spośród stopni wszystkich wspólnych dzielników tych wielomianów.
Jeśli stopień największego wspólnego dzielnika wielomianów f, g jest równy 0, to mówimy, że są one względnie pierwsze. ■

Podobnie jak w przypadku liczb całkowitych, można znajdować największy wspólny dzielnik wielomianów f, g za pomocą algorytmu Euklidesa. Mamy bowiem:

$$\begin{array}{lll}
f = q_0 g + r_0 & \text{i} & \mathrm{st}(r_0) < \mathrm{st}(g) \\
g = q_1 r_0 + r_1 & \text{i} & \mathrm{st}(r_1) < \mathrm{st}(r_0) \\
r_0 = q_2 r_1 + r_2 & \text{i} & \mathrm{st}(r_2) < \mathrm{st}(r_1) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\
r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n & \text{i} & \mathrm{st}(r_n) < \mathrm{st}(r_{n-1}) \\
r_{n-1} = q_{n+1} r_n & &
\end{array}$$

Proces dzielenia z resztą musi się zakończyć, bo stopień niezerowego wielomianu jest nieujemną liczbą całkowitą. Wielomian r_n jest tą niezerową resztą, która ma najmniejszy stopień. Następna reszta musi więc być wielomianem zerowym.

Bardzo proste rozumowanie indukcyjne przekonuje nas o tym, że r_n jest wspólnym dzielnikiem f i g oraz że każdy wspólny dzielnik tych wielomianów jest dzielnikiem r_n. Wynika stąd, że wielomian r_n ma największy stopień wśród wszystkich wspólnych dzielników f i g. Dzieląc r_n przez jego współczynnik kierujący otrzymujemy wielomian unormowany d. Jest on największym wspólnym dzielnikiem wielomianów f i g, bo jest wspólnym dzielnikiem maksymalnego stopnia i jest unormowany. ■

Uwaga 12.11
Największy wspólny dzielnik wielomianów f i g jest wyznaczony jednoznacznie. Załóżmy bowiem, że wielomian d_1 jest największym wspólnym dzielnikiem f i g. Wynika stąd, że d_1 jest dzielnikiem r_n, więc również dzielnikiem d. Ponieważ d i d_1 są unormowanymi wielomianami tego samego stopnia i d_1 jest dzielnikiem d, to $d = d_1$. ■

Wracając do przedostatniego przykładu otrzymujemy:

$3x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 2 = (3x^2 - 11x + 15) \cdot (x^2 + x + 1) - 4x - 13$

$x^2 + x + 1 = \big(- \frac{1}{4}x + \frac{9}{16}\big) \cdot \big(- 4x - 13\big) + \frac{133}{16}$

$-4x - 13 = \big(- \frac{64}{133}x - \frac{208}{133}\big) \cdot \frac{133}{16}$.

Wobec tego w tym przypadku $n = 1$, $r_1 = \frac{133}{16}$, $d = 1$.

Podobnie jak w przypadku liczb całkowitych wykażemy, że największy wspólny dzielnik dwóch wielomianów f i g można zapisać w postaci $sf + tg$, gdzie s, t są pewnymi wielomianami o współczynnikach rzeczywistych. Z poprzednich rozważań wynika, że można w tej postaci zapisać r_n, tzn. istnieją takie wielomiany s_1 i t_1, że $r_n = s_1 f + t_1 g$. Dzieląc wielomiany s_1 i t_1 przez współczynnik kierujący a wielomianu r_n otrzymujemy równość $d = \frac{1}{a} r_n = sf + tg$, gdzie $s = \frac{1}{a}s_1$ i $t = \frac{1}{a}t_1$.

Otrzymane rezultaty można zebrać w jedno

Twierdzenie 12.12 (o największym wspólnym dzielniku)
Największym wspólny dzielnik wielomianów f i g jest podzielny przez każdy ich wspólny dzielnik. Jest to jedyny wielomian unormowany o tej własności.
Istnieją takie wielomiany s i t, że $\mathrm{nwd}(f, g) = sf + tg$. ■

Odpowiednikiem liczb pierwszych są wielomiany nierozkładalne, a liczb złożonych — wielomiany rozkładalne.

Definicja 12.13 (wielomianu nierozkładalnego)
Wielomianem nierozkładalnym nazywamy taki wielomian, który ma dokładnie dwa (różne) dzielniki unormowane. Wielomian, który ma co najmniej trzy (różne) dzielniki unormowane nazywamy rozkładalnym. ■

Wszystkie wielomiany pierwszego stopnia są nierozkładalne. Wielomiany stopnia drugiego są nierozkładalne wtedy i tylko wtedy, gdy ich wyróżnik jest ujemny. Można udowodnić (w rozdziale poświęconym liczbom zespolonym), że innych wielomianów nierozkładalnych (w zbiorze wielomianów o współczynnikach rzeczywistych) nie ma. Z tego twierdzenia nie będziemy korzystać, dopóki go nie udowodnimy.

Lemat 12.14
Wielomian jest rozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest iloczynem wielomianów stopnia niższego.
Dowód. Jeśli wielomian f jest rozkładalny, to ma co najmniej trzy różne dzielniki unormowane. Jedynym unormowanym dzielnikiem stopnia 0 jest jest 1, jedynym dzielnikiem stopnia $\mathrm{st}(f)$ jest iloraz wielomianu f przez jego współczynnik kierujący. Istnieje więc taki unormowany wielomian g, który jest dzielnikiem wielomianu f, że $0 < \mathrm{st}(g) < \mathrm{st}(f)$. Wobec tego $f = gh$ dla pewnego wielomianu h. Ponieważ $\mathrm{st}(f) = \mathrm{st}(g) + \mathrm{st}(h)$, więc $\mathrm{st}(h) < \mathrm{st}(f)$, zatem f jest iloczynem wielomianów stopnia niższego. Jeśli f jest iloczynem wielomianów stopnia niższego, to ma co najmniej jeden taki dzielnik g, że $0 < \mathrm{st}(g) < \mathrm{st}(f)$. Iloraz wielomianu g przez jego współczynnik kierujący jest unormowanym dzielnikiem wielomianu f i jest to trzeci unormowany dzielnik. ■

Twierdzenie 12.15 (o istnieniu rozkładu)
Każdy wielomian stopnia większego od 0 może być przedstawiony w postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych.
Dowód. Dla wielomianów stopnia pierwszego twierdzenie jest prawdziwe, bo one nie są rozkładalne. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wielomianów stopnia stopnia $\leqslant n$. Niech f będzie wielomianem stopnia $n+1$. Jeśli f jest nierozkładalny, to jest iloczynem wielomianów nierozkładalnych (złożonym z jed-

nego czynnika). Jeśli wielomian f jest rozkładalny, to istnieją wielomiany takie g i h dodatniego stopnia, że $f = gh$. Z równości $\mathrm{st}(f) = \mathrm{st}(g) + \mathrm{st}(h)$ wynika, że $\mathrm{st}(g) \leqslant n$ i $\mathrm{st}(h) \leqslant n$, więc na mocy założenia indukcyjnego każdy z wielomianów g, h jest iloczynem wielomianów nierozkładalnych, a stąd wynika, że również f jest iloczynem wielomianów nierozkładalnych. ■

Twierdzenie 12.16
Jeśli wielomian nierozkładalny p dzieli iloczyn fg, to p jest dzielnikiem jednego lub obu wielomianów f, g.

Dowód. Załóżmy, że p nie dzieli f. Wtedy $\mathrm{nwd}(f,p) = 1$. Wobec tego istnieją takie wielomiany s i t, że $1 = sf + tp$, zatem $g = sfg + tpg$. Prawa strona tej równości jest podzielna przez p jako suma składników podzielnych przez p, więc strona lewa, czyli wielomian g, też jest podzielna przez p. ■

Uwaga 12.17
W dowodzie korzystaliśmy jedynie z tego, że wielomiany p i f są względnie pierwsze. ■

Twierdzenie 12.18 (o jednoznaczności rozkładu)
Każdy wielomian jest iloczynem skończenie wielu unormowanych wielomianów nierozkładalnych i liczby rzeczywistej różnej od 0. Przedstawienie w postaci takiego iloczynu jest jednoznaczne z dokładnością do kolejności czynników.

Dowód. Istnienie rozkładu jest treścią poprzedniego twierdzenia. Udowodnimy jednoznaczność. Załóżmy, że
$$a \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k = b \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_m\,,$$
gdzie f_1, f_2, $\ldots, f_k$ i g_1, g_2 $, \ldots, g_m$ są nierozkładalnymi wielomianami unormowanymi oraz $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ponieważ iloczyn wielomianów unormowanych jest wielomianem unormowanym, więc współczynnikami kierującymi lewej i prawej strony równości są liczby a i b, a ponieważ wielomian wyznacza swe współczynniki jednoznacznie, więc $a = b$. Stąd wynika, że
$$f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_m\,.$$
Ponieważ iloczyn $g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_m$, dzieli się przez nierozkładalny wielomian f_1, więc jeden z jego czynników dzieli się przez f_1. Bez straty ogólności rozważań przyjmujemy, że f_1 dzieli wielomian g_1. Ponieważ oba te wielomiany są nierozkładalne i unormowane, więc

$f_1 = g_1$, zatem $f_2 \cdot \ldots \cdot f_k = g_2 \cdot \ldots \cdot g_m$. Prosta indukcja kończy dowód. ■

Często znajomość czynników wielomianu ułatwia poznawanie jego własności. Np. znajdowanie pierwiastków sprowadza się do znajdowania pierwiastków czynników, czyli wielomianów niższego stopnia. Niestety nie ma ogólnych metod rozkładania wielomianów na czynniki niższego stopnia. Okazuje się też, że rozkładanie na czynniki i znajdowanie pierwiastków wielomianu to w zasadzie ten sam problem. Wzory na pierwiastki wielomianów stopnia trzeciego i czwartego są skomplikowane i dlatego mało przydatne, zaś dla równań wyższego stopnia w ogóle nie istnieją, co udowodniono na przełomie XVIII w XIX w.

Twierdzenie 12.19 (Bézout)
Resztą z dzielenia wielomianu f przez wielomian $x-c$ jest $f(c)$.

Dowód. Reszta z dzielenia wielomianu f przez wielomian $x - c$ jest wielomianem stopnia mniejszego od 1, czyli stałą. Możemy napisać $f(x) = q(x)(x - c) + r$, gdzie q oznacza iloraz z dzielenia wielomianu f przez wielomian $x - c$, a r — resztę. Dla $x = c$ mamy $f(c) = q(c)(c-c)+r = r$, co kończy dowód twierdzenia. ■

Wniosek 12.20
Liczba c jest pierwiastkiem wielomianu f wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian f jest podzielny przez dwumian $x - c$. ■

Uwaga 12.21
Zazwyczaj łatwiej i szybciej można sprawdzić podzielność wielomianu przez $x - c$ stosując np. algorytm Hornera niż obliczać $f(c)$ korzystając z definicji funkcji f. ■

Definicja 12.22 (krotności pierwiastka)
Liczba c jest k–krotnym pierwiastkiem wielomianu f wtedy i tylko wtedy, gdy $(x - c)^k$ jest dzielnikiem wielomianu f. ■

Twierdzenie 12.23 (o sumie krotności pierwiastków)
Suma krotności wszystkich pierwiastków wielomianu nie jest większa od jego stopnia.

Dowód. Niech $c_1, c_2, \ldots, c_n$ będą różnymi liczbami rzeczywistymi, a m_1, m_2, $\ldots$, m_k — liczbami naturalnymi. Wielomiany $(x - c_1)^{m_1}$, $(x - c_2)^{m_2}$, $\ldots$, $(x - c_n)^{m_n}$ są parami względnie pierwsze. Jeśli wielomian f jest podzielny przez każdy z nich, to jest on podzielny przez ich iloczyn. Stąd natychmiast wynika, że $m_1 + m_2 + \cdots + m_n \leqslant \mathrm{st}(f)$. ■

Jeśli wielomian f jest iloczynem wielomianów stopnia pierwszego, to można łatwo rozwiązać nierówność $f(x) \geqslant 0$. Wtedy istnieją takie liczby rzeczywiste $a, c_1, c_2, \ldots, c_k$ i naturalne $m_1, m_2, \ldots, m_k$, że $f(x) = a(x-c_1)^{m_1}(x-c_2)^{m_2}\ldots(x-c_k)^{m_k}$. Ponieważ kwadraty liczb rzeczywistych są nieujemne, więc można założyć, że $m_1 = m_2 = \ldots = m_k = 1$ [12.1] i $c_1 < c_2 < \ldots < c_k$. Wtedy $f(x) = a(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_k)$. Dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ zachodzą nierówności $x - c_1 > x - c_2 > \ldots > x - c_k$.. Wynika stąd, że jeśli $x > c_k$, to liczby $f(x)$ i a mają taki sam znak. Na przedziale (c_{k-1}, c_k) ich znaki są przeciwne (lub $f(x) = 0$), itd.

Teraz zajmiemy się wymiernymi pierwiastkami wielomianów o współczynnikach całkowitych.

Twierdzenie 12.24 (o pierwiastkach wymiernych)
Jeśli $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, liczby $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{N}$ są względnie pierwsze a liczba $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem wielomianu f, to liczba p jest dzielnikiem a_0 a liczba q — dzielnikiem a_n.

Dowód. Po pomnożeniu równości

$$0 = f\left(\tfrac{p}{q}\right) = a_0 + a_1\tfrac{p}{q} + \cdots a_n\left(\tfrac{p}{q}\right)^n$$

przez liczbę q^n otrzymujemy

$$0 = a_0q^n + a_1pq^{n-1} + a_2p^2q^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-1}p^n.$$

Ponieważ wszystkie składniki z wyjątkiem pierwszego są podzielne przez p, więc również liczba a_0q^n jest podzielna przez p. Liczby p i q^n są względnie pierwsze, więc liczba p jest dzielnikiem liczby a_0. W taki sam sposób dowodzimy, że liczba q jest dzielnikiem liczby a_n. Dowód został zakończony. ■

Wniosek 12.25
Wymierne pierwiastki wielomianu **unormowanego** o współczynnikach całkowitych są liczbami całkowitymi. ■

12.1 Np. nierównowności $(x-\sqrt{2})^7 > 0$ i $x - \sqrt{2} > 0$ są równoważne.

Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych nie daje żadnych informacji o niewymiernych pierwiastkach wielomianu.

Uwaga 12.26 (o uogólnieniach teorii)
Z wyjątkiem twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wszystkie twierdzenia dotyczyły wielomianów, których współczynniki były rzeczywiste. Czytelnik jednak zauważy, że w dowodach korzystaliśmy jedynie z twierdzeń, które już udowodniliśmy. Nigdzie nie korzystaliśmy np. z tego, że istnieją rzeczywiste pierwiastki dowolnego stopnia z liczb nieujemnych. Oznacza to, że te twierdzenia są prawdziwe np. w zbiorze wielomianów o współczynnikach wymiernych, albo o współczynnikach z $\mathbb{Q}(\sqrt{2}\,) = \{x + y\sqrt{2}\colon \quad x, y \in \mathbb{Q}\}$ — chodzi o to, by można było współczynniki dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić. Jeśli będziemy rozważać np. tylko wielomiany o współczynnikach wymiernych, to okaże się, że wielomian $x^4 + 1$ jest nierozkładalny. Jednak w zbiorze wielomianów o współczynnikach rzeczywistych jest on rozkładalny:

$$x^4 + 1 = \left(x^2 + 1\right)^2 - 2x^2 = (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)\,.$$

Jest on też rozkładalny w zbiorze wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{Q}(\sqrt{2}\,)$, ale w zbiorze wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{Q}(\sqrt{3}\,)$ jest nierozkładalny. Widać korzyść płynącą z wnioskowania z pewników — można teorię stosować wszędzie tam, gdzie są one spełnione bez konieczności dowodzenia twierdzeń w nowej sytuacji. ■

Na zakończenie podamy jeszcze jedno twierdzenie, które pozwala często badać wielomiany o współczynnikach całkowitych za pomocą twierdzeń, które są prawdziwe w przypadku wielomianów o współczynnikach wymiernych.

Twierdzenie 12.27 (lemat Gaussa)
Jeśli wielomian $w(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ ma współczynniki całkowite i jest iloczynem wielomianów $u(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_kx^k$ oraz $v(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_mx^m$ o współczynnikach wymiernych, to istnieją takie liczby wymierne β i γ, że $\beta \cdot \gamma = 1$ i wielomiany $\beta \cdot u$ oraz $\gamma \cdot v$ mają całkowite współczynniki.

Dowód. Niech liczba q będzie najmniejszym wspólnym mianownikiem ułamków $b_0, b_1, \ldots, b_k$, tzn. istnieją takie liczby całkowite β_0, β_1, …, β_k, że $b_j = \frac{\beta_j}{q}$ dla $j = 0, 1, \ldots, k$, przy czym $\text{nwd}(q, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k) = 1$, analogicznie niech $c_j = \frac{\gamma_j}{r}$ dla $j = 0, 1, \ldots, m$, przy czym $\text{nwd}(r, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k) = 1$.

Aby nie komplikować oznaczeń definiujemy dodatkowe współczynniki w trzech wielomianach: $0 = \beta_{k+1} = \beta_{k+2} = \ldots$, $0 = \gamma_{m+1} = \gamma_{m+2} = \ldots$, $0 = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots$.

Jeśli liczba pierwsza p jest wspólnym dzielnikiem liczby q i wszystkich liczb $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$, to możemy zastąpić wielomiany u, v wielomianami pu i $\frac{v}{p}$. Analogicznie postępujemy ze wspólnymi dzielnikami liczb r i $\beta_0, \beta_1, \ldots$

W dalszym ciągu zakładamy, że $\text{nwd}(q, \gamma_0, \gamma_1, \ldots) = 1$ oraz $\text{nwd}(r, \beta_0, \beta_1, \ldots) = 1$. Z równości $w = u \cdot v$ wynika, że:
$\beta_0\gamma_0 = a_0 qr$,
$\beta_1\gamma_0 + \beta_0\gamma_1 = a_1 qr$,
$\beta_2\gamma_0 + \beta_1\gamma_1 + \beta_0\gamma_2 = a_2 qr$,
$\beta_3\gamma_0 + \beta_2\gamma_1 + \beta_1\gamma_2 + \beta_0\gamma_3 = a_3 qr$,
....
Jeśli p jest liczbą pierwszą i $p|q$, to $p|\beta_0$ lub $p|\gamma_0$ — wynika to z pierwszej równości. Załóżmy, że $p \mid \beta_0$. Niech i będzie najmniejszą liczbą naturalną, dla której $p \nmid \beta_i$. Ponieważ $p \mid \beta_0$, $p \mid \beta_1$, $p \mid \beta_2$, ... , $p \mid \beta_{i-1}$ oraz $p \mid q$, więc z równości

$$\beta_i\gamma_0 + \beta_{i-1}\gamma_1 + \beta_{i-2}\gamma_2 + \cdots + \beta_1\gamma_{i-1} + \beta_0\gamma_i = a_i qr$$

wynika, że $p \mid \gamma_0$. Stąd i z równości

$$\beta_{i+1}\gamma_0 + \beta_i\gamma_1 + \beta_{i-1}\gamma_2 + \beta_{i-2}\gamma_3 + \cdots + \beta_1\gamma_i + \beta_0\gamma_{i+1} = a_{i+1} qr$$

wynika, że $p \mid \gamma_1$. Kontynuując to rozumowanie (indukcja) przekonujemy się, że $p \mid \gamma_j$ dla każdej nieujemnej liczby całkowitej j, wbrew założeniu, które uczyniliśmy.

Wykazaliśmy, że liczba pierwsza nie może jednocześnie dzielić liczb q i β_0. Takie samo rozumowanie wyklucza możliwość $p \mid q$ i $p \mid \gamma_0$. Oznacza to, że liczba q nie ma dzielników pierwszych, zatem $q = 1$. W taki sam sposób dowodzimy, że $r = 1$. W ten sposób wykazaliśmy, że po wstępnych przeróbkach (wielu) polegających na dzieleniu jednego czynnika przez liczbę pierwszą i jednoczesnym mnożeniu drugiego przez tę samą liczbę pierwszą otrzymujemy wielomiany o współczynnikach całkowitych. ■

Na zakończenie tego rozdziału kilka słów o tzw. funkcjach wymiernych.

Definicja 12.28 (funkcji wymiernej)
Funkcją wymierną nazywamy iloraz dwóch wielomianów. Przyjmujemy, że jej dziedziną jest zbiór tych liczb rzeczywistych, dla których mianownik (w postaci nieskracalnej) jest różny od 0. ■

Natychmiast z definicji i z własności wielomianów wynika, że

1° Suma funkcji wymiernych jest funkcją wymierną.

2° Iloczyn funkcji wymiernych jest funkcją wymierną.

3° Wielomiany są funkcjami wymiernymi.

4° Niezerowa funkcja wymierna ma skończenie wiele pierwiastków — są to pierwiastki jej licznika (zakładamy, że funkcja jest zapisana w nieskracalnej postaci).

Zadania

1. Dowieść, że jeśli $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ i $w_0, w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}$, to istnieje dokładnie jeden taki wielomian f stopnia $\leqslant n$, że $f(x_j) = w_j$ dla każdego $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

2. Dowieść, że funkcja $\frac{x}{1+x^2}$ nie jest wielomianem.

3! Dowieść, że funkcje $\lfloor x \rfloor$ i $\sqrt[3]{x}$ nie są wielomianami ani nawet funkcjami wymiernymi.

4. Niech f oznacza wielomian o współczynnikach całkowitych, a, b, c — takimi liczbami całkowitymi, że $a \neq b \neq c \neq a$ i $b = f(a)$, $c = f(b)$. Dowieść, że $a \neq f(c)$.

5. Niech $P(x)$ będzie wielomianem stopnia $n > 1$ o współczynnikach całkowitych. Dowieść, że jeżeli $x, y \in \mathbb{Z}$ oraz $P(x) \neq P(y)$, to $|P(x) - P(y)| \geqslant |x - y|$.

Definicja 12.29 (punktu okresowego)
Jeśli $f\colon A \longrightarrow A$ jest funkcją i $\underbrace{f(f \ldots f(f}_{k \text{ liter } f}(x)) \ldots)) = x$, to mówimy, że x jest punktem okresowym funkcji f, k jest okresem, najmniejszy okres danego punktu nazywamy podstawowym. ■

6. Niech $P(x)$ będzie wielomianem stopnia $n > 1$ o współczynnikach całkowitych Wykazać, że wielomian P ma co najwyżej n **całkowitych** punktów okresowych.

7. Wykazać, że wielomian $4x(1-x)$ ma dokładnie 2^n punktów okresowych o okresie n.

8. Udowodnić, że wielomian $x^{3k} + x^{3m+1} + x^{3n+2}$ jest podzielny przez wielomian x^2+x+1 dla dowolnych $k,m,n\in\mathbb{N}$.

9! Wielomian $a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ ma n różnych pierwiastków. Wyrazić ich sumę i iloczyn za pomocą liczb $a_0,a_1,\dots,a_n$.

10. Dowieść, że jeśli wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartości nieparzyste dla dwóch kolejnych liczb całkowitych, to nie ma całkowitych pierwiastków.

11. Podać przykład wielomianu o współczynnikach niecałkowitych, którego wartości we wszystkich punktach całkowitych są całkowite.

12. Dowieść, że wielomian $(x+1)(x+2)(x+3)+17$ nie jest iloczynem dwóch wielomianów stopnia $\geqslant 1$, o współczynnikach wymiernych.

13. Dowieść, że jeśli $nx^n-x^{n-1}-\ldots-x-1=0$, to $|x|\leqslant 1$.

14. Znaleźć $a\in\mathbb{Z}$, dla którego $(x-a)(x-10)+1$ jest iloczynem wielomianów stopnia 1, o współczynnikach całkowitych.

15. Znaleźć sumę współczynników wielomianu otrzymanego po otwarciu nawiasów i uporządkowaniu wyrazów następującego wyrażenia $(1-3x+x^2)^{745}(3+2x-4x^2)^{746}$.

16. Dla jakich $a,b\in\mathbb{R}$ wielomian $x^4+ax^3+bx^2-8x+1$ jest kwadratem jakiegoś wielomianu.

17. Rozwiązać nierówność $x^5-3x^4+x^3+5x^2-6x+2\leqslant 0$.

18. Dowieść, że jeśli wielomian o współczynnikach całkowitych jest podzielny przez $x-\sqrt{2}$, to jest też podzielny przez x^2-2.

19. Wielomian w daje z dzielenia przez $x-a$ resztę A, z dzielenia przez $x-b$ — resztę B. Znaleźć resztę z dzielenia w przez $(x-a)(x-b)$ przy założeniu, że $a\neq b$.

20. Dowieść, że wielomian $nx^{n+2}-(n+2)x^{n+1}+(n+2)x-n$ jest podzielny przez $(x-1)^3$ dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$.

21. Dowieść, że $x^5-3x^4+6x^3-3x^3+9x-6$ jest nierozkładalny jako wielomian o współczynnikach wymiernych.

22. Rozwiązać nierówność $\left|\frac{x^2+3x+1}{x^2+4x+1}\right|>1$.

23. Dowieść, że jeśli wielomian x^4+ax+b ma dwukrotny pierwiastek, to $27a^4=256b^3$.

24. Liczby $a_1,a_2,\dots,a_n$ są parami różne i całkowite. Dowieść, że wielomian $(x+a_1)^2(x+a_2)^2\cdot\ldots\cdot(x+a_n)^2+1$ jest nierozkładalny jako wielomian o współczynnikach wymiernych.

25. Obliczyć $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2$.

26. Dowieść, że $20x^5 + 10x^4 + 15x^3 - 9x^2 + 3x - 3$ jest nierozkładalny jako wielomian o współczynnikach wymiernych.

27. Dowieść, że jeśli w jest takim wielomianem, że $w(1) = 0$ i $v(x) = w(x^n)$ dla $x \in \mathbb{R}$, to wielomian v jest podzielny przez $1 + x + \cdots + x^{n-1}$.

28. Czy każdy wielomian o współczynnikach całkowitych jest sumą kilku sześcianów wielomianów o współczynnikach całkowitych?

29. Czy wielomian $x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$ dzieli się: przez wielomian $x^5 - 1$, a przez — $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$?

30. Rozłożyć na czynniki $x^4(y - z) + y^4(z - x) + z^4(x - y)$.

31. Rozłożyć na czynniki $x^4(y^2 - z^2) + y^4(z^2 - x^2) + z^4(x^2 - y^2)$.

32. Rozłożyć na czynniki $x(y - z)^3 + y(z - x)^3 + z(x - y)^3$.

33. Dowieść, że istnieje taki wielomian w o współczynnikach całkowitych, że , to $0 < |w(x)| < \frac{1}{2010}$ dla $0 < x < 1$.

34. Dla jakich $x \in \mathbb{Z}$ wartości funkcji $\frac{2x-3}{5x+4}$ są całkowite?

35. Wykazać, że jeśli mianownik funkcji wymiernej jest iloczynem dwóch wielomianów względnie pierwszych, to tę funkcję można przedstawić jako sumę dwu funkcji wymiernych, których mianowniki to względnie pierwsze czynniki mianownika.

36. Udowodnić, że funkcja postaci $\frac{ax+b}{cx+d}$ jest albo stała, albo różnowartościowa. Dowieść, że jest ściśle monotoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy jest wielomianem stopnia pierwszego.

37. Zdefiniujemy nierówność w zbiorze funkcji wymiernych. Mówimy, że wielomian jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy jego współczynnik kierujący jest dodatni. Funkcja wymierna jest dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy można przedstawić ją jako iloraz dodatnich wielomianów. Funkcja f jest większa od funkcji g wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f - g$ jest dodatnia. Dowieść, że w zbiorze funkcji wymiernych z tą nierównością są spełnione wszystkie do tej pory sformułowane aksjomaty teorii liczb rzeczywistych. Czytelnik zechce zauważyć, że w tym przypadku nie działa zasada Archimedesa: wielomian x jest większy od każdej liczby naturalnej.

NAJPROSTSZE UKŁADY RÓWNAŃ

Najprostszy układ równań to układ dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie a_1,a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 są liczbami rzeczywistymi. Chodzi o znalezienie takiej pary liczb rzeczywistych x, y, dla równości (1) są spełnione jednocześnie. Tych par może być wiele.

Załóżmy od razu, że co najmniej jedna z liczb a_1, a_2, b_1, b_2, np. b_1 jest różna od 0.

Spróbujemy ten układ równań rozwiązać. Mnożąc pierwsze równanie przez b_2, a drugie — przez b_1, a potem odejmując je stronami, otrzymujemy $(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$. Z pierwszego równania możemy wyznaczyć $y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1}$. Wykazaliśmy, że jeśli jakaś para liczb spełnia układ (1), to spełnia też układ

$$\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)x &= c_1b_2 - c_2b_1, \\ y &= -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1}. \end{cases} \tag{1'}$$

W taki sam sposób wykazujemy, że każda para, która spełnia układ $(1')$, spełnia też układ (1). Te układy są **równoważne**.

Jeśli $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, to para $x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $y = \frac{c_2a_1 - c_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$ jest jedynym rozwiązaniem układu (1). W tym przypadku mówimy, że układ jest **oznaczony** (ma skończenie wiele rozwiązań).

Jeśli $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, to aby układ miał $(1')$ rozwiązanie, musi być spełniony warunek $c_1b_2 - c_2b_1 = 0$. Wtedy każda liczba $x \in \mathbb{R}$ spełnia pierwsze równanie układu $(1')$. Wobec tego dla każdego $x \in \mathbb{R}$ para $(x, -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1})$ jest rozwiązaniem układu $(1')$. W tym przypadku mówimy, że układ jest **nieoznaczony** (ma nieskończenie wiele rozwiązań).

Jeśli układ nie ma rozwiązań, to mówimy, że jest **sprzeczny**.

Uwaga 13.1 Jeśli $b_1 \neq 0$ i $a_1b_2 - a_2b_1 = 0 = c_1b_2 - c_2b_1$, to $0 = c_1(a_1b_2 - a_2b_1) - a_1(c_1b_2 - c_2b_1) = b_1(a_1c_2 - a_2c_1)$, więc również $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$. ■

Otrzymane rezultaty mają interpretację geometryczną. Jeśli $b_1 \neq 0$, to równanie $a_1x + b_1y = c_1$ opisuje prostą L_1. Drugie równanie przedstawia płaszczyznę (gdy $a_2 = b_2 = c_2 = 0$), prostą L_2 (gdy co najmniej jedna z liczb a_2, b_2 jest różna od 0) lub zbiór pusty (gdy $a_2 = b_2 = 0 \neq c_2$). Gdy drugie równanie opisuje płaszczyznę, to zbiór rozwiązań układu jest prostą opisaną przez pierwsze równanie.

Załóżmy, że drugie równanie opisuje prostą. Jeśli prosta L_2 nie jest ona równoległa do prostej L_1, to rozwiązaniem układu jest punkt wspólny L_1 i L_2. Jeśli prosta L_2 jest równoległa do L_1 i $L_1 \neq L_2$, to układ nie ma rozwiązań. Jeśli $L_1 = L_2$, to zbiorem rozwiązań układu jest L_1.

Wreszcie, gdy $L_2 = \emptyset$, to cały układ rozwiązań nie ma.

Zanim opowiemy coś o bardziej skomplikowanych układach równań, wprowadzimy przydatne definicje. Rozpatrujemy funkcje $f_i\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $X \subseteq \mathbb{R}^k$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a $\mathbb{R}^k$ jest zbiorem złożonym z k–tek z liczb rzeczywistych, tzn. elementami $\mathbb{R}^1$ są liczby rzeczywiste, elementami $\mathbb{R}^2$ — pary liczb rzeczywistych, elementami $\mathbb{R}^3$ — trójki liczb rzeczywistych itd. Zbiór $\mathbb{R}^k$ nazywamy k–wymiarową przestrzenią rzeczywistą, a jego elementy punktami.

Rozwiązaniem układu n równań z k niewiadomymi

$$
\left\{
\begin{array}{l}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0 \\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_n(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0
\end{array}
\right. \tag{2}
$$

nazywamy **zbiór** takich punktów $p = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, że $f_1(p) = 0$, $f_2(p) = 0$, $\ldots$, $f_n(p) = 0$. Będziemy też mówić, że k–tka spełnia układ równań. Podobnie można zdefiniować rozwiązanie układu nierówności. Czasem rozwiązaniem układu nazywane są te punkty p przestrzeni $\mathbb{R}^k$, dla których zachodzą równości $f_1(p) = 0$, $f_2(p) = 0$, $\ldots$, $f_n(p) = 0$. Są, jak widać, dwie terminologie trochę różniące się, jednak odrobina uwagi przy ich stosowaniu zabezpiecza nas przed nieporozumieniem.

Niech $n \leqslant m$ będą liczbami całkowitymi, $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m$ — liczbami rzeczywistymi. Definiujemy nowy symbol

$$\sum_{j=n}^{m} a_j := a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m .$$

Podobnie $\prod_{j=n}^{m} := a_n \cdot a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_m$.

Przykład 13.1 Niech $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{n} a_i a_j\Big) = \sum_{i=0}^{n} a_i\Big(\sum_{j=0}^{n} a_j\Big) = \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n} a_j\Big) = \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\Big)^2 .$$

Pokazaliśmy za pomocą nowego symbolu, że suma wszystkich iloczynów postaci $a_i a_j$ to kwadrat sumy liczb $a_0, a_1, \ldots, a_n$. ■

Przykład 13.2 Funkcja $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ to wielomian, jeśli $a_n \neq 0$, to wielomian n–tego stopnia o współczynnikach $a_0, a_1, \ldots, a_n$. ■

Uwaga 13.2
Jeśli $a_{i,j}$ są liczbami rzeczywistymi dla $0 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant n$, to zamiast pisać $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{n} a_{i,j}\Big)$ piszemy często $\displaystyle\sum_{i,j=0}^{n} a_{i,j}$. ■

Definicja 13.3 (wielomianu wielu zmiennych)
Funkcję $f\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy wielomianem zmiennych x_1, x_2, $x_3, \ldots, x_k$, jeśli istnieją takie liczby rzeczywiste $a_{j_1,j_2,\ldots,j_k}$, gdzie $0 \leqslant j_1 \leqslant n$, $0 \leqslant j_2 \leqslant n, \ldots,$ $0 \leqslant j_k \leqslant n$, że dla każdego punktu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ zachodzi równość

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_k=0}^{n} a_{j_1,j_2,\ldots,j_k} \cdot x_1^{j_1} \cdot x_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{j_k} . \tag{3}$$

Stopniem wielomianu f zmiennych x_1, x_2, ... , x_k nazywamy liczbę $\max\{j_1 + j_2 + \cdots + j_k\colon \;\; a_{j_1,j_2,\ldots,j_k} \neq 0\}$. ■

Twierdzenie 13.4 (o jednoznaczności współczynników)
Jeśli dla każdego $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ zachodzi równość

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_k=0}^{n} a_{j_1,j_2,\ldots,j_k} \cdot x_1^{j_1} \cdot x_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{j_k} = \\ = \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_k=0}^{n} b_{j_1,j_2,\ldots,j_k} \cdot x_1^{j_1} \cdot x_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{j_k} = g(\mathbf{x}),$$

to dla każdego $(j_1, j_2, \dots, l_k)$ zachodzi równość

$$a_{j_1,j_2,\dots,j_k} = b_{j_1,j_2,\dots,j_k}\,.$$ [13.1]

Dowód. Stosujemy indukcję względem k. Dla $k = 1$ twierdzenie jest prawdziwe, co udowodniliśmy w poprzednim rozdziale. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich wielomianów $k-1$ zmiennych. Lewą stronę można zapisać w postaci

$$\sum_{j=0}^{n} f_j(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) x_k^j\,, \quad \text{gdzie}$$

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) = \sum_{j_1,j_2,\dots,j_{k-1}=0}^{n} a_{j_1,j_2,\dots,j_{k-1},j} \cdot x_1^{j_1} \cdot x_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot x_{k-1}^{j_{k-1}}\,.$$

Analogicznie można postąpić z prawą stroną otrzymując sumę

$$\sum_{j=0}^{n} g_j(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) x_k^j\,.$$

Dla każdego $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}$ mamy więc dwa wielomiany **jednej** zmiennej x_k, których wartości są równe we wszystkich punktach prostej. Wobec tego odpowiednie współczynniki są równe, czyli $f_j(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) = g_j(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$ dla każdego $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}$. Z założenia indukcyjnego wynika, że odpowiednie współczynniki wielomianów f_j i g_j są równe, a to oznacza, że odpowiednie współczynniki wielomianów f i g są równe. Dowód został zakończony. ■

Stopniem wielomianu $x^2 + y^3 + x^3 y$ zmiennych x, y jest liczba 4. Podobnie jak w przypadku wielomianów jednej zmiennej przyjmujemy, że stopniem wielomianu zerowego jest $-\infty$. Można też udowodnić twierdzenie o jednoznaczności rozkładu na czynniki nierozkładalne, ale jest ono nieco trudniejsze niż dla jednej zmiennej, bo nie działa algorytm Euklidesa. Wielomian zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_k$ można potraktować jako wielomian zmiennej x_k, którego współczynnikami są wielomiany pozostałych zmiennych.

W omówionym przykładzie mieliśmy $k = n = 2$, $X = \mathbb{R}^2$, $f_1(x, y) = a_1 x + b_1 y - c_1$ i $f_2(x, y) = a_2 x + b_2 y - c_2$. Funkcje f_1

[13.1] Po obu stronach równości występują te same indeksy, ale to nie zmniejsza ogólności twierdzenia, bo wiele współczynników może być zerami — nie zakładamy np., że stopień którejkolwiek strony jest równy n, zawsze można dopisać odpowiednią liczbę zer i f_2 były wielomianami stopnia $\leqslant 1$ zmiennych x, y. W dyskusji układu (1) założyliśmy od razu, że stopień wielomianu f_1 jest równy 1 ($b_1 \neq 0$).

Rozwiązywanie układów równań jest na ogół trudnym problemem i niestety nie ma ogólnych metod ich rozwiązywania. Czasem problem można uprościć.

Przykład 13.3 Rozwiążemy układ $\begin{cases} x^2+y^2 &= 13, \\ xy &= 6. \end{cases}$

Ten układ można uprościć przyjmując $u = x+y$ i $v = xy$. Wtedy $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$. Układ przybiera postać $\begin{cases} u^2-2v &=13, \\ v &=6. \end{cases}$

Stąd od razu mamy $v = 6$ i $u^2 = 25$, więc $v = 6$ i $u = 5$ lub $v = 6$ i $u = -5$. Pierwotny układ jest równoważny temu, że

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6 \end{cases} \qquad \text{lub} \qquad \begin{cases} x+y=-5, \\ xy=6. \end{cases}$$

Jego rozwiązaniami są cztery pary liczb: $x = 2$, $y = 3$; $x = 3$, $y = 2$; $x = -2$, $y = -3$ i $x = -3$, $y = -2$. ■

Przypomnijmy, że jeśli $x+y = b$ i $xy = c$, to liczby x i y są pierwiastkami równania $t^2 - bt + c = 0$.

Można zapytać, w jakich przypadkach można stosować podstawienie $u = x+y$, $v = xy$. Odpowiedź na to pytanie jest prosta, ale musimy poprzedzić ją definicją.

Definicja 13.5 (funkcji symetrycznej)
Funkcja $f\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej permutacji $\sigma\colon \{1,2,\ldots,k\} \longrightarrow \{1,2,\ldots,k\}$ i każdego $(x_1,x_2,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^k$ zachodzi równość

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_k) = f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(k)}).\ ■$$

Wielomiany x^2+y^2, xy, $x^4-x^2y^3-x^3y^2+y^4$ są symetryczne. Wielomiany x^2-y^2, $x+2y$, $x^3+x^2y+y^3$ nie są symetryczne.

Twierdzenie 13.6 (o wielomianach symetrycznych)
Jeśli jest wielomianem symetrycznym zmiennych x i y, to istnieje taki wielomian $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, że równość $g(x+y, xy) = f(x,y)$ ma miejsce dla dowolnego punktu $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Dowód. Udowodnimy to twierdzenie przez indukcję względem stopnia wielomianu f. Jeśli stopień jest równy 1, to $f(x,y) = =ax + by + c$. Ponieważ $a + c = f(1,0) = f(0,1) = b + c$, więc $a = b$. Wobec tego $f(x,y) = a(x+y)+c$, więc wystarczy przyjąć $g(u,v) = u + c$, by przekonać się, że twierdzenie jest prawdziwe dla wielomianów stopnia pierwszego.

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich wielomianów stopnia nie większego niż k i że f jest wielomianem stopnia $k+1$. Z twierdzenia o jednoznaczności współczynników wynika, że jeśli w zapisie wielomianu f występuje składnik $ax^r y^s$, to występuje też składnik $ax^s y^r$. Wystarczy więc tezę indukcyjną wykazać jedynie dla wielomianów postaci $ax^r y^s + ax^s y^r$. Jeśli $0 < r < s$, to $ax^r y^s + ax^s y^r = a(xy)^r (y^{s-r} + x^{s-r})$, zatem wystarczy w żądanej postaci przedstawić wielomian $y^{s-r} + x^{s-r}$, co jest możliwe dzięki założeniu indukcyjnemu. Pozostaje jedynie rozpatrzeć, że wielomian $x^{k+1} + y^{k+1}$. Mamy teraz

$$x^{k+1} + y^{k+1} = x^{k+1} + x^k y + xy^k + y^{k+1} - xy(x^{k-1} + y^{k-1}) = \\ = (x+y)(x^k + y^k) - xy(x^{k-1} + y^{k-1}),$$

a ten wielomian można przedstawić w żądanej postaci na mocy założenia indukcyjnego. ■

Twierdzenie to pozostaje w mocy dla wielomianów symetrycznych dowolnej liczby zmiennych, ale wtedy trzeba zamiast $u = x + y$ i $v = xy$ mówić o zmiennych:

$$\begin{aligned} &u_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_k\,, \\ &u_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_k + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_{k-1}x_k \\ &u_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{k-2}x_{k-1}x_k \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &u_k = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k\,, \end{aligned}$$

zwanych **elementarnymi wielomianami symetrycznymi**.

Czytelnik zauważy, że

$$(t + x_1)(t + x_2)\ldots(t + x_k) = u_k + tu_{k-1} + \cdots + t^{k-1}u_1 + t^k\,.$$

Zadania

Rozwiązać układ równań

1. $\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = -11, \\ (x^2 - y^2)xy = 180. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 - yz = 3, \\ y^2 - zx = 4, \\ z^2 - xy = 5. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} x + y + z = 9, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1, \\ xy + yz + zx = 27. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 37, \\ x^2 + z^2 + xz = 28, \\ y^2 + z^2 + yz = 19. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x + y + z = 9, \\ xy + yz + zx = 26, \\ xyz = 24. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4, \\ xy = 27. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} x^5 - y^5 = 992, \\ x - y = 2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y = 1, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1. \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = uv, \\ u^2 + v^2 = xy. \end{cases}$

11. Rozwiązać w liczbach naturalnych układ $\begin{cases} x + y = uv, \\ u + v = xy. \end{cases}$

12. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \frac{x+y}{1+xy} = \frac{2a}{1+a^2}, \\ \frac{x-y}{1-xy} = \frac{2b}{1+b^2}, \end{cases}$ gdzie a, b są danymi liczbami rzeczywistymi.

13. Rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} x_1(x_6 + x_2) = x_3 + x_5, \\ x_2(x_1 + x_3) = x_4 + x_6, \\ x_3(x_2 + x_4) = x_5 + x_1, \\ x_4(x_3 + x_5) = x_6 + x_2, \\ x_5(x_4 + x_6) = x_1 + x_3, \\ x_6(x_5 + x_1) = x_2 + x_4. \end{cases}$$

14. Rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} x_1x_2 = 1, \\ x_2x_3 = 2, \\ x_3x_4 = 3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1}x_n = n - 1, \\ x_nx_1 = n. \end{cases}$$

15. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ układ $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ xy + yz + zx = 1, \\ xyz = a \end{cases}$ ma rozwiązania rzeczywiste?

16. Dowieść, że jeśli $a^2+c^2=1=b^2+d^2$ i $ab+cd=0$, to $a^2+b^2=1=c^2+d^2$ i $ac+bd=0$.

17. Dowieść, że jeśli $a^2+c^2=1=b^2+d^2$ i $ab+cd=-\frac{1}{2}$, to $a^2+ab+b^2=c^2+cd+d^2$.

18. Dowieść, że jeśli $\begin{cases} a^2+k^2+p^2=1, \\ b^2+m^2+q^2=1, \\ c^2+n^2+r^2=1, \end{cases}$ i $\begin{cases} ab+km+pq=0, \\ bc+mn+qr=0, \\ ca+nk+rp=0, \end{cases}$

to $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1, \\ k^2+m^2+n^2=1, \\ p^2+q^2+r^2=1, \end{cases}$ i $\begin{cases} ak+bm+cn=0, \\ kp+mq+nr=0, \\ pa+qb+rc=0. \end{cases}$

PEWNIK DEDEKINDA
i jego najprostsze konsekwencje

W rozdziale ósmym stwierdziliśmy, że z podanych tam pewników nie wynika istnienie pierwiastków z liczb rzeczywistych. Uzupełnimy teraz listę pewników jeszcze jednym i wtedy będziemy w stanie wykazać istnienie pierwiastków oraz zasadę Archimedesa, z której korzystaliśmy i jeszcze wiele razy skorzystamy.

Przypomnijmy, że zbiór A jest ograniczony z góry liczbą M wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in A$ zachodzi nierówność $a \leqslant M$. Mówimy wtedy, że M jest ograniczeniem górnym zbioru A. Zmieniając kierunki nierówności w tej definicji otrzymujemy definicję zbioru ograniczonego z dołu i ograniczenia dolnego.

Definicja 13.1 (kresów)
Najmniejsze (największe) ograniczenie górne (dolne) zbioru A nazywamy jego kresem górnym (dolnym). Oznaczamy je symbolem $\sup A$ ($\inf A$).
Jeśli zbiór A nie jest ograniczony z góry (z dołu), to piszemy $\sup A = \infty$ ($\inf A = -\infty$).
Największy element zbioru A, jeśli taki istnieje, oznaczamy symbolem $\max A$, a najmniejszy — $\min A$. ■

Przykład 13.1 $\sup \mathbb{R} = +\infty$, $\inf \mathbb{R} = -\infty$,
$\inf \mathbb{N} = 1 = \min \mathbb{N}$, $\sup\{x \in \mathbb{R}\colon \quad x < 0\} = 0$,
$\max\{x \in \mathbb{R}\colon \quad x < 0\} = 0$ nie istnieje,
$\sup(a,b) = b$, $\inf(a,b) = a$, $\sup[a,b] = b$, $\max[a,b] = b$,
$\inf[a,b] = a$, $\min[a,b] = a$, $\min(a,b]$ — nie istnieje. ■

Aby wykazać, że liczba c jest kresem górnym zbioru A należy dowieść, że
1° jest ona ograniczeniem górnym tego zbioru,
2° jeśli M też jest ograniczeniem górnym zbioru A, to $c \leqslant M$.

Udowodnimy teraz bardzo proste, ale i bardzo przydatne

Twierdzenie 13.2
Ograniczenie górne c niepustego zbioru A jest jego kresem górnym wtedy i tylko wtedy, gdy
1° dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $a \in A$ większa niż $c - \varepsilon$:
$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{a \in A} \; a > c - \varepsilon .$$

Warunek 1° jest równoważny temu, że:
jeśli $b < c$, to w zbiorze A znajdzie się liczba $a \in A$ większa od b, symbolami $\forall_{b<c} \exists_{a\in A}\ a > b$.

Dowód. Niech $c = \sup A$ i $\varepsilon > 0$. Ponieważ $c - \varepsilon < \sup A$, więc $c - \varepsilon$ nie jest ograniczeniem górnym zbioru A. Wobec tego można znaleźć w zbiorze A liczbę $a > c - \varepsilon$.

Załóżmy teraz, że dla ograniczenia górnego zbioru A jest spełniony warunek 1°. Jeśli $c \neq \sup A$, to istnieje mniejsze ograniczenie górne zbioru A, np. d. Niech $\varepsilon = c - d$. Oczywiście $\varepsilon > 0$. Ponieważ d jest ograniczeniem górnym A, więc w A nie ma liczby większej niż $d = c - \varepsilon$, wbrew warunkowi 1°. ■

Pewnik ciągłości Dedekinda

Każdy niepusty i ograniczony z góry zbiór złożony z liczb rzeczywistych ma kres górny. ■

Dedekind ten pewnik formułował nieco inaczej.

Twierdzenie 13.3

Każdy niepusty i ograniczony z dołu zbiór złożony z liczb rzeczywistych ma kres dolny.

Dowód. Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem ograniczonym z dołu liczbą m. Wtedy zbiór $B = \{b \in \mathbb{R}\colon\ -b \in A\}$ jest ograniczony z góry liczbą $M = -m$. Wykażemy najpierw, że liczba $-\sup B$ jest kresem dolnym zbioru A.

Jeśli $a \in A$, to $-a \in B$, więc $-a \leqslant \sup B$. Wobec tego $a \geqslant -\sup B$, więc liczba $-\sup B$ jest dolnym zbioru A.

Jeśli m jest ograniczeniem dolnym zbioru A, to $-m$ jest ograniczeniem górnym B, więc $-m \geqslant \sup B$, tzn. $m \leqslant -\sup B$. ■

Kolej na twierdzenie, które zdaje się być oczywiste.

Twierdzenie 13.4 (zasada Archimedesa)

Dla każdej liczby rzeczywistej a istnieje liczba naturalna $n > a$, czyli zbiór liczb naturalnych nie jest ograniczony z góry, a to zapisujemy symbolami tak: $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

Dowód. Załóżmy, że twierdzenie nie jest prawdziwe. Wtedy zbiór A złożony z tych liczb rzeczywistych, które są większe od każdej liczby naturalnej, jest niepusty. Jest ograniczony z dołu liczbą 1 (a nawet dowolną liczbą naturalną). Ma więc kres dolny. Niech $c = \inf A$. Liczba $c - 1$ nie jest elementem zbioru A, więc istnieje liczba $n \in \mathbb{N}$ większa niż $c-1$. Wobec tego liczba naturalna $n+1$ jest większa niż $c=(c-1)+1$, zatem $c \notin A$. Ponieważ $n+1>c$ i $c=\inf A$, więc istnieje taka liczba $a \in A$, że $c<a<n+1$. To jednak jest niemożliwe, bo w zbiorze A są tylko liczby większe od wszystkich naturalnych. ■

Archimedes zauważył konieczność stosowania tego twierdzenia. W jego sformułowaniu był to pewnik:
jeśli na prostej dane są dwa odcinki A i B, to można A powtórzyć jako składnik tyle razy, że otrzymana suma będzie większa niż B: $\quad A+A+A+\cdots+A>B$.

Wniosek 13.5 $\inf\{\frac{1}{n}\colon \ n \in \mathbb{N}\}=0$, tzn. dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taka liczba naturalna n, że $\varepsilon>\frac{1}{n}$.

Dowód. $\varepsilon>\frac{1}{n} \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$ i korzystamy z zasady Archimedesa. ■

Twierdzenie 13.6 (**o istnieniu pierwiastków rzeczywistych**)
Jeśli $a \geqslant 0$ i $k \in \mathbb{N}$, to istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista $b \geqslant 0$ taka, że $a=b^k$. Jeśli $k \geqslant 1$ jest liczbą całkowitą nieparzystą, a jest dowolną liczbą rzeczywistą, to istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista b taka, że $b^k=a$.

Dowód. Jeśli $a=0$, to oczywiście $b=0$.

Niech $a>0$ i $A=\{x \in \mathbb{R}\colon \ x^k \leqslant a\}$. $A \neq \emptyset$, bowiem $\frac{a}{1+a} \in A$, gdyż $0<\frac{a}{1+a}<1$, zatem $\left(\frac{a}{1+a}\right)^k \leqslant \frac{a}{1+a}<a$. Jeśli $x \in A$, to $x<1+a$, bo

jeśli $x \geqslant 1+a$, to $x^k \geqslant (1+a)^k \geqslant 1+ka \geqslant 1+a>a$.

Niech $b=\sup A$. Ponieważ $\frac{a}{1+a} \in A$, więc $b \geqslant \frac{a}{1+a}>0$. Udowodnimy, że $b^k=a$. Załóżmy, że tak nie jest. Musi więc być albo $b^k<a$ albo $b^k>a$.

Niech $b^k<a$, $0<\varepsilon<\frac{a-b^k}{k(b+1)^{k-1}}$ i $\varepsilon<1$. Wtedy

$$(b+\varepsilon)^k-b^k=\varepsilon\big[(b+\varepsilon)^{k-1}+(b+\varepsilon)^{k-2}b+\cdots+b^{k-1}\big]< \\ <\varepsilon k(b+1)^{k-1}<a-b^k.$$

Wobec tego $(b+\varepsilon)^k<a$, zatem $b+\varepsilon \in A$ wbrew temu, że $b+\varepsilon>b=\sup A$. Nierówność $b^k<a$ nie zachodzi.

Niech $b^k>a$, $0<\varepsilon<b$ i $\varepsilon<\frac{b^k-a}{kb^{k-1}}$. Wtedy

$$b^k-(b-\varepsilon)^k=\varepsilon\bigl[b^{k-1}+b^{k-2}(b-\varepsilon)+\cdots+(b-\varepsilon)^{k-1}\bigr]<$$
$$<\varepsilon k b^{k-1}<b^k-a\,.$$
Stąd wniosek, że $a<(b-\varepsilon)^k$. Jeśli więc $x\geqslant b-\varepsilon>0$, to $x^k\geqslant(b-\varepsilon)^k>a$, zatem $x\notin A$. Liczba $b-\varepsilon<b=\sup A$ jest wobec tego ograniczeniem górnym zbioru A mniejszym od jego kresu górnego. Wykluczyliśmy teraz nierówność $b^k>a$.

Wykluczyliśmy obie nierówności, więc musi zachodzić równość $b^k=a$ Jest tylko jedna taka liczba b bowiem z nierówności $0\leqslant b_1<b_2$ wynika, że $b_1^k<b_2^k$.

Jeśli $a<0$ i k jest nieparzystą liczbą naturalną, to z udowodnionej już części twierdzenia wynika, że istnieje dokładnie jedno takie $c>0$, że $c^k=-a$, czyli $a=(-c)^k$. Przyjmujemy $b=-c$, co kończy dowód istnienia liczby b. Jednoznaczność wynika z jednoznaczności dla liczby $-a>0$ i tego, że potęga liczby dodatniej jest dodatnia, a ujemnej — ujemna, bo wykładnik jest nieparzysty. ■

Zadania

1! Udowodnić, że w każdym przedziale znajduje się co najmniej jedna liczba wymierna.

2! Udowodnić, że w każdym przedziale znajduje się co najmniej jedna liczba niewymierna.

3. Znaleźć kresy górny i dolny zbioru A, jeśli $A=:$

(a) $\{\frac{1}{k}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}:\quad k,m,n\in\mathbb{N}\}$;

(b) $\bigl\{\frac{(m+n)^2}{2^{mn}}:\quad m,n\in\mathbb{N}\bigr\}$;

(c) $\bigl\{\frac{x}{x^2+1}:\quad x\in\mathbb{R}\bigr\}$;

(d) $\bigl\{\frac{1}{x^4+1}:\quad x\in\mathbb{R}\bigr\}$;

(e) $\bigl\{\frac{x^2+x+1}{3x^2+8}:\quad x\in\mathbb{R}\bigr\}$;

(f) $\bigl\{x^2+(xy-1)^2:\quad x,y\in\mathbb{R}\bigr\}$.

4. Niech $f(x)=x^3-3x^2+1$. Udowodnić, że

(a) $f(x)>0$ dla $x\geqslant 3$;

(b) $f(x)<0$ dla $x\leqslant -1$;

(c) $|f(x)-f(y)|\leqslant 45|x-y|$ dla $x,y\in[-1,3]$;

(d) istnieją takie liczby rzeczywiste $a<0<b<2<c$, że

$f(a) = f(b) = f(c) = 0\,.$

(e) Znaleźć maksymalne przedziały (półproste), na których funkcja f jest monotoniczna.

5. Udowodnić, że jeśli $A, B \subseteq \mathbb{R}$ są niepustymi zbiorami, to

(a) $\sup\{a+b\colon \quad a\in A,\ b\in B\} = \sup A + \sup B\,;$

(b) $\inf\{a+b\colon \quad a\in A,\ b\in B\} = \inf A + \inf B\,;$

(c) $\sup\{a-b\colon \quad a\in A,\ b\in B\} = \sup A - \inf B\,;$

(d) $\inf\{a-b\colon \quad a\in A,\ b\in B\} = \inf A - \sup B\,;$

(d) $\inf\{a-b\colon \quad a\in A,\ b\in B\} = \inf A - \sup B\,;$

(e) $\sup(A\cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}\,;$

(f) $\sup\{a\cdot b\colon \quad a\in A,\ b\in B\} =$

$= \max(\sup A \sup B, \sup A \inf B, \inf A \sup B, \inf A \inf B).$

6. Znaleźć $\sup\big\{x\cdot y\colon \quad x+y=4,\ x\in[0,4],\ y\in[0,4]\big\}\,.$

7. Znaleźć $\sup\big\{xyz\colon \quad x+y+z=6,\ x,y,z\in[0,6]\big\}.$

CIĄGI I ICH GRANICE

Definicja 15.1 (ciągu)
Ciągiem nazywamy dowolną funkcję określoną na zbiorze złożonym ze wszystkich tych liczb całkowitych, które są większe lub równe pewnej liczbie całkowitej n_0. Wartość tej funkcji punkcie n nazywamy n-tym wyrazem ciągu. ■

Zwykle oznaczamy wyrazy ciągu przez a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, a sam ciąg symbolem $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots$ albo $\big(a_n\big)_{n=n_0}^{\infty}$ lub krótko $\big(a_n\big)$, jeśli nie ma wątpliwości od jakiego numeru zaczynamy, lub gdy jest to nieistotne. ■

Przykład 15.1 Liczby naturalne, wypisane w zwykłej kolejności, tworzą ciąg: $a_n = n$. ■

Przykład 15.2 Potęgi dwójki tworzą ciąg. Wystarczy przyjąć $a_n = 2^n$. Kolejne wyrazy tego ciągu wyglądają tak:

$$1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots.$$

Można napisać: $a_n = 2^n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$. ■

Przykład 15.3 Odwrotności kolejnych dodatnich liczb naturalnych tworzą ciąg: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, …, ogólnie $a_n = \frac{1}{n}$ dla $n = 1, 2, 3 \ldots$ ■

Przykład 15.4 Liczby
$a_1 = 1$, $a_2 = 1-\frac{1}{2}$, $a_3 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, $a_3 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$,… tworzą ciąg. Możemy napisać wzór $a_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \ldots$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. ■

Przykład 15.5 Ciąg o wyrazach $c, c, c \ldots$ nazywamy stałym. ■

Przykład 15.6 Jeśli np. chcemy zdefiniować pole koła, to możemy rozważać np. wielokąty foremne wpisane w to koło o coraz większej liczbie boków i mówić, że pole koła jest liczbą, którą można przybliżać polami tych wielokątów, przy czym przybliżenie jest tym dokładniejsze im większa jest liczba boków wielokąta. Mamy tu więc do czynienia z ciągiem pól wielokątów wpisanych w dane koło, co oznacza, że liczbom naturalnym począwszy od 3 przypisane zostały pewne liczby rzeczywiste. Te ostatnie nazywamy wyrazami ciągu i oznaczamy zwykle symbolem a_n. ■

Przykład 15.7 Inny przykład rozważał Zenon z Elei, filozof (490-430 p.n.e). Twierdził on mianowicie, że znany w starożytności biegacz Achilles nie jest w stanie dogonić żółwia. Rozważania te przedstawimy oczywiście używając współczesnego języka i stosując współczesne oznaczenia.

Załóżmy na przykład, że początkowa odległość między Achillesem i żółwiem równa jest 100 m. Dla prostoty przyjmiemy, że prędkość Achillesa jest dziesięciokrotnie większa niż prędkość uciekającego żółwia. W jakimś czasie Achilles przebiegnie 100 m. W tym samym czasie żółw przesunie się o 10 m, więc przynajmniej na razie nie zostanie złapany. Po $\frac{1}{10}$ tego czasu Achilles przebiegnie 10 m, jednak znów nie dogoni żółwia, który oddali się o następny metr. Achilles przebiegnie metr, a żółw oddali się o 10 cm itd. Proces ten można kontynuować. Prowadzi to do rozpatrywania coraz dłuższych odcinków przebytych przez Achillesa, czyli liczb: 100 , 110 , 111 , $111{,}1$, $111{,}11$, ... — czyli ciągu, którego wyraz o numerze n jest dany za pomocą wzoru

$$a_n = 100 + 10 + 1 + \ldots + \tfrac{100}{10^{n-1}} = 111{,}1\ldots1$$

— przy czym w zapisie dziesiętnym tej liczby występuje n jedynek. Zenon po prostu nie potrafił zsumować nieskończenie wielu składników. Nie operował pojęciem **sumy nieskończonej**, nie umiano wtedy takiego pojęcia zdefiniować. Tego rodzaju problemy analizowano już wtedy, ale ścisłe definicje matematyczne pojawiły się dopiero w pierwszej połowie XIX w. (Gauss, Cauchy, Bolzano). Możemy łatwo odpowiedzieć na pytanie, jaką odległość przebiegnie Achilles, zanim złapie żółwia: $111,1\ldots = \frac{1000}{9}$.

Na wszelki wypadek podamy formalne rozumowanie, które można było zastosować również w starożytności, jednak bez jawnego użycia pojęcia sumy nieskończonej, a więc omijając istotny problem matematyczno-filozoficzny. Oznaczmy odległość przebytą przez żółwia do momentu zakończenia pogoni przez x . Achilles w tym samym czasie przebiegł odległość $10x$. Różnica tych wielkości to $9x = 100$. Stąd natychmiast wynika, że $x = \frac{100}{9}$, zatem $10x = \frac{1000}{9}$. Oczywiście problemem istotnym było tu obliczenie tzw. granicy ciągu, czym zajmiemy się niebawem. [15.1] ■

Przykład 15.8 Załóżmy, że wpłaciliśmy do banku pewną kwotę k zł. na rachunek płatny na każde żądanie, oprocentowany w stosunku $100x$ w skali rocznej. Załóżmy przy tym, że jeśli bank wypłaca nam pieniądze nie po roku lecz po jego części, np. dwóch miesiącach, to wypłaca nam *odpowiednią* część oprocentowania. Będziemy rozważać sytuację abstrakcyjną nie zwracając uwagi na to, że operacje bankowe nie są wykonywalne momentalnie i że często okres oprocentowania liczy się od dnia następnego po wpłacie. Zastanówmy się jaką kwotę będziemy mogli uzyskać po upływie roku. Banalna odpowiedź to $k+x\cdot k = k(1+x)$. Ta odpowiedź nie jest jednak w pełni satysfakcjonująca, bowiem mogliśmy wyjąć pieniądze z rachunku po pół roku i natychmiast wpłacić je z powrotem. Wtedy po połowie roku otrzymalibyśmy połowę oprocentowania tj. kwotę $k + \frac{1}{2}x \cdot k = k(1 + \frac{x}{2})$, a po następnych sześciu miesiącach — kwotę $k(1 + \frac{x}{2}) + \frac{x}{2} \cdot k(1 + \frac{x}{2}) = k(1 + \frac{x}{2})^2$, a więc większą od $k(1 + x)$ o $k \cdot \frac{x^2}{4}$.

Jeżeli na przykład $k = 1000$ oraz $x = 0{,}1$, co odpowiada oprocentowaniu 10% w skali rocznej, to $k \cdot \frac{x^2}{4} = 2{,}5$, a więc powstała różnica, która co prawda duża nie jest, ale istnieje i przy większych kwotach zaczyna mieć istotne znaczenie. Ważniejsze jest jednak to, że stwierdzenie, że oprocentowanie w skali rocznej jest równe $100x$ zinterpretowaliśmy na dwa różne sposoby i widać wyraźnie, że możemy podać jeszcze inny wynik. Odwiedzajmy np. nasz bank nie co pół roku, lecz co miesiąc (dla prostoty przyjmujemy, że miesiąc to $\frac{1}{12}$ część roku). Rozumując tak jak poprzednio stwierdzamy, że po miesiącu otrzymamy $k(1 + \frac{x}{12})$ zł, zaś po 2 miesiącach $k(1+\frac{x}{12})^2$ zł. Oczywiście po trzech miesiącach otrzymujemy kwotę $k(1 + \frac{x}{12})^3$, po czterech — $k(1 + \frac{x}{12})^4$ itd.

[15.1] Były inne paradoksy związane z problemem dzielenia w nieskończoność na części, np. punkt nie ma długości, odcinek składa się z punktów i ma długość, poruszający się obiekt w nieskończenie krótkim czasie nie przebywa żadnej odległości, a jednak się porusza. Przekonamy się, że dzięki pojęciu granicy daje się w sensowny sposób mówić o tego rodzaju kwestiach nie dochodząc do pozornych sprzeczności.

Po 12 miesiącach wypłacić należałoby $k(1+\frac{x}{12})^{12}$ zł. Gdybyśmy podzielili rok na n równych części, gdzie n oznaczać może dowolną z liczb $1,2,3,\ldots$, to wypłata po upływie m części roku byłaby równa $k(1+\frac{x}{n})^m$ zł, zaś po roku $k(1+\frac{x}{n})^n$ zł. Powstaje więc problem, jak należy liczyć oprocentowanie w tym przypadku, czy rozdrabnianie roku powoduje wzrost wypłat istotny przynajmniej w przypadku dużych kwot, czy też od pewnego momentu zwiększanie częstotliwości operacji już nie powoduje istotnych zmian. Prowadzi to do badania ciągu o wyrazie $k\cdot\big(1+\frac{x}{n}\big)^n$. ■

Przykład 15.9 Innym rodzajem ciągu jest tzw. ciąg geometryczny: $a_n = a_0q^n$, gdzie a_0 i q są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Liczbę q nazywamy ilorazem ciągu geometrycznego, bo gdy $q \neq 0$ jest równa ilorazowi dwóch kolejnych wyrazów ciągu. Liczba ludzi w kraju o stałym przyroście naturalnym zachowuje się jak ciąg geometryczny o ilorazie dosyć bliskim jedności — dodatni przyrost naturalny oznacza, że iloraz jest większy niż 1, zaś ujemny przyrost naturalny — że iloraz jest mniejszy niż 1. ■

Przykład 15.10 Jeszcze innym rodzajem ciągu jest ciąg arytmetyczny: $a_n = a_0 + nd$, gdzie a_0 oraz d oznaczają dowolne liczby rzeczywiste. Liczba d zwana jest różnicą ciągu arytmetycznego, jest ona równa różnicy dwóch kolejnych wyrazów ciągu. Na początku XIX wieku zaobserwowano, że ilość zboża zachowuje się jak wyraz ciągu arytmetycznego (n jest numerem roku). Oczywiście tego rodzaju obserwacje są przybliżone, bowiem co jakiś czas zdarzają się powodzie, susze i wtedy proces wzrostu ulega zakłóceniu. Bywają też zakłócenia innego rodzaju, np. w XIX zauważono, że stosowanie saletry chilijskiej (później nawozów azotowych) zwiększa w istotny sposób plony. Były też inne zakłócenia ,,naturalnego" tempa wzrostu ilości zbóż. ■

Przykład 15.11 W rękopisie z 1202 r Leonarda z Pizy, zwanego Fibonaccim, znajduje się następujące zadanie: Ile par królików może być spłodzonych przez parę płodnych królików i jej potomstwo w ciągu roku, jeśli każda para daje w ciągu miesiąca żywot jednej parze, para staje się płodna po miesiącu, króliki nie zdychają w ciągu tego roku. Jasne jest, że po miesiącu mamy już dwie pary przy czym jedna z nich jest płodna, a druga jeszcze nie. Wobec tego po dwóch miesiącach żyją już trzy pary królików: dwie płodne, jedna jeszcze nie. Po trzech miesiącach żyje już pięć par królików: trzy płodne, dwie jeszcze nie. Po czterech miesiącach jest już $8 = 5 + 3$ par królików. Kontynuując to postępowanie stwierdzamy po niezbyt długich obliczeniach, że po upływie roku żyje już $377 = 233 + 144$ par królików. Naturalnym problemem jest: znaleźć wzór na liczbę a_n, jeśli $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ i $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$ dla $n = 2, 3, 4, \ldots$. Wzór taki został znaleziony dopiero po kilkuset latach od napisania książki przez Fibonacci'ego i wygląda tak:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right).$$

Dowód prawdziwości tego wzoru jest prosty — łatwa indukcja. Jednak powstaje pytanie, jak można tego rodzaju hipotezę sformułować. Jest ono znacznie ważniejsze od dowodu prawdziwości tego wzoru, jednak na razie nie będziemy się tym zajmować. ■

Sumę, różnicę, iloczyn i iloraz dwóch ciągów określamy tak jak działania na funkcjach, tzn. sumą ciągów (a_n) i (b_n) jest ciąg, którego n–ty wyraz równy jest $a_n + b_n$. Różnicą ciągów (a_n) i (b_n) jest ciąg $a_n - b_n$, iloczynem — ciąg $(a_n b_n)$, ilorazem — ciąg $\frac{a_n}{b_n}$, jeśli dla każdego n zachodzi nierówność $b_n \neq 0$.

Definicja 15.2 (ciągów monotonicznych)

Ciąg (a_n) nazywamy niemalejącym (rosnącym) wtedy i tylko wtedy, gdy nierówność $a_n \leqslant a_{n+1}$ ($a_n < a_{n+1}$) zachodzi dla każdego numeru n. Podobnie ciąg nierosnący (malejący) to taki, że dla każdego numeru n zachodzi nierówność $a_n \geqslant a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$). Ciągi niemalejące i nierosnące mają wspólną nazwę: ciągi monotoniczne. Ciągi rosnące i malejące nazywamy ciągami ściśle monotonicznymi. ■

W niektórych podręcznikach stosowana jest nieco inna terminologia: ciągi niemalejące zwane są tam rosnącymi, a rosnące — ściśle rosnącymi. Jest obojętne, która z dwu koncepcji stosujemy, jeśli tylko robimy to konsekwentnie. Można też, dla uniknięcia nieporozumień, mówić o ciągach niemalejących i ściśle rosnących.

Ciąg geometryczny zaczynający się od wyrazu $a_1 = q$ jest monotoniczny w przypadku $q \geqslant 0$: dla $q = 0$ i dla $q = 1$ ciąg geometryczny jest stały, więc niemalejący i jednocześnie nierosnący. Jest malejący, gdy $0 < q < 1$, dla $q > 1$ jest rosnący. Ciąg arytmetyczny jest rosnący, gdy $d > 0$, malejący — gdy $d < 0$, stały (więc jednocześnie niemalejący i nierosnący), gdy $d = 0$.

Definicja 15.3 (ciągów ograniczonych)
Ciąg (a_n) jest ograniczony z góry wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista M, taka że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność: $a_n \leqslant M$. Analogicznie (a_n) jest ograniczony z dołu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista m taka, że dla każdego n zachodzi nierówność $a_n \geqslant m$. Ciąg ograniczony z góry i z dołu nazywamy ograniczonym. Ciągiem nieograniczonym nazywamy ciąg, który nie jest ograniczony. ■

Ciąg (n) jest ograniczony z dołu np. przez -13 lub 0, ale nie jest ograniczony z góry, więc jest nieograniczony. Ciąg $\left((-1)^n\right)$ jest ograniczony z góry np. przez 1 lub przez $\sqrt{1000}$ oraz z dołu, np. przez -1, ale również przez -13.

Stwierdzenie 15.4 Ciąg (a_n) jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba nieujemna M, taka że $|a_n| \leqslant M$ dla każdego n. ■

To oczywisty wniosek z definicji ciągu ograniczonego: M musi być tak duże, by liczba $-M$ była ograniczeniem dolnym ciągu (a_n) i jednocześnie liczba M — jego ograniczeniem, górnym.

Ciągi z pierwszych dwóch przykładów są rosnące, ciąg z trzeciego przykładu jest malejący, a ciąg z czwartego przykładu w ogóle nie jest monotoniczny, bowiem:

$$1 > 1 - \tfrac{1}{2} < 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} > 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\,.$$

Ciąg stały jest jednocześnie nierosnący i niemalejący. Ciąg pól wielokątów foremnych wpisanych w dane koło jest rosnący, co wymaga dowodu, który pozostawiamy Czytelnikowi. Ciąg rozpatrywany przez Zenona z Elei jest rosnący. Podobnie ciągu opisujący stan konta bankowego przy stałym oprocentowaniu (dodatnim).

Ciąg geometryczny zaczynający się od wyrazu dodatniego rośnie, gdy jego iloraz jest większy niż 1, maleje — gdy iloraz jest dodatni, ale mniejszy od 1. Jeśli $a_1 \neq 0$ i $q < 0$, to ciąg geometryczny o ilorazie q, zaczynający się od a_1 **nie** jest monotoniczny.

Ciągi (n) i (2^n) są ograniczone z dołu, a z góry nie. Ciąg $\frac{1}{n}$ jest ograniczony z góry przez 1 a z dołu przez 0.

Ciąg o wyrazie $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ jest ograniczony z góry przez liczbę 1, a z dołu przez liczbę $\frac{1}{2}$, co łatwo wynika z tego, że po odjęciu pewnej liczby dodajemy następną, ale mniejszą od odjętej. Łatwo więc widać, że w tym przypadku spełnione są nierówności: $a_1 > a_3 > a_4 > \ldots$, $a_2 < a_4 < a_6 < \ldots$ oraz $a_1 > a_2 < a_3 > a_4 < a_5 > \ldots$

Zdefiniujemy granicę ciągu — pojęcie wspomniane przy omawianiu paradoksu Zenona. Pojawią się od razu trzy przypadki.

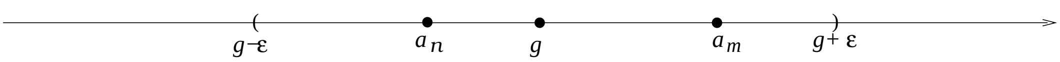
Definicja 15.5 (granicy ciągu)

a. Liczba g nazywana jest granicą ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba całkowita n_ε, taka że jeśli $n > n_\varepsilon$, to $|a_n - g| < \varepsilon$.

b. $+\infty$ (czytaj: plus nieskończoność) jest granicą ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby rzeczywistej M istnieje liczba całkowita n_m taka, że jeżeli $n > n_M$, to spełniona jest nierówność $a_n > M$.

c. $-\infty$ (czytaj: minus nieskończoność) jest granicą ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby rzeczywistej M istnieje liczba całkowita n_m taka, że jeśli $n > n_M$, to spełniona jest nierówność $a_n < M$.

Jeśli g jest granicą ciągu (a_n), skończoną lub nie, to piszemy $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ lub $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g$. Można też pisać $a_n \to g$, gdy $n \to \infty$ lub krótko $a_n \to g$. Mówimy, że ciąg jest zbieżny, jeśli jego granica jest skończona. ■



granica ciągu i jego wyrazy, gdy m,n są „duże”

Symbole $\pm\infty$ nie oznaczają liczb. Wprowadzamy je, by uprościć sposób mówienia o ciągach. Zakładamy oczywiście, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $-\infty < x < \infty$, ale to zdanie ją definiuje, bo ona z niczego nie wynika, gdyż symbole $\pm\infty$ dopiero wprowadziliśmy.

Umowa 15.6
Jeżeli jakaś własność przysługuje wszystkim wyrazom ciągu z wyjątkiem skończenie wielu, to mówimy, że przysługuje ona *prawie wszystkim* wyrazom ciągu lub, że zachodzi dla *dostatecznie dużych* numerów n. ■

Przyjąwszy tę umowę możemy wypowiedzieć definicję granicy ciągu tak: liczba g jest granicą ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$, dla prawie wszystkich liczb naturalnych n zachodzi nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$. Podobnie można wypowiedzieć definicję granicy w pozostałych przypadkach, co Czytelnik powinien zrobić samodzielnie.

O granicy skończonej ciągu można myśleć, że jest to liczba, którą każdy dostatecznie daleki wyraz ciągu (a_n) przybliża z dopuszczalnym (czyli mniejszym niż ε) błędem. Nie to jest całkiem precyzyjne, ale za to dosyć obrazowe sformułowanie.

Przykład 15.12 Ciąg stały jest zbieżny, dokładniej: jeśli $a_n = c$ dla wszystkich liczb naturalnych n, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$. ■

Przykład 15.13 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Udowodnimy tę równość. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Z zasady Archimedesa wynika, że istnieje liczba naturalna $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. Jeśli $n > n_\varepsilon$, to $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$, więc $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. ■

Przykład 15.14 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Mamy $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$. Jeśli więc $\varepsilon > 0$, to dla $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ i $n > n_\varepsilon$ mamy $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$. ■

Przykład 15.15 Jeśli $d > 0$, to $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} (a_0 + nd)$. Wykażemy tę równość. Jeśli $M \in \mathbb{R}$, $n_\varepsilon > \frac{M-a_0}{d}$ oraz $n > n_\varepsilon$, to $n > \frac{M-a_0}{d}$, zatem $a_n = a_0 + nd > M$, co uzasadnia prawdziwość równości, którą dowodzimy. ■

Twierdzenie 15.7 (o granicy ciągu geometrycznego)

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } |q| < 1; \\ 1 & \text{jeśli } q = 1; \\ +\infty & \text{jeśli } q > 1. \end{cases}$$

Jeśli $q \leqslant -1$, to ciąg (q^n) granicy nie ma.

Dowód. Wykażemy to twierdzenie. W przypadku $q = 0$ oraz $q = 1$ teza jest oczywista, bo ciąg jest stały (jego wyrazy nie zależą od numeru).

Załóżmy teraz, że $0 < |q| < 1$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie liczbą rzeczywistą. Jeśli $n_\varepsilon > \dfrac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\frac{1}{|q|} - 1}$ jest liczbą całkowitą i $n > n_\varepsilon$, to z nierówności Bernoulli'ego wynika, że

$$\frac{1}{|q|^n} = \left(1 + \left(\tfrac{1}{|q|} - 1\right)\right)^n \geqslant 1 + n(\tfrac{1}{|q|} - 1) > 1 + \tfrac{1}{\varepsilon} - 1 = \tfrac{1}{\varepsilon}\,.$$

Wobec tego dla $n > n_\varepsilon$ zachodzi nierówność $\frac{1}{|q|^n} > \frac{1}{\varepsilon}$, czyli $|q^n - 0| = |q^n| < \varepsilon$, a to oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Kolejny przypadek to $q > 1$. Mamy teraz

$$q^n = (1 + (q-1))^n \geqslant 1 + n(q-1)\,.$$

Jeśli więc $n > n_M$ i $n_M > \frac{M-1}{q-1}$, to $q^n > 1 + (M-1) = M$. Jasne jest więc, że $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

Pozostał przypadek ostatni: $q \leqslant -1$. Teraz mamy $q^n \leqslant -1$ dla każdej liczby całkowitej nieparzystej n oraz $q^n \geqslant 1$ dla każdej liczby całkowitej parzystej n. Gdyby ciąg miał skończoną granicę g, to jego wyrazy o dostatecznie dużych numerach leżałyby w odległości mniejszej niż 1 od granicy g — to natychmiastowa konsekwencja istnienia granicy skończonej. Jeśli jednak odległości q^n i q^{n+1} od granicy g są mniejsze od 1, to odległość między nimi jest mniejsza niż $1+1 = 2$, co oznacza, że $|q^n - q^{n+1}| < 2$. To nie jest możliwe, bo jedna z liczb q^n, q^{n+1} jest mniejsza lub równa -1, a druga — większa lub równa 1. Stąd zaś wynika, że odległość między q^n i q^{n+1} to co najmniej $1-(-1) = 2$.[15.2] Otrzymaliśmy sprzeczność, więc ciąg granicy skończonej nie ma.

[15.2] Można to rozumowanie zapisać wzorami: $2 \leqslant |q^n - q^{n+1}| \leqslant |q^n - g| + |g - q^{n+1}| < 1+1 = 2$ dla dostatecznie dużych n.

$+\infty$ granicą tego ciągu też nie jest, bowiem wtedy wyrazy ciągu o dostatecznie dużych numerach byłyby większe od 0 (przyjmujemy $M = 0$), a tak nie jest, bo te, których numery są *nieparzyste*, są ujemne.

$-\infty$ nie jest granicą tego ciągu, bo wyrazy o numerach *parzystych* są dodatnie, więc wyrazy o dostatecznie dużych numerach nie są ujemne (i w tym przypadku przyjmujemy $M = 0$).

Ciąg nie ma więc ani granicy skończonej, ani nieskończonej, co kończy badanie granicy ciągu geometrycznego. ■

Twierdzenie 15.8
Dla każdej liczby $a \in (0, \infty)$, zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Dowód. Załóżmy na razie, że $a \geqslant 1$. Niech ε będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Chcemy wykazać, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n zachodzi nierówność $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$, czyli że $1 - \varepsilon < \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$. Ponieważ $a \geqslant 1$, więc nierówność podwójna sprowadza się do nierówności $\sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$, czyli do nierówności $a < (1+\varepsilon)^n$, a ta wynika z nierówności $a < 1 + n\varepsilon$, bo $1 + n\varepsilon < (1+\varepsilon)^n$ — nierówność Bernoulli'ego. Wystarczy więc, by spełniona była nierówność $n_\varepsilon > \frac{a-1}{\varepsilon}$. To kończy dowód w przypadku $a \geqslant 1$.
Załóżmy teraz, że $0 < a < 1$ i $0 < \varepsilon < 1$. Mamy wykazać, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n spełniona jest nierówność $\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \varepsilon$, czyli że $1 - \varepsilon < \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$. Ponieważ $a < 1$, więc wystarczy dowieść, że nierówność $1 - \varepsilon < \sqrt[n]{a}$, czyli $(1-\varepsilon)^n < a$ dla prawie wszystkich n. To jednak wynika od razu z twierdzenia o granicy ciągu geometrycznego, bowiem $\lim\limits_{n\to\infty} (1-\varepsilon)^n = 0$. ■

Przykład 15.16 (Obliczanie pierwiastka kwadratowego)
Niech a i b oznaczają dowolne liczby rzeczywiste dodatnie. Zdefiniujemy ciąg (a_n) wzorami: $a_1 = b$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$. Wykażemy, że dla każdej liczby $b > 0$ zachodzi wzór $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{a}$.

Dowód. Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $a_n > 0$ — łatwiutka indukcja. Mamy również $a_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$, bowiem $a_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2a_n}(a_n^2 - 2a_n\sqrt{a} + a) =$

$=\frac{1}{2a_n}(a_n-\sqrt{a})^2 \geqslant 0$. Wobec tego dla każdego $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność $\frac{a}{a_n} \leqslant \sqrt{a}$ i wobec tego

$$0 \leqslant a_{n+1}-\sqrt{a} = \tfrac{1}{2}\big(a_n+\tfrac{a}{a_n}\big)-\sqrt{a} \leqslant$$
$$\leqslant \tfrac{1}{2}\big(a_n+\sqrt{a}\big)-\sqrt{a} = \tfrac{1}{2}(a_n-\sqrt{a}).$$

Z otrzymanej nierówności wynika, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność $0 \leqslant a_n-\sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2^{n-2}}\big(a_2-\sqrt{a}\big)$. Dowodzona teza wynika od razu z tego, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$ — twierdzenie o granicy ciągu geometrycznego. ■

Uwaga 15.9

Ciąg z poprzedniego przykładu jest ,,szybko" zbieżny do liczby $\sqrt{a}$ i dobrze nadaje się do obliczania pierwiastków kwadratowych. ■

Po przykładach kolej na kilka łatwych, ale bardzo ważnych stwierdzeń, często ułatwiających obliczanie granic.

Wprowadziliśmy wcześniej symbole $+\infty$ oraz ∞. **Zdefiniujemy** działania z ich użyciem (przypominamy, że $\pm\infty \notin \mathbb{R}$).

Definicja 15.10 (działań z użyciem symboli $\pm\infty$)

15.10.1 $-(+\infty)=-\infty$, $+(+\infty)=+\infty$, $-(-\infty)=+\infty$, $+(-\infty)=-\infty$.

15.10.2 $+\infty \pm a = \pm a + (+\infty) = +\infty$ dla każdej liczby rzeczywistej a.

15.10.3 $-\infty \pm a = \pm a + (-\infty) = -\infty$ dla każdej liczby rzeczywistej a.

15.10.4 $+\infty + (+\infty) = +\infty$, $-\infty + (-\infty) = -\infty$.

15.10.5 $+\infty - (-\infty) = +\infty$, $-\infty - (+\infty) = -\infty$.

15.10.6 $+\infty \cdot a = +\infty$ i $-\infty \cdot a = -\infty$ dla każdego $a > 0$.

15.10.7 $(+\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$.

15.10.9 $+\infty \cdot a = -\infty$ i $-\infty \cdot a = +\infty$ dla każdego $a < 0$.

15.10.9 $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej a.

15.10.10 $\frac{\pm\infty}{a} = \pm\infty \cdot \frac{1}{a}$ dla dowolnej liczby $a \neq 0$.

15.10.11 $a^{+\infty} = +\infty$, $a^{-\infty} = 0$ dla dowolnej liczby $a > 1$.

15.10.12 $a^{+\infty} = 0$ i $a^{-\infty} = +\infty$ dla dowolnej liczby $0 < a < 1$.

15.10.13 $-\infty < a < +\infty$ dla dowolnej liczby rzeczywistej a.

15.10.14 $-\infty < +\infty$. ■

Nie definiujemy symboli, których na tej liście nie ma, np. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0\cdot(\pm\infty)$, $1^{\pm\infty}$ i innych. Przyczyny, dla których nie wprowadzamy szerszej definicji, staną się jasne niebawem — okaże się, że nie ma sensownej drogi zdefiniowania tych *symboli nieoznaczonych.* Definiujemy je po to, by można było prosto sformułować twierdzenia o obliczaniu granic, które wkrótce udowodnimy.

Podamy teraz kilka twierdzeń, które ułatwiają obliczanie granic, ich szacowanie lub stwierdzanie ich istnienia. Potem pokażemy jak można je stosować.

Uwaga 15.11 (o zbieżności ciągu przeciwnego)

Ciąg (c_n) ma granicę wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(-c_n)$ ma granicę. Zachodzi wtedy równość $\lim\limits_{n\to\infty}(-c_n) = -\lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Zdanie to jest prawdziwe niezależnie od tego, czy granica jest skończona, czy nieskończona. Wynika to wprost z definicji granicy ciągu. ■

Twierdzenie 15.12 (o szacowaniu)

15.12.1 Jeśli $C < \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, to dla dostatecznie dużych numerów n spełniona jest nierówność $C < a_n$.

15.12.2 Jeśli $C > \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, to dla dostatecznie dużych numerów n spełniona jest nierówność $C > a_n$.

15.12.3 Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} b_n < \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, to $b_n < a_n$ dla dostatecznie dużych n.

15.12.4 Jeśli $b_n \leqslant a_n$ dla dostatecznie dużych n, to zachodzi nierówność $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Dowód. Zaczniemy od 15.12.1. Liczba C jest mniejsza od granicy ciągu (a_n). Wykażemy, że dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $C < a_n$. Załóżmy najpierw, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$. Ponieważ $-\infty < C$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > C$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Z definicji od razu wynika, że dla każdej liczby rzeczywistej M, w tym $M = C$ i dostatecznie dużych n, zachodzi nierówność $a_n > M$.

Przejdźmy do następnego przypadku: granica $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jest skończona. Niech $\varepsilon = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - C$. Z definicji od razu wynika, że dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $|a_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n| < \varepsilon$, więc $a_n > \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \varepsilon = C$.

W taki sam sposób dowodzimy 15.12.2 — zmieniamy jedynie kierunki części nierówności i zastępujemy symbol $+\infty$ przez $-\infty$.

Teraz załóżmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} b_n < \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Niezależnie od tego, czy granice są skończone, czy nieskończone, istnieje taka liczba C, że $\lim\limits_{n\to\infty} b_n < C < \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Na mocy już udowodnionej części twierdzenia dla dostatecznie dużych numerów n zachodzą nierówności $b_n < C$ oraz $C < a_n$. Z nich wynika od razu, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n mamy $b_n < a_n$, co kończy dowód własności 15.12.3.

Załóżmy, że dla dostatecznie dużych numerów n zachodzi nierówność $b_n \leqslant a_n$. Wykażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Jeśli ta nierówność nie jest spełniona, to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n > \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Stąd jednak wynika, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n zachodzi nierówność $b_n > a_n$, która przeczy założeniu. Zakończyliśmy dowód twierdzenia o szacowaniu. ■

Wniosek 15.13 (o jednoznaczności granicy)
Ciąg ma co najwyżej jedną granicę.

Dowód. Gdyby miał dwie np. $g_1 < g_2$, to wybrać moglibyśmy liczbę C leżącą między g_1 i g_2: $g_1 < C < g_2$. Wtedy dla dostatecznie dużych n byłoby jednocześnie $a_n < C$ (zob. 15.12.2) oraz $a_n > C$ (zob. 15.12.1), co oczywiście nie jest możliwe. ■

Wniosek 15.14 (o ograniczoności ciągu zbieżnego)
Jeśli granica $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jest skończona, to istnieją takie liczby rzeczywiste C, D, że nierówność $C < a_n < D$ zachodzi dla **wszystkich** n: liczba C ogranicza ciąg (a_n) z dołu, liczba D — z góry.

Dowód. Wykażemy, że ciąg zbieżny do granicy skończonej jest ograniczony z góry i z dołu. Niech c, d będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $c < \lim\limits_{n\to\infty} a_n < d$. Z twierdzenia o szacowaniu wynika, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n, powiedzmy większych od odpowiednio dobranej liczby m, zachodzi nierówność $c < a_n < d$. Wystarczy przyjąć, że C jest najmniejszą z liczb a_0, a_1, …, a_m, c, by dla **wszystkich** liczb naturalnych n było $C \leqslant a_n$. Podobnie przyjmujemy, że D jest największą z liczb a_0, a_1, …, a_m, d — wtedy $a_n \leqslant D$ dla **wszystkich** liczb naturalnych n. Dowód wniosku został zakończony. ■

Uwaga. 15.15 (o kłopotach z nieskończonością)
Ten dowód jest bardzo prosty. Proszę jednak zwrócić uwagę na to, że **spośród skończenie wielu liczb można zawsze wybrać najmniejszą** a spośród nieskończenie wielu już niekoniecznie, np. wśród liczb $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ najmniejszej nie ma! ■

Twierdzenie 15.16 (o arytmetycznych własnościach granicy)

15.16.1 Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ i określona jest ich suma, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ i zachodzi wzór: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

15.16.2 Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ i określona jest ich różnica, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ i zachodzi wzór: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

15.16.3 Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ i określony jest ich iloczyn, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)$ i zachodzi wzór: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

15.16.4 Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ i określony jest ich iloraz, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ i zachodzi wzór

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Dowód. Udowodnimy, że suma granic dwóch ciągów jest granicą sumy tych ciągów. Załóżmy, że $g_a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i $g_b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Należy rozważyć trzy przypadki: g_a, g_b są liczbami rzeczywistymi, g_a jest liczbą rzeczywistą zaś g_b jest symbolem nieskończonym, g_a, g_b są symbolami nieskończonymi tego samego znaku.

Rozpoczniemy od granic skończonych. Niech ε będzie dodatnią liczbą rzeczywistą i niech n'_ε będzie taką liczbą naturalną, że dla $n > n'_\varepsilon$ zachodzi nierówność $|a_n - g_a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Niech n''_ε będzie taką liczbą naturalną, że nierówność $|b_n - g_b| < \frac{\varepsilon}{2}$ zachodzi dla

$n > n''_\varepsilon$ i niech n_ε oznacza większą z liczb $n'_\varepsilon, n''_\varepsilon$. Wtedy dla $n > n_\varepsilon$ zachodzą obydwie nierówności, zatem

$$|a_n + b_n - (g_a + g_b)| \leqslant |a_n - g_a| + |b_n - g_b| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Znaczy to, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n (czyli $n > n_\varepsilon$) różnica $(a_n+b_n)-(g_a+g_b)$ ma wartość bezwzględną mniejszą niż ε. Oznacza to, że $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = g_a + g_b$. Dowód twierdzenia o granicy sumy ciągów w tym przypadku został zakończony.

Zajmiemy się teraz następnym przypadkiem: niech **liczba** g będzie granicą ciągu (a_n) i niech $+\infty = = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Wykażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$. Niech M będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Można znaleźć taką liczbę naturalną n''_{M-g+1}, że dla $n > n''_{M-g+1}$ zachodzi nierówność $b_n > M - g + 1$. Istnieje też taka liczba naturalna n'_1, że dla $n > n'_1$ zachodzi nierówność $|a_n - g| < 1$. Niech n_M będzie większą z liczb n''_{M-g+1} i n'_1. Dla $n > n_M$ zachodzą obie nierówności, więc

$$a_n + b_n = b_n + g + (a_n - g) \geqslant b_n + g - |a_n - g| >$$
$$> (M - g + 1) + g - 1 = M\,.$$

Wykazaliśmy, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n zachodzi nierówność $a_n + b_n > M$, więc $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$. Dowód został zakończony.

Jeśli więc ciąg (a_n) ma granicę skończoną i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, to na mocy poprzednio wykazanej części twierdzenia o granicy sumy ciąg $\big(-a_n + (-b_n)\big)$ ma granicę i zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty}(-a_n - b_n) = -\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty}(-b_n) = +\infty\,.$$

Z uwagi o granicy ciągu przeciwnego wynika, że istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ i $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) - \infty$. Dowód został zakończony.

Został jeszcze jeden przypadek: obie granice są równe $+\infty$ lub obie są równe $-\infty$. Z uwagi o zbieżności ciągu przeciwnego wynika, że udowodnić tezę, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Jeśli M jest dowolną liczbą rzeczywistą, to istnieją liczby naturalne $n'_{M/2}$ oraz $n''_{M/2}$ takie, że jeśli $n > n'_{M/2}$, to $a_n > \frac{M}{2}$, zaś jeśli $n > n''_{M/2}$, to $b_n > \frac{M}{2}$. Przyjmijmy, że n_M jest większą z liczb $n'_{M/2}$, $n''_{M/2}$ i $n > n_M$. Wtedy zachodzą obie nierówności i wobec tego $a_n + b_n > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M$. Oznacza to, że $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$. Dowód został zakończony.

Z uwagi o zbieżności ciągu przeciwnego i twierdzenia o granicy sumy (15.16.1) wynika twierdzenie o granicy różnicy (15.16.2).

Zajmiemy się teraz iloczynem. Podobnie jak poprzednio jest wiele przypadków, których liczbę można zredukować stosując uwagę o zbieżności ciągu przeciwnego do następujących: obie granice są skończone, obie granice są równe $+\infty$, jedna granica jest dodatnią liczbą rzeczywistą a druga jest nieskończona, np. $+\infty$.

Rozpoczniemy od rozpatrzenia granicy iloczynu dwóch ciągów mających skończone granice. Z twierdzenia o szacowaniu wynika, że każdy z tych ciągów jest ograniczony, więc istnieje taka liczba $K' > 0$, że $|a_n| \leqslant K'$ i istnieje też taka liczba $K'' > 0$, że $|b_n| < K''$ dla każdej liczby naturalnej n. Przyjmując, że K to większa z liczb K', K'' znajdujemy liczbę, której nie przekracza wartość bezwzględna żadnego wyrazu któregokolwiek z dwóch rozpatrywanych ciągów: $|a_n|, |b_n| \leqslant K$. Oznaczmy $g_a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $g_b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Z twierdzenia o szacowaniu wnioskujemy, że również $|g_a|, |g_b| \leqslant K$. Niech ε oznacza dowolną liczbę dodatnią. Istnieje wtedy taka liczba naturalna n_ε, że jeżeli $n > n_\varepsilon$, to $|a_n - g_a| < \frac{\varepsilon}{2K}$ i jednocześnie $|b_n - g_b| < \frac{\varepsilon}{2K}$. Wtedy

$$|a_n b_n - g_a g_b| = |(a_n - g_a)b_n + g_a(b_n - g_b)| \leqslant$$
$$\leqslant |a_n - g_a| \cdot |b_n| + |g_a| \cdot |b_n - g_b| < \frac{\varepsilon}{2K} \cdot K + K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon.$$

Udowodniliśmy więc, że dla dostatecznie dużych n odległość liczby $a_n b_n$ od liczby $g_a g_b$ jest mniejsza niż ε, co oznacza, że $g_a g_b = \lim\limits_{n\to\infty}\big(a_n \cdot b_n\big)$, a to właśnie było naszym celem.

Teraz zajmiemy się granicą iloczynu ciągów, z których jeden ma granicę skończoną i dodatnią, a drugi — granicę $+\infty$. Niech $g_a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ będzie liczbą dodatnią i niech $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Niech M będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Z definicji granicy wynika, że istnieje taka liczba naturalna n_M, że jeżeli $n > n_M$, to $a_n > \frac{1}{2}g_a > 0$ i $b_n > \frac{2|M|}{g_a} > 0$. Wtedy

$$a_n b_n > \frac{1}{2}g_a \frac{2|M|}{g_a} = |M| \geqslant M\,.$$

Dowód w tym przypadku został zakończony.

Rozpatrzymy teraz iloczyn dwóch ciągów (a_n) i (b_n) zakładając, że spełniona jest równość $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Jeśli M jest dowolną liczbą rzeczywistą, to istnieje liczba naturalna n_M, taka że dla $n > n_M$ zachodzą nierówności $a_n > 1+|M|$ i $b_M > 1+|M|$. Wtedy dla $n > n_M$ mamy

$$a_n b_n > (1+|M|)^2 > 2\cdot|M| \geqslant |M| \geqslant M\,,$$

co dowodzi równości $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$. Twierdzenie o granicy iloczynu ciągów zostało w ten sposób udowodnione.

Kolej na twierdzenie o granicy ilorazu. Znów zaczniemy od granic skończonych. Niech $g_a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i $0 \neq g_b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Wykażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{g_a}{g_b}$. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Z poczynionych założeń wynika, że istnieje taka liczba naturalna n_ε, że jeśli $n > n_\varepsilon$, to

$$|b_n| > \frac{|g_b|}{2}\,,\ \ |a_n - g_a| < \frac{\varepsilon\cdot|g_b|}{4}\,,\ \ \ |b_n - g_b| < \frac{\varepsilon\cdot|g_b|^2}{4(|g_a|+1)}\,.$$ [15.3]

Dla $n > n_\varepsilon$ mamy więc

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{g_a}{g_b}\right| = \frac{|a_n g_b - g_a b_n|}{|g_b b_n|} \leqslant \frac{|a_n g_b - g_a g_b| + |g_a g_b - g_a b_n|}{|g_b|^2/2} =$$

$$= \frac{2}{|g_b|}|a_n - g_a| + \frac{2|g_a|}{|g_b|^2}|g_b - b_n| < \varepsilon.$$

Udowodniliśmy tezę w przypadku granic skończonych. Jeżeli ciąg (b_n) ma granicę skończoną i różną od 0 oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, to ciąg $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ ma granicę skończoną i różną od 0 – wynika to z już udowodnionej części twierdzenia o granicy ilorazu. W tym przypadku można zastosować twierdzenie o granicy iloczynu ciągów:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = +\infty \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}\,.$$

Ten ostatni iloczyn jest oczywiście dobrze określony.

Został jeszcze jeden przypadek: granica ciągu (a_n) jest skończona, a granica ciągu (b_n) jest nieskończona. W tym przypadku

---

[15.3] Nie założyliśmy, że $g_a \neq 0$, więc w mianowniku umieściliśmy $|g_a|+1$.

ciąg (a_n) jest ograniczony, tzn. istnieje taka liczba $K > 0$, że dla każdego n zachodzi nierówność $|a_n| < K$. Jeśli $\varepsilon > 0$, to istnieje taka liczba naturalna n_ε, że jeśli $n > n_\varepsilon$, to $|b_n| > \frac{K}{\varepsilon}$. Wtedy $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$. Wykazaliśmy więc, że dla dostatecznie dużych n iloraz $\frac{a_n}{b_n}$ ma wartość bezwzględną mniejszą niż ε. Oznacza to, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie 15.17 (o trzech ciągach)
Jeśli $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ dla dostatecznie dużych n, ciągi (a_n) i (c_n) mają **równe** granice, to ciąg (b_n) też ma granicę i zachodzi wzór

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n .$$

Dowód. Wiemy, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n zachodzi nierówność podwójna $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ oraz że ciągi a_n i c_n mają wspólną granicę g. Mamy dowieść, że ta wspólna granice jest również granicą ciągu (b_n). Załóżmy najpierw, że granica g jest skończona. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą. Istnieje taka liczba naturalna n_ε, że jeśli $n > n_\varepsilon$, to $|a_n - g| < \varepsilon$ oraz $|c_n - g| < \varepsilon$. Wynika stąd, że $g - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < g + \varepsilon$, zatem $|b_n - g| < \varepsilon$. Udowodniliśmy więc, że $g = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Teraz możemy się zająć przypadkiem granicy nieskończonej. Jak zwykle wystarczy zająć się jedną z dwu nieskończoności, tym razem dla odmiany $g = -\infty$. Niech M będzie liczbą rzeczywistą. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$, więc istnieje taka liczba naturalna n_M, że dla $n > n_M$ zachodzi nierówność $b_n \leqslant c_n < M$, więc w szczególności $b_n < M$. Dowód został zakończony. ■

Uwaga 15.18 (o twierdzeniu o trzech ciągach)
Z dowodu wynika, że w przypadku granicy nieskończonej, np. równej $-\infty$, użycie jednego z dwóch zewnętrznych ciągów, w tym przypadku ciągu (a_n), jest zbędne. Prawdziwe jest twierdzenie:

jeśli dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $b_n \leqslant c_n$ i ciąg (c_n) ma granicę $-\infty$, to również ciąg (b_n) ma granicę $-\infty$ i analogicznie: jeśli dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność

$a_n \leqslant b_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, to również $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. ■

Uwaga 15.19 Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ istnieje, to istnieje też $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$ i zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. To stwierdzenie wynika od razu z definicji granicy, można użyć tej samej liczby n_ε lub n_M, jeśli granica jest nieskończona. ■

Definicja 15.20 (podciągu)
Jeśli (a_n) jest dowolnym ciągiem i $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, to ciąg a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, $\ldots$, czyli ciąg $(a_{n_m})_{m=1}^{\infty}$ nazywamy podciągiem ciągu (a_n). ■

Zachodzi bardzo przydatne i łatwe twierdzenie wiążące zbieżność ciągu ze zbieżnością jego podciągów.

Twierdzenie 15.21 (o podciągach)
$g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ jest granicą ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy jest granicą każdego jego podciągu.
Dowód. Ponieważ ciąg jest swoim podciągiem, więc ze zbieżności wszystkich podciągów ciągu (a_n) wynika natychmiast zbieżność ciągu (a_n).

Załóżmy teraz, że $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ i że numeracja wyrazów naszego ciągu zaczyna się od liczby 1. Wtedy spełnione są nierówności $n_1 \geqslant 1$, $n_2 \geqslant n_1 + 1 \geqslant 2$, $n_3 \geqslant n_2 + 1 \geqslant 3$ itd. Ogólnie $n_m \geqslant m$. Jeśli $\varepsilon > 0$, to istnieje taka liczba naturalna n_ε, że jeśli $n > n_\varepsilon$, to $|a_n - g| < \varepsilon$. W szczególności $|a_{n_m} - g| < \varepsilon$ dla $m > n_\varepsilon$, a stąd bez trudu wnioskujemy, że $\lim\limits_{m\to\infty} a_{n_m} = g$. Dowód został zakończony. ■

Przykład 15.17 Ciąg $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)$ nie ma granicy, bowiem $\lim\limits_{n\to\infty} \left((-1)^{2n} + \frac{1}{2n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1 \neq$

$$\neq -1 = \lim_{n\to\infty} \left(-1 + \tfrac{1}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left((-1)^{2n+1} + \tfrac{1}{2n+1}\right)$$

— wskazaliśmy dwa podciągi zbieżne do **różnych** granic. ■

Twierdzenie 15.22 (o granicy ciągu monotonicznego)
Każdy ciąg monotoniczny ma granicę; jeśli jest ograniczony, to

granica jest skończona.

Dowód. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że ciąg (a_n) jest niemalejący: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots$. Jeśli ten ciąg jest ograniczony z góry, to kres górny zbioru jego wyrazów jest skończony. Niech $g = \sup\{a_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$. Jeśli $\varepsilon > 0$, to istnieje taka liczba naturalna n_ε, że $g - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leqslant g$. Wtedy dla każdej liczby naturalnej $n > n_\varepsilon$ zachodzi nierówność $g - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leqslant a_n \leqslant g$. Wykazaliśmy, że wszystkie wyrazy ciągu o dostatecznie dużych numerach leżą w odległości mniejszej niż ε od g. Stąd i z definicji granicy ciągu wynika od razu, że $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Jeśli ciąg (a_n) nie jest ograniczony z góry, to dla każdej liczby rzeczywistej M istnieje taki numer n_M, że $a_{n_M} > M$. Wtedy dla $n > n_M$ zachodzi nierówność $a_n \geqslant a_{n_m} > M$, a to oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Dowód dla ciągu nierosnącego Czytelnik przeprowadzi sam lub skorzysta z tego, co już udowodniliśmy dla ciągu $(-a_n)$. ■

Przykład 15.18 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+7n-13}{5n^2-17n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+7/n-13/n^2}{5-17/n+1/n^2} =$
$\xlongequal[\text{ilorazu}]{\text{tw. o granicy}} \frac{\lim(1+7/n-13/n^2)}{\lim(5-17/n+1/n^2)} \xlongequal[\text{różnicy i iloczynu}]{\text{tw. o granicy sumy,}}$
$= \frac{1+7\cdot\lim(1/n)-13\cdot\lim(1/n)^2}{5-17\cdot\lim(1/n)+\lim(1/n)^2} = \frac{1+7\cdot 0-13\cdot 0^2}{5-17\cdot 0+)^1} = \frac{1}{5}$.

Przykład 15.19 Niech $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. Oczywiście spełniona jest nierówność $a_n < a_{n+1}$, czyli ciąg (a_n) jest ściśle rosnący. Ma więc granicę. Wykażemy, że jest ona skończona. Dla $n \geqslant 2$ mamy $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + {}$ $+ \frac{1}{(n-1)\cdot n} = 1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{n} < 2$. Wobec tego granica ta jest skończona i nie przekracza liczby 2. Znalezienie tej granicy to jednak problem zupełnie innej natury i na razie zajmować się nim nie będziemy. Czytelnik zechce wykazać, że granica jest mniejsza od liczby $\frac{7}{4}$ i zechce wskazać jeszcze mniejszą liczbę M dla której nierówność $a_n < M$ jest spełniona dla wszystkich liczb naturalnych n. ■

Przykład 15.20 Wykażemy jeszcze raz, że jeśli $a \geqslant 1$, to

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$. Zauważmy najpierw, że $\sqrt[n]{a}\geqslant\sqrt[n+1]{a}$ i $\sqrt[n]{a}\geqslant 1$ dla każdej liczby naturalnej n, więc badany ciąg jest nierosnący i ograniczony z dołu przez 1, zatem ma granicę g i $g\geqslant 1$. Każdy jego podciąg jest zbieżny do liczby g, m.in. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{a}=g$. Wobec tego $g=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[2n]{a}\right)^2=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{a}\right)^2=g^2$. Jeśli $g=g^2$, to $g=0$ lub $g=1$, co w połączeniu z nierównością $g\geqslant 1$ prowadzi do wniosku, że $g=1$. ■

W ostatnim przykładzie pokazaliśmy, jak można ominąć konkretne szacowania. Zastąpiliśmy je twierdzeniem, które gwarantuje istnienie granicy ciągu. Potem pojawiło się równanie, którego pierwiastkiem była granica. Tak postępujemy dosyć często.

Przykład 15.21 Niech $a>0$ i $b>0$ oznaczają liczby rzeczywiste. Niech $a_1=b$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)$. Z nierówności o średniej arytmetycznej i geometrycznej wnioskujemy, że dla każdego numeru n zachodzi $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)\geqslant\sqrt{a_n\cdot\frac{a}{a_n}}=\sqrt{a}$. Wobec tego dla każdego $n\geqslant 2$ zachodzi nierówność $a_n\geqslant\sqrt{a}$, więc również $a_n\geqslant\frac{a}{a_n}$. Stąd wynika, że $a_{n+1}\in\left[\frac{a}{a_n},a_n\right]$ — średnia dwu liczb leży między nimi. Stąd w szczególności wynika, że $a_{n+1}\leqslant a_n$ dla $n=2,3,\ldots$ Ciąg (a_n) ma więc granicę i to nie mniejszą niż $\sqrt{a}$. Niech $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=g$. Wtedy

$$g=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}==\lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{2}\left(a_n+\tfrac{a}{a_n}\right)=\tfrac{1}{2}\left(a_n+\tfrac{a}{a_n}\right)=\tfrac{1}{2}\left(g+\tfrac{1}{g}\right),$$

zatem $g=\frac{1}{2}\left(g+\frac{a}{g}\right)$, więc $\frac{1}{2}g=\frac{a}{2g}$, czyli $g^2=a$. Stąd i z nierówności $g\geqslant\sqrt{a}>0$, wynika, że $g=\sqrt{a}$. ■

Przykład 15.22 Zajmowaliśmy się już ciągiem, którego wyraz jest równy $e_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Wykażemy teraz, że dla każdej liczby rzeczywistej x ciąg ten jest niemalejący **od pewnego momentu**, mianowicie jeśli $n>-x$, to $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leqslant\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$. Potem wykażemy, że jest on ograniczony. Nierówność $n>-x$ równoważna jest nierówności $n+x>0$, z tej z kolei wynika, że $n+1+x>0$. Wobec tego $1+\frac{x}{n}=\frac{n+x}{n}>0$ i analogicznie $1+\frac{x}{n+1}>0$. Wobec tego jeśli $n > -x$, to liczby $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ i $\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$ są dodatnie, a wobec tego nierówność $e_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = e_{n+1}$ jest równoważna nierówności

$$\frac{1}{1+\frac{x}{n}} \leqslant \frac{(1+\frac{x}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{x}{n})^{n+1}} = \left(1+\frac{\frac{x}{n+1}-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} =$$

$$= \left(1+\frac{-x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}.$$

Teraz skorzystamy z nierówności Bernoulli'ego:

$$\left(1+\tfrac{-x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)\tfrac{-x}{(n+1)(n+x)} = \tfrac{n}{n+x} = \frac{1}{1+\frac{x}{n}}.$$

Skorzystać wolno, bo jeśli $n > -x$, to $\frac{-x}{(n+1)(n+x)} > -1$ — ta nierówność jest prawdziwa dla $x < 0$, bo wtedy licznik i mianownik są dodatnie, a gdy $x \geqslant 0$, to $0 \leqslant \frac{x}{n+x} < 1$. Wobec tego udowodniliśmy monotoniczność ciągu (e_n) od pewnego miejsca. Wynika stąd, że ma on granicę, choć być może nieskończoną. Jeśli $x \leqslant 0$, to dla $n > -x$ zachodzi nierówność $0 \leqslant 1+\frac{x}{n} \leqslant 1$, więc $0 \leqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant 1$. W tym przypadku ciąg jest ograniczony z góry przez liczbę 1, zatem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant 1$, a ponieważ ten ciąg od pewnego miejsca **rośnie** i ma dodatnie wyrazy, więc $0 < \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant 1$. Załóżmy teraz, że $x > 0$. Mamy więc

$$\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n = \frac{(1-\frac{x^2}{n^2})^n}{(1-\frac{x}{n})^n}.$$

Wykażemy, że istnieje skończona granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n$. Ponieważ $0 < \lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{x}{n})^n \leqslant 1$, więc z twierdzenia o granicy ilorazu wyniknie, że granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ jest skończona.

Jeśli $n > x > 0$, to $-\frac{x^2}{n^2} > -1$, więc

$$1 > \left(1-\tfrac{x^2}{n^2}\right)^n \geqslant 1+n\left(-\tfrac{x^2}{n^2}\right) = 1-\tfrac{x^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n = 1$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{x}{n})^n}$. ■

Podamy teraz bardzo ważną definicję.

Definicja 15.23 (liczby e)
$e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. ■

Uwaga 15.24 Ciąg o wyrazie $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest niemalejący [15.4], więc dla każdego naturalnego n zachodzi nierówność $e \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, np. $e \geqslant \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} = 2\frac{113}{256} > 2\frac{2}{5} = 2{,}4$. Z dwu równości $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$ i $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ wynika, że $e = \dfrac{1}{(1-\frac{1}{n})^n}$, przy czym z tego, że ciąg o wyrazie $(1-\frac{1}{n})^n$ jest niemalejący wynika, że ciąg o wyrazie $\dfrac{1}{(1-\frac{1}{n})^n}$ jest nierosnący, zatem dla każdej liczby $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność $e \leqslant \dfrac{1}{(1-\frac{1}{n})^n}$, np. $e \leqslant \dfrac{1}{(1-\frac{1}{6})^6} = \left(\frac{6}{5}\right)^6 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^6 = 1 + \frac{6}{5} + \frac{6\cdot5}{1\cdot2\cdot5^2} + \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot5^3} +$
$+ \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5^4} + \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot5^5} + \frac{1}{5^6} = 1 + \frac{6}{5} + \frac{6}{10} + \frac{4}{5^2} + + \frac{3}{5^3} + \frac{6}{5^5} + \frac{1}{5^6} =$
$= 1 + 1{,}2 + 0{,}6 + 0{,}16 + 0{,}024 + 0{,}00192 + 0{,}000064 = 2{,}985984$, więc wykazaliśmy, że $2,4 < e < 3$. Ten rezultat jest niedokładny. Można przekonać się, że $e \approx 2{,}718281828$, ale nie będziemy teraz przybliżać dokładniej, bo później osiągniemy lepsze wyniki znacznie mniejszym nakładem pracy. Dodajmy, że e nie jest liczbą wymierną (to wiedział już L.Euler, 1707-1783), o czym będziemy w stanie przekonać się wkrótce. Można też wykazać, że e to liczba przestępna, więc taka, która **nie** jest pierwiastkiem żadnego niezerowego wielomianu o współczynnikach całkowitych. Ostatnie stwierdzenie jest trudniejsze (C.Hermite, 1822 -1901). Liczba e jest jedną z najważniejszych w matematyce, występuje w wielu sytuacjach i nie sposób wyobrazić sobie matematyki bez niej. ■

Przykład 15.23 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$. Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $1 \leqslant \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$. Oszacujemy wyraz

[15.4] tyle udowodniliśmy, ale później okaże się, że jest ściśle rosnący.

ciągu z góry. Zastosujemy nierówność Bernoulliego. Mamy

$$1 < \left(1+\tfrac{1}{n^2}\right)^n = \frac{1}{(1-\frac{1}{n^2+1})^n} \leqslant \frac{1}{1-\frac{n}{n^2+1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{n+\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\,.$$

Obiecana teza wynika z twierdzenia o trzech ciągach. ■

Przykład 15.24 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n$ dla dowolnych liczb $x,y\in\mathbb{R}$. Udowodnimy ten wzór. Niech $n > 2|x|+2|y|$. Wtedy liczby $1+\frac{x}{n}$, $1+\frac{y}{n}$ i $1+\frac{x+y}{n}$, są dodatnie. Wystarczy udowodnić, że $1 = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\frac{x}{n})^n(1+\frac{y}{n})^n}{(1+\frac{x+y}{n})^n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n$. Z nierówności $n > 2|x|+2|y|$ wynika, że $1+\frac{x+y}{n} > \frac{1}{2}$ i $\left|\frac{xy}{n^2}\right| < \frac{1}{4}$, zatem $\left|\dfrac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right| < \dfrac{1}{2}$. Z nierówności Bernoulli'ego wynika, że

$$\left(1+\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n \geqslant 1+n\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}} = 1+\frac{\frac{xy}{n}}{1+\frac{x+y}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\,.$$

Mamy też $\left|\dfrac{\frac{xy}{n^2}}{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})}\right| < \dfrac{\frac{1}{2^2}}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})} = 1$, zatem

$$\frac{(1+\frac{x+y}{n})^n}{(1+\frac{x}{n})^n(1+\frac{y}{n})^n} = \left(1-\frac{\frac{xy}{n^2}}{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})}\right)^n \geqslant$$

$$\geqslant 1-\frac{\frac{xy}{n}}{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\,.$$

Wobec tego zachodzi nierówność:

$$1+\frac{\frac{xy}{n}}{1+\frac{x+y}{n}} \leqslant \frac{(1+\frac{x}{n})^n(1+\frac{y}{n})^n}{(1+\frac{x+y}{n})^n} \leqslant \frac{1}{1-\frac{\frac{xy}{n}}{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})}}\,.$$

Z niej i twierdzenia o trzech ciągach wynika, że zachodzi równość $1 = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\frac{x}{n})^n(1+\frac{y}{n})^n}{(1+\frac{x+y}{n})^n}$, a z niej — dowodzona teza. ■

Lemat 15.25
Jeśli $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ i mianowniki b,d mają ten sam znak, to zachodzi nierówność $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Dowód. Mnożąc nierówność $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ przez liczbę $bd > 0$ otrzymujemy nierówność równoważną wyjściowej: $ad < bc$. Mnożąc nierówność $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$ przez liczbę $b(b+d) > 0$ otrzymujemy: $a(b+d) < b(a+c)$, a po redukcji $ad < bc$, co kończy dowód lewej nierówności. Tak samo dowodzimy, że prawa jest prawdziwa. ■

Uwaga 15.26 $\frac{a+c}{b+d} = \frac{b}{b+d} \cdot \frac{a}{b} + \frac{d}{b+d} \cdot \frac{c}{d}$, więc liczba $\frac{a+c}{b+d}$ jest *średnią ważoną* liczb $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ z wagami $\frac{b}{b+d}$ i $\frac{d}{b+d}$. Wagi to nieujemne liczby o sumie 1. W tym przypadku pojawiły się dwie, ale ogólnie może być ich więcej.

Niech $p_1 > 0, p_2 > 0, \ldots, p_n > 0$, $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ i $n \geqslant 2$. Czytelnik udowodni, że jeśli wśród liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są co najmniej dwie różne, to
$\min(x_1,x_2,\ldots,x_n) < p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n < \max(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Oznacza to, że średnia ważona n liczb leży między najmniejszą i największą z nich. ■

Teraz zajmiemy się twierdzeniem, które dosyć rzadko jest formułowane w początkowej fazie nauki o ciągach.

Twierdzenie 15.27 (Stolza)
Załóżmy, że wszystkie wyrazy ciągu (b_n) są różne od 0, że jest on ściśle monotoniczny oraz że istnieje granica $g = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.
Jeśli spełniony jest jeden z warunków:
15.27.1 ciąg (b_n) ma granicę nieskończoną,
15.27.2 ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne do 0,
to ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ ma granicę i zachodzi równość:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = g\,.$$

Dowód. Bez straty ogólności rozważań można przyjąć, że ciąg (b_n) jest ściśle rosnący, bo można go zastąpić ciągiem $(-b_n)$. Niech m i M będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $m < g < M$; jeśli $g = -\infty$, to rozważamy tylko M, gdy $g = +\infty$ — tylko m. Dla dowodu tezy wystarczy wykazać, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n zachodzi nierówność $m < \frac{a_n}{b_n} < M$.

Niech m' i M' będą takimi liczbami rzeczywistymi, że
$$m < m' < g < M' < M\,.$$
Ponieważ granicą ciągu $\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right)$ jest g, więc istnieje taka liczba naturalna n_0, że dla każdej liczby naturalnej $n > n_0$ i dowolnej liczby naturalnej k zachodzą nierówności:
$$m' < \tfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} < M'$$
$$m' < \tfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{b_{n+2}-b_{n+1}} < M'$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$m' < \tfrac{a_{n+k}-a_{n+k-1}}{b_{n+k}-b_{n+k-1}} < M'$$

Ciąg (b_n) jest ściśle rosnący, więc $b_{j+1} - b_j > 0$ dla dowolnego numeru j. Z lematu 15.26 i pierwszych dwu nierówności wynika, że liczba $\frac{a_{n+2}-a_n}{b_{n+2}-b_n} = \frac{(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)}{(b_{n+2}-b_{n+1})+(b_{n+1}-b_n)}$ leży między liczbami $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ i $\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{b_{n+2}-b_{n+1}}$, a ponieważ te leżą między liczbami m' i M', więc spełniona jest nierówność
$$m' < \tfrac{a_{n+2}-a_n}{b_{n+2}-b_n} < M'\,.$$
W ten sam sposób wynika nierówność
$$m' < \tfrac{a_{n+3}-a_{n+2}}{b_{n+3}-b_{n+2}} < M'\,.$$
Z otrzymanych nierówności wynika następna:
$$m' < \tfrac{a_{n+3}-a_n}{b_{n+3}-b_n} < M'\,.$$
Prosta indukcja kończy dowód nierówności
$$m' < \tfrac{a_{n+k}-a_n}{b_{n+k}-b_n} < M'\,.$$
Skorzystawszy z założenia (**15.27.2**) i twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy ciągu stwierdzamy, że dla każdego numeru n zachodzi równość
$$\lim_{k\to\infty} \tfrac{a_{n+k}-a_n}{b_{n+k}-b_n} = \tfrac{-a_n}{-b_n} = \tfrac{a_n}{b_n}\,.$$
Z niej i z twierdzenia o szacowaniu wynika, że dla każdego $n > n_0$ zachodzi nierówność
$$m < m' \leqslant \tfrac{a_n}{b_n} \leqslant M' < M\,,$$
a to oznacza, że zakończyliśmy dowód twierdzenia przy założeniu (**15.27.2**).

Skorzystamy teraz z założenia (**15.27.1**). Nierówność

$$m' < \tfrac{a_{n+k}-a_n}{b_{n+k}-b_n} < M'$$

możemy przepisać w postaci

$$m' < \frac{\frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} - \frac{a_n}{b_{n+k}}}{1 - \frac{b_n}{b_{n+k}}} < M' \ .$$

Ta nierówność jest równoważna następującej (przyp. $b_{n+k} > b_n$)

$$m'\big(1 - \tfrac{b_n}{b_{n+k}}\big) + \tfrac{a_n}{b_{n+k}} < \tfrac{a_{n+k}}{b_{n+k}} < M'\big(1 - \tfrac{b_n}{b_{n+k}}\big) + \tfrac{a_n}{b_{n+k}} \ .$$

Niech $n = n_0 + 1$. Ponieważ $\lim_{k\to\infty} m'\big(1 - \frac{b_n}{b_{n+k}}\big) + \frac{a_n}{b_{n+k}} = m'$ i $m < m'$, więc istnieje taka liczba k_0, że dla $k > k_0$ zachodzi nierówność $m'\big(1-\frac{b_n}{b_{n+k}}\big)+\frac{a_n}{b_{n+k}} > m$. Podobnie istnieje taka liczba k_1, że dla $k > k_1$ mamy $M'\big(1 - \frac{b_n}{b_{n+k}}\big) + \frac{a_n}{b_{n+k}} < M$. Wobec tego jeśli $k > \max(k_0, k_1)$, to zachodzi nierówność podwójna

$$m < \frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} < M \ .$$

Ta obserwacja kończy dowód twierdzenia. ■

Przykład 15.25 Znajdziemy granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^7+2^+\cdots+n^7}{n^8}$. Oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty} n^8 = \infty$. Ciąg (n^8) jest ściśle rosnący. Można więc spróbować użyć twierdzenie Stolza. Niech $a_n = 1^7 + 2^+ \cdots + n^7$, $b_n = n^8$. Mamy $a_{n+1}-a_n = (n+1)^7$ i $b_{n+1}-b_n = (n+1)^8-n^8 = {=}8n^7 + 28n^6 + 56n^5 + 70n^4 + 56n^3 + 28n^2 + 8n + 1$. Wobec tego mamy $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{(n+1)^7}{8n^7+28n^6+56n^5+70n^4+56n^3+28n^2+8n+1}$, zatem

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^7}{8 + \frac{28}{n} + \frac{56}{n^2} + \frac{70}{n^3} + \frac{56}{n^4} + \frac{28}{n^5} + \frac{8}{n^6} + \frac{1}{n^7}} \ .$$

Z tej równości i twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy wynika natychmiast, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{1}{8}$ i wobec tego z twierdzenia Stolza wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1^7+2^+\cdots+n^7}{n^8} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{8} \ . \qquad ■$$

W ostatnim przykładzie pokazaliśmy, jak można wykorzystać twierdzenie Stolza w typowy sposób. To ważne i skuteczne twierdzenie. Z jego siłą zapoznać się można stosując je w różnych zadaniach. Podamy jeszcze jeden przykład, w zasadzie bezsensowny.

Przykład 15.26 Na maturze rozszerzonej w 2005 r pojawiło się zadanie: znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4+7+\cdots+3n-2}{5+7+9+\cdots+2n+3}$. Można je rozwiązać stwierdzając, że $1+4+7+\cdots+3n-2=\frac{n(3n-1)}{2}$ oraz $5+7+9+\cdots+2n+3=n(n+4)$, a następnie stosując twierdzenie o arytmetycznych własnościach granicy ciągu. Wynik to $\frac{3}{2}$.

Jednak co najmniej jeden z maturzystów napisał coś takiego:
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4+7+\cdots+3n-2}{5+7+9+\cdots+2n+3}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-2/n}{2+3/n}=\frac{3-0}{2+0}=\frac{3}{2}$.
Symbol $\frac{\infty}{\infty}$ ludziom obeznanym z twierdzeniem Stolza i z regułą de l'Hospitala, o której będziemy jeszcze mówić, sugeruje, że autor ma na myśli jedno z tych twierdzeń, w tym przypadku może to być tylko twierdzenie Stolza. Niestety to tylko hipoteza i w rzeczywistości nie wiadomo, co uczeń miał na myśli, może napisał tę równość nie myśląc w ogóle o uzasadnieniu. Ułatwiłby pracę sprawdzającym, gdyby napisał coś w rodzaju: z twierdzenia Stolza wynika, że ... Autor tej książeczki przypuszcza, że jednak rozwiązanie zostało uznane, chociaż równie dobrze można było uznać, że brak wyjaśnień uniemożliwia stwierdzenie, że zdający wiedział, jakim twierdzeniem (niezbyt popularnym w szkołach) się posłużył i uznać zadanie za nierozwiązane! Redagując rozwiązanie zadania lub problemu należy trochę myśleć o tych, którym przyjdzie tekst przeczytać i dać im szanse zrozumienia pamiętając o tym, że każdy myśli ,,po swojemu". ■

Twierdzenie 15.28 (o podciągach monotonicznych)
Z każdego ciągu liczbowego można wybrać podciąg monotoniczny.

Dowód. Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Możliwe są dwa przypadki:
1° każdy podciąg ciągu (a_n) zawiera największy wyraz, tzn. taki wyraz a_{n_0}, że dla każdego k zachodzi nierówność $a_{n_k}\leqslant a_{n_0}$;
2° istnieje podciąg, który nie zawiera największego wyrazu.

Pokażemy, że w pierwszym przypadku można z ciągu wybrać podciąg nierosnący, a w drugim — ściśle rosnący.
Rozpatrujemy pierwszą możliwość. Niech n_1 będzie najmniejszą liczbą naturalną, dla której a_{n_1} jest największym

wyrazem ciągu (a_n). Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już liczby $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ i to tak, że jeśli $m > n_j$, to $a_m \leqslant a_{n_j}$ Niech $a_{n_{k+1}}$ będzie największym spośród wyrazów następującego podciągu ciągu (a_n): a_{n_k+1}, a_{n_k+2}, a_{n_k+3}, ... Jasne jest, że $a_{n_{k+1}} \leqslant a_{n_k}$ oraz że $a_m \leqslant a_{n_{k+1}}$ dla $m \geqslant n_{k+1}$. Zdefiniowaliśmy więc podciąg nierosnący ciągu (a_n).

Kolej na drugi przypadek. Aby nie komplikować oznaczeń założymy, że w ciągu (a_n) nie ma największego wyrazu — z ciągu (a_n) można wybrać podciąg o tej własności i oznaczyć go przez (a_n). Niech $n_1 = 1$. a_{n_1} nie jest największym wyrazem ciągu (a_n), więc istnieje wyraz od niego większy. Niech n_2 będzie najmniejszą liczbą naturalną, dla której zachodzi nierówność $a_{n_1} < a_{n_2}$. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już w taki sposób numery $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, że zachodzą nierówności $a_{n_1} < a_{n_2} < \ldots < a_{n_k}$. a_{n_k} nie jest największym wyrazem ciągu $a_{n_k}, a_{n_k+1}, a_{n_k+2}, \ldots$, bo wtedy liczba $\max(a_1, a_2, \ldots, a_{n_k})$ byłaby największym wyrazem ciągu (a_n). Niech n_{k+1} będzie najmniejszą taką liczbą naturalną, dla której spełnione są obie nierówności $n_{k+1} > n_k$ i $a_{n_{k+1}} > a_{n_k}$. Jasne jest, że zdefiniowaliśmy indukcyjnie ściśle rosnący podciąg ciągu (a_n). ■

Czytelnik zauważy, że w tym rozumowaniu korzystaliśmy wyłącznie w własności nierówności, innych własności liczb rzeczywistych nie wykorzystaliśmy wcale. Można więc rozpatrywać zamiast ciągów liczb rzeczywistych ciągi elementów pewnego zbioru, które umiemy porównywać, przy czym nierówność jest przechodnia itd. Mogą to być np. ciągi zbiorów, jeśli przyjmiemy, że nierównością jest zawieranie: $A \subseteq B$ zamiast $a \leqslant b$ dla liczb rzeczywistych. Prawdziwe jest wobec tego stwierdzenie: z każdego ciągu zbiorów (A_n) można wybrać taki podciąg (A_{n_k}), że $A_{n_1} \subseteq A_{n_2} \subseteq A_{n_3} \subseteq x \ldots$ albo (A_{n_k}), że $A_{n_1} \supseteq A_{n_2} \supseteq A_{n_3} \supseteq \ldots$

Teraz udowodnimy bardzo ważne twierdzenie, z którego później przyjdzie nam wielokrotnie korzystać.

Twierdzenie 15.29 (Bolzano–Weiestrassa)
Z każdego ciągu liczb rzeczywistych można wybrać podciąg, który

ma granicę; z ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny do granicy skończonej.

Dowód. Z ciągu (a_n) wybieramy podciąg monotoniczny (poprzednie twierdzenie). Ma on granicę, co jest treścią twierdzenia o granicy ciągu monotonicznego. ■

Jak widać cała praca została wykonana wcześniej. Dodajmy, że na ogół podawany jest nieco inny dowód tego twierdzenia. Naszkicujemy go teraz w przypadku ciągu ograniczonego. Załóżmy, że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) leżą w przedziale $P = [-m, m]$. Co najmniej jedna z jego połówek (dalej oznaczona przez P_1), zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu, tj. istnieje nieskończenie wiele takich numerów n, że $a_n \in P_1$. Przyjmujemy $P_1 = [b_1, c_1]$. Niech $P_2 = [b_2, c_2]$ oznacza tę połówkę przedziału P_1, która zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Kontynuujemy definiowanie kolejnych połówek. W wyniku otrzymujemy ciąg przedziałów $P_1 = [b_1, c_1] \supseteq P_2 = [b_2, c_2] \supseteq P_3 = [b_3, c_3] \supseteq \ldots$
Wynika stąd, że ciąg (b_n) jest niemalejący, a ciąg (c_n) — nierosnący. Mają więc one granice, przy czym $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. W rzeczywistości granice te są równe, bo $c_n - b_n = \frac{m}{2^{n+1}}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m}{2^{n+1}} = 0$. Wybieramy teraz podciąg (a_{n_k}) tak, by $a_{n_j} \in P_j$ oraz $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ Ten podciąg jest zbieżny na mocy twierdzenia o trzech ciągach: $b_k \leqslant a_{n_k} \leqslant c_k$.

W przypadku ciągu nieograniczonego teza jest oczywista.

Możemy teraz zająć się tak zwanym warunkiem Cauchy'ego.

Definicja 15.30 (ciągu Cauchy'ego)
(a_n) jest ciągiem Cauchy'ego (lub: spełnia warunek Cauchy'ego) wtedy i tylko wtedy, gdy
dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna n_ε, że jeśli $m, k > n_\varepsilon$, to $|a_m - a_k| < \varepsilon$. ■

Mówiąc niedokładnie ciąg spełnia warunek Cauchy'ego jeśli odległości między wyrazami o dużych numerach są bardzo małe.

W istocie rzeczy dowód tego, że ciąg geometryczny o ilorazie $q \leqslant -1$ nie ma granicy skończonej polegał na wykazaniu, że nie spełnia on warunku Cauchy'ego.

Twierdzenie 15.31 (Cauchy'ego)
Ciąg jest zbieżny (czyli ma skończoną granicę) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego.

Dowód. Załóżmy najpierw, że ciąg ma skończoną granicę g. Niech $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje taka liczba n_ε, że jeśli $k, m > n_\varepsilon$, to $|a_m - g| < \frac{\varepsilon}{2}$ i $|a_k - g| < \frac{\varepsilon}{2}$. Spełnione są wtedy nierówności $|a_m - a_k| = |a_m - g + g - a_k| \leqslant |a_m - g| + |g - a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Załóżmy, że ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots$ spełnia warunek Cauchy'ego. Istnieje wtedy n_1 takie, że dla $k, m > n_1$ mamy $|a_k - a_m| < 1$. Niech $m = n_1 + 1$. Wtedy $|a_k| - |a_m| \leqslant |a_k - a_m| < 1$, zatem $|a_k| \leqslant 1 + |a_m|$ dla wszystkich dostatecznie dużych k. Oznacza to, że ciąg (a_n) jest ograniczony. Wybierzmy z ciągu (a_n) podciąg zbieżny $\left(a_{n_j}\right)$. Niech g oznacza jego granicę. Wykażemy, że g jest granicą całego ciągu. Jeśli $\varepsilon > 0$, to dla dostatecznie dużych k, m zachodzą nierówności $|a_k - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ i $|a_{n_j} - g| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ponieważ m, k, j są wybierane dowolnie, byle były dostatecznie duże, i $n_m \geqslant m$, więc można wybrać je tak, by $m = n_j$. Wtedy dla dostatecznie dużego k mamy

$$|a_k - g| \leqslant |a_k - a_m| + |a_m - g| = |a_k - a_m| + |a_{n_j} - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

co oznacza, że $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. ■

Uwaga 15.32 Czytelnik może nieco zdziwić się, bo z twierdzenia Cauchy'ego wynika, że ciągi Cauchy'ego to ciągi zbieżne. Nadaliśmy więc tym ciągom dwie nazwy. Obie są używane, bo w nieco ogólniejszej sytuacji, gdy zamiast liczb rzeczywistych rozważana jest dowolna przestrzeń metryczna, równoważności na ogół nie ma — pojęcie ciągu Cauchy'ego jest nieco ogólniejsze niż pojęcie ciągu zbieżnego: zdarzają się przestrzenie metryczne, w których niektóre ciągi Cauchy'ego nie mają granicy. ■

Twierdzenie 15.33
Ciąg ma granicę wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego podciąg ma granicę.

Dowód. Jeśli ciąg ma granicę, to jest ona granicą wszystkich jego podciągów bez względu na to, czy jest skończona, czy nie. Drugie wynikanie jest jeszcze prostsze: ciąg jest swoim podciągiem. ■

Twierdzenie 15.34
Z ciągu, który nie ma granicy, można wybrać dwa podciągi, które mają różne granice.

Dowód. Niech g będzie granicą jednego z podciągów. Ponieważ $g \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, więc istnieje taka liczba $M > g$, że dla nieskończenie wielu numerów n zachodzi nierówność $a_n > M$ albo taka liczba $m < g$, że dla nieskończenie wielu numerów n spełniona jest nierówność $a_n < m$. W pierwszym przypadku możemy wybrać z ciągu (a_n) podciąg (a_{n_k}) o wyrazach większych niż M, który ma granicę g_1. Zachodzi więc nierówność $g_1 = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \geqslant M > g$. W drugim przypadku możemy wybrać podciąg (a_{n_l}) o wyrazach mniejszych niż m, który ma granicę g_2, więc o $g_2 \leqslant m < g$. Dowód został zakończony. ■

Przykład 15.27 Niech $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$. Wykażemy, że ciąg (a_n) ma skończoną granicę. Niech $m > k$. Wówczas $|a_m - a_k| = \left|\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \cdots + (-1)^{m-k+1} \cdot \frac{1}{m}\right| = {}$ $= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \cdots + (-1)^{m-k+1} \cdot \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{k+1}$ — wynika to od razu z nierówności: $-\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} < 0$, $-\frac{1}{k+4} + \frac{1}{k+5} < 0$ itd. oraz nierówności $\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} > 0$, $\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4} > 0$, itd. Wynika stąd, że jeśli $k > \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ i $m > k$, to $|a_m - a_k| < \varepsilon$, a to oznacza, że ciąg (a_n) spełnia warunek Cauchy'ego, więc jest zbieżny. ■

Przykład 15.28 Niech $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$. Oczywiście dla każdego numeru n zachodzi nierówność $a_n < a_{n+1}$, a to oznacza, że ciąg (A_n) jest ściśle rosnący. Jako ściśle monotoniczny ma granicę. Wykażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Gdyby tak nie było to ciąg spełniałby warunek Cauchy'ego. Dla $n > 1$ mamy jednak

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\,.$$

Wobec tego warunek Cauchy'ego spełniony nie jest, np. jeżeli $\varepsilon = \frac{1}{2}$, to nie można znaleźć takiej liczby n_ε, że jeśli $m, k > n_\varepsilon$, to $|a_m - a_k| < \frac{1}{2} = \varepsilon$. ■.

Przykład 15.29 Przyjmijmy, że dla $n \geqslant 1$ zachodzi równość $a_n = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + (-1)^{\lceil\sqrt{n}\rceil} \frac{1}{n}$.

Wykażemy, że ciąg (a_n) ma skończoną granicę. Mamy: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 > a_5 > \ldots > a_9 < a_{10} < \ldots < a_{16} > a_{17} > > a_{18} > \ldots > a_{25} < a_{26} < \ldots$ Wynika stąd, że aby wykazać, że ciąg (a_n) jest ciągiem Cauchy'ego, wystarczy wykazać, że ciąg (a_{n^2}) spełnia warunek Cauchy'ego.

Niech $k > 1$ będzie liczbą naturalną. Mamy wtedy:

$$\frac{2}{k} = \frac{k-1}{k^2-k} + \frac{k}{k^2} < \underbrace{\frac{1}{(k-1)^2+1} + \cdots + \frac{1}{k^2-k}}_{k-1 \text{ składników}} + \underbrace{\frac{1}{k^2-k+1} + \cdots + \frac{1}{k^2}}_{k \text{ składników}} <$$

$$< \frac{k-1}{(k-1)^2+1} + \frac{k}{k^2-k+1} < \frac{k-1}{(k-1)^2} + \frac{k}{k^2-k} = \frac{2}{k-1}\,.$$

Niech $s_k = \frac{1}{(k-1)^2+1} + \cdots + \frac{1}{k^2-k} + \frac{1}{k^2-k+1} + \cdots + \frac{1}{k^2}$. Wiemy już, że $\frac{2}{k} < s_k < \frac{2}{k-1}$ dla każdej liczby naturalnej $k > 1$. Mamy więc

$$0 = \frac{2}{k} - \frac{2}{k} < s_k - s_{k+1} < \frac{2}{k-1} - \frac{2}{k+1}\,,$$

$$\frac{2}{k+2} = 0 + \frac{2}{k+2} < s_k - s_{k+1} + s_{k+2} < \frac{2}{k-1} - \frac{2}{k+1} + \frac{2}{k+1} = \frac{2}{k-1}\,,$$

$$0 = \frac{2}{k+2} - \frac{2}{k+2} < s_k - s_{k+1} + s_{k+2} - s_{k+3} < \frac{2}{k-1} - \frac{2}{k+3}\,.$$

Te oszacowania można kontynuować (indukcja). W wyniku dla dowolnej liczby naturalnej ℓ otrzymujemy następujące nierówności:

$$0 < s_k - s_{k+1} + s_{k+2} - s_{k+3} + \cdots + (-1)^\ell s_{k+\ell} < \frac{2}{k-1}\,.$$

Zauważmy, że $a_{n^2} = -s_1 + s_2 - s_3 + \cdots + (-1)^n s_n$. Niech m i $n > m$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy

$a_{n^2} - a_{m^2} = s_{m+1} - s_{m+2} + s_{m+3} - s_{m+4} + \cdots + (-1)^{n-m+1} s_n$,

zatem $\quad |a_{n^2} - a_{m^2}| = s_{m+1} - s_{m+2} + \cdots + (-1)^{n-m+1} s_n < \frac{2}{m}$.

Załóżmy, że $\varepsilon > 0$ i $m > \frac{2}{\varepsilon}$. Wtedy spełniona jest nierówność $|a_{n^2} - a_{m^2}| < \varepsilon$, a to oznacza, że ciąg (a_{n^2}) spełnia warunek Cauchy'ego, zatem jest zbieżny. ■

Twierdzenie 15.35 (o ciągłości funkcji $\sqrt[k]{}$)
Jeśli $a_n \geqslant 0$ dla każdej liczby naturalnej n i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, to dla każdej liczby naturalnej k zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{g}$. Jeśli k jest liczbą nieparzystą, to teza jest prawdziwa bez założenia nieujemności wyrazów ciągu (a_n).

Dowód. Załóżmy, że twierdzenie nie jest prawdziwe. Wtedy z ciągu $(\sqrt[k]{a_n})$ można wybrać podciąg (a_{n_m}), który ma granicę $a \neq \sqrt[k]{g} \geqslant 0$. Z twierdzenia o granicy iloczynu ciągów wynika, że wtedy $a^k=\left(\lim\limits_{m\to\infty}\sqrt[k]{a_{n_m}}\right)^k=\lim\limits_{m\to\infty}\left(\sqrt[k]{a_{n_m}}\right)^k=\lim\limits_{m\to\infty}a_{n_m}=g$, co przeczy nierówności $a\neq\sqrt[k]{g}$. Jeśli $g<0$ i k jest nieparzyste, to dowód przebiega identycznie. ■

Uwaga 15.36 (o przestrzeniach metrycznych)
W matematyce używa się często terminu *przestrzeń metryczna*. Chodzi o zbiór, w którym zdefiniowano odległość między punktami. Przestrzeniami metrycznymi są: prosta, płaszczyzna, zwykła przestrzeń trójwymiarowa, odcinek, trójkąt. Można też definiować odległość między funkcjami. Podamy ścisłe określenie.

Przestrzenią metryczną nazywamy taki zbiór X, którego każdym dwóm elementom $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ przypisana została liczba $\varrho(\mathbf{x},\mathbf{y})$ w taki sposób, że

M1 $\varrho(\mathbf{x},\mathbf{y})\geqslant 0$ dla dowolnych $\mathbf{x},\mathbf{y}\in X$;

M2 $\varrho(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{x}=\mathbf{y}$;

M3 $\varrho(\mathbf{x},\mathbf{y})=\varrho(\mathbf{y},\mathbf{x})$ dla dowolnych $\mathbf{x},\mathbf{y}\in X$;

M4 $\varrho(\mathbf{x},\mathbf{y})+\varrho(\mathbf{y},\mathbf{z})\geqslant\varrho(\mathbf{x},\mathbf{z})$ dla dowolnych $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in X$.

W przestrzeni metrycznej można zdefiniować kule otwarte: jeśli $\mathbf{p}\in X$ oraz $r>0$, to kulą otwartą o środku $\mathbf{p}$ i promieniu r nazywamy zbiór $B(\mathbf{p},r)=\{\mathbf{x}\in X:\quad \varrho(\mathbf{p},\mathbf{x})<r\}$.

Na płaszczyźnie można zdefiniować odległość np. za pomocą wzoru $\varrho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, co odpowiada zwykłemu sposobowi mierzenia odległości między punktami płaszczyzny (twierdzenie Pitagorasa).

Teraz nie będziemy zajmować się przestrzeniami metrycznymi, ale pokażemy, jak można w zbiorze $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ zdefiniować **sensowną** metrykę.

Niech $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ i dodatkowo $f(\infty)=1$, $f(-\infty)=-1$. Funkcja f przekształca *domkniętą* prostą $\overline{\mathbb{R}}$ na odcinek $[-1,1]$. Jest ona różnowartościowa. Przyjmujemy $\varrho_{\overline{\mathbb{R}}}(x,y)=|f(x)-f(y)|$ dla dowolnych punktów $x,y\in\overline{\mathbb{R}}$. Czytelnik zechce sprawdzić, że $\varrho_{\overline{\mathbb{R}}}$ jest metryką w zbiorze $\overline{\mathbb{R}}$ oraz, że $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty}\varrho_{\overline{\mathbb{R}}}(a_n,g)=0$ dla każdego ciągu liczbowego (a_n) niezależnie od tego, czy granica g jest skończona, czy nie. ■

Zadania

1. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, jeśli ta granica istnieje, gdy $a_n =$

a. $\frac{1+n+3n^7+n^2}{n^2-n+13}$; **b.** $\frac{1+n+3n+n^2}{n^2-n+13}$;

c. $\frac{1+n+3n^7+n^2}{n^2-n^8+13}$; **d.** $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;

e. $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}$; **f.** $\sqrt{1+2^{(-1)^n}}$;

g. $\sqrt[n]{1^k+2^k+\cdots+n^k}$, $k\in\mathbb{N}$; **h.** $\sqrt[n]{n}$;

i. $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$; **j.** $\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3-n+13}$;

k. $\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{12}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n+9}{2n-1}$; **l.** $\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$;

m. $\frac{n}{2^n}$; **n.** $\frac{n^{13}}{2^n}$;

o. $1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}$, $|q|<1$; **p.** nq^n, $|q|<1$;

r. $1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}$, $|q|<1$.

2. Wykazać, że granica $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}$ istnieje i wyjaśnić, czy jest ona skończona.

3. Wykazać, że granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$ istnieje i wyjaśnić, czy jest ona równa 0.

4. Wykazać, że granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ istnieje i wyjaśnić, czy jest ona równa 0.

5. Wykazać, że granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ istnieje i wyjaśnić, czy jest ona skończona.

6. Niech $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ... Wykazać, ze ciąg (a_n) ma skończoną granicę.

7. Wykazać, że

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=1$; **b.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}\right)^n=1$;

c. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=e^2$; **d.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n}{n^2-n+1}\right)^n=e^2$.

8. Wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=e^k$ dla każdego $k\in\mathbb{N}$.

9. Wykazać, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+a_n\right)^n=1$.

10. Wykazać, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=k$, dla $k\in\mathbb{N}$, to zachodzi wzór: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+a_n\right)^n=e^k$.

11. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $k \geqslant 2$ zachodzi nierówność $e \geqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} > (1 + \frac{1}{k})^k$.

12. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność $e - \big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\big) < \frac{1}{n \cdot n!}$.

13. Korzystając z poprzedniego zadania wykazać, że liczba e jest niewymierna.

14. Udowodnić, że każdy ciąg zbieżny zawiera wyraz najmniejszy lub największy.

15. Wykazać, że jeśli ciąg (a_n) zawiera takie dwa podciągi $(a_{n'_k})$ i $(a_{n''_k})$ zbieżne do tej samej granicy g, że każdy wyraz ciągu (a_n) jest wyrazem co najmniej jednego z tych dwóch podciągów, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. [15.5]

16. Niech $a_1 > 0$ i $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$. Udowodnić, że ciąg (a_n) ma skończoną granicę.

17. Niech $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ i $a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n)$ dla każdego $n = 1, 2, 3, \ldots$. Wykazać, że ciąg (a_n) ma skończoną granicę i znaleźć ją.

18. Niech $a_0 = 9$, $a_1 = 27$ i $a_{n+2} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}a_{n+1}$ dla każdego $n = 0, 1, 2, \ldots$. Wyjaśnić, czy ciąg (a_n) jest jest zbieżny. Jeśli ma granicę, znaleźć ją.

19. Niech c będzie liczbą dodatnią. Niech $a_1 = \sqrt{c}$ i niech $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$. Wykazać, że ciąg (a_n) ma skończoną granicę i znaleźć ją.

20. Wykazać, że jeśli $g > 0$ jest liczbą niewymierną, $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = g$, to zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \infty = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$.

21. Załóżmy, że ciąg (a_n) nie jest ograniczony z góry, ani z dołu oraz że $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$. Dowieść, że jeśli $x \in \mathbb{R}$, to istnieje taki ściśle rosnący ciąg (n_m), że $x = \lim\limits_{m\to\infty} a_{n_m}$, tzn: każda liczba rzeczywista jest granicą podciągu ciągu (a_n).

[15.5] Twierdzenie sformułowane w tym zadaniu autor tego tekstu lubi nazywać twierdzeniem o scalaniu.

22. Wyrazy ciągu a_n są nieujemne. Dla dowolnych liczb naturalnych m, n spełniona jest nierówność $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$. Wykazać, że ciąg o wyrazie $\frac{a_n}{n}$ ma skończoną granicę.

23. Niech a i b będą liczbami dodatnimi. Niech $a_1 = b$ i niech $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$. Wykazać, że istnieją takie liczby dodatnie c i $q \in (0,1)$, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność $\left|a_n - \sqrt{a}\right| < cq^{2^n}$. Wskazać konkretną parę liczb c, q w przypadku $a = 5$ i $b = 3$.
Można wywnioskować stąd, że ciąg a_n jest bardzo szybko zbieżny do liczby $\sqrt{a}$, np. że liczba dokładnych cyfr liczby $\sqrt{a}$ przy zastąpieniu a_n przez a_{n+1} co najmniej podwaja się (dla dostatecznie dużych n, przy czym w przypadku $a = 5$, $b = 3$ jest tak nieomal od samego początku).

24! Załóżmy, że funkcja f jest wielomianem. Udowodnić, że dla każdego przedziału domkniętego $[a,b] \subset \mathbb{R}$ istnieje taka liczba $L > 0$, że jeśli $x, y \in [a,b]$, to $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x-y|$.

25! Wykazać, że jeśli istnieje taka liczba $L > 0$, że nierówność $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x-y|$ zachodzi dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$, to stopień wielomianu f nie jest większy niż 1.

26. Załóżmy, że funkcja f jest wielomianem n–tego stopnia o współczynnikach całkowitych oraz $f(a) = 0$ i $a \notin \mathbb{Q}$. Dowieść, że istnieje taka liczba $C > 0$, że dla każdej pary liczb $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ spełniona jest nierówność $\left|\frac{p}{q} - a\right| \geqslant \frac{C}{q^n}$.

27. Podać przykład liczby rzeczywistej, np. podając jej rozwinięcie dziesiętne, która nie jest pierwiastkiem żadnego niezerowego wielomianu o współczynnikach całkowitych.
Takie liczby nazywane są *przestępnymi* (termin angielski to: transcendental number). W roku 1844 Liouville korzystając z twierdzenia, którego dowód jest treścią poprzedniego zadania, wskazał po raz pierwszy liczby przestępne.

28. Dowieść, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = g$.
Podać przykład takiego ciągu (b_n), który nie ma granicy, że istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$.

29. Dowieść, że jeśli zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ i wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie, to prawdziwy jest wzór $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = g$. Podać przykład takiego ciągu liczb dodatnich (b_n), który nie ma granicy, że istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n}$.

30. Dowieść, że jeśli zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ i wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie, to prawdziwy jest wzór $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_n}} = g$. Podać przykład takiego ciągu liczb dodatnich (b_n), który nie ma granicy, że istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots\frac{1}{b_n}}$.

31. Znaleźć kresy zbioru X zdefiniowanego za pomocą wzoru: $X = \left\{\frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} + \frac{a}{d+a+b}\colon \quad a,b,c,d > 0\right\}$.

32. Niech $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = \frac{2a_n+1}{a_n+1}$, oraz $b_1 = 2$ i $b_{n+1} = \frac{2b_n+1}{b_n+1}$. Udowodnić, że $\sup\{a_n\colon \quad n \in \mathbb{N}\} = \inf\{b_n\colon \quad n \in \mathbb{N}\}$.

33. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 + 2\cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n}$.

34. Dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$ znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

35. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

36. Niech $x \in \mathbb{R}$. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\big(\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor\big)$.

37. Udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x i dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją takie całkowite liczby k, l, że $|kx + l| < \frac{1}{n}$.

38. Dla jakich liczb dodatnich x ciąg $\big(n(\sqrt[n]{x} - 1)\big)$ jest zbieżny?

39. Dowieść, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

40. Dowieść, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(k+1)(1^k+2^k+\cdots+n^k)-n^{k+1}}{(k+1)n^k} = \frac{1}{2}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

41! Niech $a > 1$ będzie liczbą rzeczywistą, a ℓ – naturalną. Wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\ell}{a^n} = 0$.

42. Podać przykład takiego ciągu (a_n) o granicy $+\infty$, że równość $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+k} - a_n) = 0$ jest spełniona dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

43. Niech $a > b > 0$ będą liczbami rzeczywistymi. Definiujemy $a_1 = \frac{1}{2}(a+b)$, $b_1 = \sqrt{ab}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ dla $n+1, 2, 3, \ldots$ Udowodnić, że ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne i to do wspólnej granicy.

44. Dowieść, że każda liczba z przedziału $[0,1]$ jest granicą pewnego podciągu ciągu $\left(n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor\right)$.

45. Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[k]{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$.

46. Dla dowolnych liczb $a, b > 0$ obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$.

47. Dany jest taki ciąg (a_n), że z każdego jego podciągu (a_{n_m}) można wybrać podciąg, którego granicą jest g. Udowodnić, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

48. Niech a i a_1 będą liczbami dodatnimi. Zdefiniujmy ciąg (a_n) indukcyjnie: $a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + \frac{a}{a_n^2})$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ w zależności od a.

49. Niech x będzie liczbą dodatnią. W zależności od x znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\ldots\cdot(1+x^{2^n})$.

50. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$.

51! Dowieść, że jeśli istnieje $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n)$, to istnieje $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ i obie granice są równe. Czy z istnienia granicy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ wynika istnienie granicy $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n)$?

52! Dowieść, że jeśli istnieje $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, to istnieje $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ i obie granice są równe.

53. Niech $(a_{1,n})$, $(a_{2,n})$, $(a_{3,n})$, ... będą dowolnymi ograniczonymi ciągami liczb rzeczywistych. Udowodnić, że istnieje wtedy taki ściśle rosnący ciąg (n_m) liczb naturalnych, że wszystkie ciągi (a_{1,n_m}), (a_{2,n_m}), (a_{3,n_m}), ... są zbieżne — jest ich nieskończenie wiele!

54. Korzystając z poprzedniego zadania wykazać, że wśród trójkątów wpisanych w okrąg o promieniu 1 istnieje trójkąt o największym obwodzie.

55. Dane są takie koła K_1, K_2, K_3, ..., że dla dowolnej liczby naturalnej n koła K_1, K_2, K_3, ..., K_n można tak umieścić w kwadracie Q, by ich wnętrza były parami rozłączne. Dowieść, że w kwadracie Q można tak umieścić wszystkie koła K_1, K_2, K_3, ..., by wnętrza każdej pary były rozłączne.

56! Zbiór $\mathcal{P}$ złożony z podzbiorów zbioru $\mathbb{R}$ nazywamy pokryciem zbioru $A \subset \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy punkt zbioru A jest punktem pewnego zbioru $P \in \mathcal{P}$. Dowieść, że z każdego pokrycia przedziału domkniętego $[a,b]$ przedziałami **otwartymi** można wybrać pokrycie skończone.

57. Rozstrzygnąć, czy w zadaniu poprzednim można rozważać pokrycie przedziału $[a,b]$ dowolnymi przedziałami zamiast pokrycia przedziałami otwartymi.

58. Dowieść, że jeśli $\mathcal{P}$ jest pokryciem zbioru $[a,b]$ przedziałami otwartymi, to istnieje taka liczba $\lambda > 0$, że jeśli $|x-y| < \lambda$ i $x,y \in [a,b]$, to istnieje taki przedział $P \in \mathcal{P}$, że $x,y \in P$.

59. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb dodatnich, który zawiera podciąg zbieżny do liczby 0. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele wskaźników n, dla których wyraz a_n jest mniejszy od wszystkich wyrazów, które go poprzedzają, tzn. istnieje nieskończenie wiele takich liczb k, że $a_k < a_j$ dla wszystkich numerów $j < k$.

60. Załóżmy, że wyrazy niemalejącego ciągu (a_n) są dodatnie. Wykazać, że zbiór złożony z granic wszystkich podciągów ciągu $\left(\dfrac{a_n}{n+a_n}\right)$ jest przedziałem domkniętym.

61. Niech (a_n) będzie ciągiem dodatnich liczb całkowitych. Definiujemy:

$$r_n = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots \cfrac{}{\ldots + \cfrac{1}{a_n}}}}}}$$

Wykazać, że ciąg (r_n) jest zbieżny oraz że $\lim\limits_{n\to\infty} r_n \notin \mathbb{Q}$.

62! Dowieść, że jeśli ciąg liczb całkowitych ma skończoną granicę, to prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są równe.

63! Podać przykład takich dwóch ciągów (a_n) i (b_n), że zachodzą równości $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n)$

(a) $= 0$, (b) $= \sqrt{13}$, (c) $= -7$,
(d) $= \infty$, (e) $= -\infty$, (f) nie istnieje.

64! Podać przykład takich dwóch ciągów (a_n) i (b_n), że zachodzą równości $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$

(a) $= 0$, (b) $= \sqrt{13}$, (c) $= -7$,
(d) $= \infty$, (e) $= -\infty$, (f) nie istnieje.

65! Podać przykład takich dwóch ciągów (a_n) i (b_n), że zachodzą równości $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$

(a) $= 0$, (b) $= \sqrt{13}$, (c) $= -7$,
(d) $= \infty$, (e) $= -\infty$, (f) nie istnieje.

Definicja 15.37 (niektórych potęg)

Dla każdej liczby $a \geqslant 0$ i naturalnej n określamy $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$. Przyjmujemy, że $a^0 = 1$ dla $a \neq 0$ i $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. ■

66! Podać przykład takich dwóch ciągów (a_n) i (b_n), że zachodzą równości $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$

(a) $= 0$, (b) $= \sqrt{13}$, (c) $= \frac{1}{7}$,
(d) $= \infty$, (e) $= -\infty$, (f) nie istnieje.

67! Podać przykład takich dwóch ciągów (a_n) i (b_n), zbieżnych do 0, że $\forall_n (a_n > 0)$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$

(a) $= 0$, (b) $= \sqrt{13}$, (c) $= \frac{1}{7}$,
(d) $= \infty$, (e) $= -\infty$, (f) nie istnieje.

68. Niech $f(x) = x(1-x)$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$. Definiujemy ciąg (a_n) wzorami $a_1 = a$, $a_{n+1} = f(a_n)$ dla $n = 1, 2, 3 \ldots$. Udowodnić, że dla każdego $a \in [0,1]$ ciąg (a_n) ma granicę.

69. Niech $5 \leqslant a_0$ i $a_{n+1} = a_n^2 - 10a_n + 30$ dla $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Znaleźć granicę ciągu (a_n) w zależności od a_0.

70. Niech $a_{n+1} = a_n^3 - 6a_n^2 + 12a_n - 6$ dla $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Wyjaśnić, czy ciąg (a_n) ma granicę i znaleźć ją, jeśli istnieje. Wynik może zależeć od a_0.

71*. Niech $f(x) = 1 - |1 - 2x|$. Niech $a_1 = a$, $a_{n+1} = f(a_n)$ dla $n = 1, 2, 3 \ldots$. Dowieść, że istnieje taka liczba $a \in [0, 1]$, że dla każdej liczby $x \in [0, 1]$ istnieje podciąg ciągu (a_n), którego granicą jest liczba x.

SZEREGI LICZBOWE

Zanim podamy definicje sumy nieskończonej, którą matematycy nazywają *szeregiem nieskończonym*, wypowiemy kilka uwag świadczących o konieczności podania precyzyjnej definicji.

Jaka ma być wartość sumy nieskończonej

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+1-1+\ldots?$$

Mogłaby być równa 0, bo

$1-1+1-1+1-1+\ldots=(1-1)+(1-1)+\ldots=0+0+\ldots.$

Mogłaby być równa 1, bo

$1-1+1-1+1-1+\ldots=1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots=1+0+0+\ldots$

A może ani 0 ani 1, lecz $\frac{1}{2}$, bo obliczamy sumę $1+q+q^2+\cdots$ dla $q=-1$, a w poprzednim rozdziale dowodziliśmy, że jeśli $|q|<1$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}$, więc gdybyśmy do tego wzoru wstawili w miejsce q liczbę -1, to otrzymalibyśmy wzór $1+(-1)+1+(-1)+\cdots=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$.

Z drugiej strony mało kto zakwestionowałby równość

$1-\frac12+\frac13-\frac14+\frac15-\frac16+\frac17-\frac18+\frac19-\frac1{10}+\frac1{11}-\frac1{12}+\frac1{13}-\frac1{14}+\frac1{15}\ldots=$

$=1-\frac12-\frac14+\frac13-\frac16-\frac18+\frac15-\frac1{10}-\frac1{12}+\frac17-\frac1{14}-\frac1{16}+\ldots$

W końcu bo obu stronach równości występują te same liczby, co prawda zmieniliśmy kolejność składników, ale są to te same składniki. Jednak zachodzą „oczywiste" równości

$\left(1-\frac12+\frac13-\frac14+\frac15-\frac16+\frac17-\frac18+\frac19-\frac1{10}+\frac1{11}-\frac1{12}+\ldots\right)-$

$-\left(1-\frac12-\frac14+\frac13-\frac16-\frac18+\frac15-\frac1{10}-\frac1{12}+\frac17-\frac1{14}-\frac1{16}+\ldots\right)=$

$=\left((1-\frac12)+(\frac13-\frac14)+(\frac15-\frac16)+(\frac17-\frac18)+(\frac19-\frac1{10})+(\frac1{11}-\frac1{12})+\cdots\right)-$

$-\left((1-\frac12-\frac14)+(\frac13-\frac16-\frac18)+(\frac15-\frac1{10}-\frac1{12})+(\frac17-\frac1{14}-\frac1{16})+\ldots\right)=$

$=(\frac12-\frac14)+(\frac16-\frac18)+(\frac1{10}-\frac1{12})+(\frac1{14}-\frac1{16})+\cdots=$

$=\frac12\left(1-\frac12+\frac13-\frac14+\frac15-\frac16+\frac17-\frac18+\frac19-\frac1{10}+\frac1{11}-\frac1{12}+\ldots\right).$

Z tych równości wynika od razu, że

$1-\frac12+\frac13-\frac14+\frac15-\frac16+\frac17-\frac18+\frac19-\frac1{10}+\frac1{11}-\frac1{12}+\ldots=$

$=2\left(1-\frac12-\frac14+\frac13-\frac16-\frac18+\frac15-\frac1{10}-\frac1{12}+\frac17-\frac1{14}-\frac1{16}+\ldots\right)$, co wygląda źle, bo zachodzi oczywista nierówność :

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\ldots=(1-\frac{1}{2})+$ $+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})+(\frac{1}{7}-\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}-\frac{1}{10})+(\frac{1}{11}-\frac{1}{12})+\ldots>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, bo w każdym nawiasie jest liczba dodatnia, a po pomnożeniu liczba liczby dodatniej przez 2 otrzymujemy liczbę większą od wyjściowej! Jasne też jest, że $(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})+(\frac{1}{7}-\frac{1}{8})+$ $+(\frac{1}{9}-\frac{1}{10})+(\frac{1}{11}-\frac{1}{12})+\ldots<(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+$ $+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})+(\frac{1}{6}-\frac{1}{7})+(\frac{1}{7}-\frac{1}{8})+(\frac{1}{8}-\frac{1}{9})+(\frac{1}{9}-\frac{1}{10})+(\frac{1}{10}-\frac{1}{11})+$ $+(\frac{1}{11}-\frac{1}{12})+\ldots=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+$ $+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\ldots=1$, więc suma $(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})+(\frac{1}{7}-\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}-\frac{1}{10})+(\frac{1}{11}-\frac{1}{12})+\ldots$ jest liczbą z przedziału $(\frac{1}{2},1)$, więc nie uratuje nas ani równość $2\cdot 0=0$, ani $2\cdot\infty=\infty$.

Rozumowań prowadzących do wyników sprzecznych ze zdrowym rozsądkiem można podać dowolnie wiele. Po to, by móc porozumiewać się i mieć szanse na poprawne rozumowania, trzeba zdefiniować sumę nieskończoną Potem trzeba się zastanowić nad własnościami działań w nowej sytuacji. Tym zajmiemy się w rozpoczętym właśnie rozdziale.

Definicja 16.1 (szeregu nieskończonego i jego sumy)
Szeregiem o wyrazach $a_0,a_1,a_2,\ldots$ nazywamy ciąg, którego kolejnymi wyrazami są sumy początkowych wyrazów ciągu (a_n) :

$$s_0=a_0\ ,\ s_1=a_0+a_1\ ,\ s_2=a_0+a_1+a_2\ ,\ \ldots$$

Liczby s_0 , s_1 , s_2 , ... nazywane są **sumami częściowymi** szeregu o wyrazach a_0 , a_1 ,a_2 , ... Szereg o wyrazach $a_0,a_1,a_2,\ldots$ oznaczamy symbolem $a_0+a_1+a_2+\ldots$ lub symbolem $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, czasem też $\sum a_n$, jeśli nie jest istotne od jakiego wyrazu rozpoczynamy sumowanie. Jeśli ciąg sum częściowych szeregu ma granicę, to nazywamy ją **sumą** szeregu, jeśli suma szeregu jest skończona, to szereg nazywamy **zbieżnym**, jeśli suma szeregu jest nieskończona lub jeśli ciąg sum częściowych szeregu nie ma granicy, to szereg nazywamy **rozbieżnym**. Jeśli szereg ma sumę, skończoną lub nieskończoną, to oznaczamy ją tak samo jak szereg:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots \text{ lub } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \,. \ \blacksquare$$

W definicji stwierdzamy od razu, że symbol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ma dwa różne znaczenia. Nie powoduje to jednak kłopotów (przez około 300 lat), więc nie warto wprowadzać dodatkowo oznaczenia np. na szereg. Byłoby to bardziej kłopotliwe, bo należałoby wtedy pamiętać, co oznacza każdy z dwóch symboli.

Jeśli f jest funkcją o wartościach rzeczywistych określoną na zbiorze $A = \{m_1, m_2, \ldots\}$, który składa się z nieskończenie wielu liczb całkowitych $m_1 < m_2 < \ldots$, to przez $\displaystyle\sum_{m \in A} f(m)$ oznaczamy sumę szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie $a_n = f(m_n)$. Jeśli A składa się ze wszystkich liczb całkowitych większych od $n_0 - 1$, to zamiast pisać $\displaystyle\sum_{m \in A} f(m)$ będziemy często pisać $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$.

Przykład 16.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — ten szereg, nazywamy harmonicznym, jest rozbieżny do ∞, co udowodniliśmy w poprzednim rozdziale. $\blacksquare$

Przykład 16.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ — ten szereg, nazywany anharmonicznym, jest zbieżny, co wykazaliśmy w poprzednim rozdziale. $\blacksquare$

Przykład 16.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Mamy $s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Wobec tego $\displaystyle\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} (1 - \tfrac{1}{n+1}) = 1$. Wobec tego szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ jest zbieżny i zachodzi równość $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. $\blacksquare$

Przykład 16.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ jest szeregiem rozbieżnym, bo dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ spełniona jest nierówność

$$s_{2n} - s_{n-1} = \tfrac{1}{2n+1} + \tfrac{1}{2n+3} + \cdots + \tfrac{1}{4n+1} > \tfrac{n+1}{4n+1} > \tfrac{1}{4}\,,$$

a to oznacza, że ciąg (s_n) nie spełnia warunku Cauchy'ego, więc nie ma granicy skończonej. Jest to jednak ciąg ściśle rosnący, więc możemy napisać $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1}\right) = \infty$. ■

Przykład 16.5 Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ nazywany jest szeregiem geometrycznym. Jest on zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| < 1$ i zachodzi wtedy równość $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. Dla $q \geqslant 1$ szereg geometryczny jest rozbieżny i zachodzi równość $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$, dla $q \leqslant -1$ szereg jest rozbieżny i ciąg sum częściowych tego szeregu w ogóle nie ma granicy. Wszystkie te stwierdzenia wynikają od razu z wzoru $1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$ i z twierdzenia o granicy ciągu geometrycznego udowodnionego w poprzednim rozdziale. ■

Z udowodnionego twierdzenia wynika od razu nieco ogólniejszy wzór: $c + cq + cq^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} cq^n \overset{|q|<1}{=\!=\!=} \frac{c}{1-q}$.

Definicja 16.2 (rozwinięcia dziesiętnego)
Niech $x > 0$ oznacza liczbę rzeczywistą. Liczby całkowite c_k, c_{k-1}, c_{k-2}, ... są cyframi dziesiętnymi liczby x wtedy i tylko wtedy, gdy $c_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ dla $n = k$, $k-1$, $k-2, \ldots$ przy czym $c_k \neq 0$ oraz

$$x = c_k 10^k + c_{k-1}10^{k-1} + c_{k-2}10^{k-2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_{k-n}10^{k-n}\,. \ ■$$

Przykład 16.6 Niech $k = 0$ i niech $c_j = 3$ dla $j = 0, -1, -2, \ldots$ Mamy wtedy

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n}10^{-n} = 3\cdot 10^0 + 3\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2} + \cdots = \frac{3}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{3}\,. \ ■$$

Przykład 16.7 Jeśli $c_0 = 1$, $0 = c_{-1} = c_{-2} = c_{-3} = \ldots$, to

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} 10^{-n} = 1 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + \cdots = 1\,, \text{ tu } k = 0\,.$$

Jeśli $9 = c_{-1} = c_{-2} = c_{-3} = \ldots$, to

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} 10^{-n} = 9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + \cdots, \text{ tu } k = -1\,. \ \blacksquare$$

Widzimy więc, że w niektórych przypadkach jednej liczbie mogą odpowiadać dwa różne ciągi cyfr. Przekonamy się zaraz, że najwyżej dwa różne oraz że każdej liczbie dodatniej odpowiada co najmniej jeden ciąg cyfr.

Twierdzenie 16.3 (o przybliżeniach dziesiętnych)
Dla każdej liczby $x > 0$ istnieje liczba $k \in \mathbb{Z}$ i taki ciąg (cyfr) $c_k, c_{k-1}, c_{k-2}, \ldots$, że $c_{k-j} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ dla $j = 0, 1, 2, \ldots$ oraz $c_k \neq 0$ i zachodzi równość

$$x = c_k \cdot 10^k + c_{k-1} \cdot 10^{k-1} + c_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \cdots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_{k-j} 10^{k-j} \qquad (*).$$

Jeśli istnieje taka liczba naturalna j, że $10^j \cdot x \in \mathbb{N}$, to istnieją dokładnie dwa takie ciągi $c_k, c_{k-1}, c_{k-2}, \ldots$ i $\tilde{c}_r, \tilde{c}_{r-1}, \tilde{c}_{r-2}, \ldots$ Jeśli $k \neq r$, to $|k - r| = 1$; jeśli np. $k = r + 1$, to $c_k = 1$ i $0 = c_{k-1} = c_{k-2} = \ldots$ oraz $9 = \tilde{c}_r = \tilde{c}_{r-1} = \tilde{c}_{r-2} = \ldots$. Jeśli $k = r$, to istnieje liczba całkowita m taka, że $\tilde{c}_i = c_i$ dla $k \geqslant i > m$, $\tilde{c}_m = 1 + c_m$ (lub $c_m = 1 + \tilde{c}_m$) i dla każdego $i < m$ zachodzą równości $c_m = 9$, $\tilde{c}_m = 0$ (lub $\tilde{c}_m = 9$, $c_m = 0$).

Jeśli dla każdej liczby naturalnej j zachodzi $10^j \cdot x \notin \mathbb{N}$, to istnieje dokładnie jeden taki ciąg cyfr $c_k, c_{k-1}, c_{k-2}, \ldots$, że $c_k > 0$, $c_{k-j} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ dla każdego $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, dla którego zachodzi równość (*).

Dowód. Niech $k \in \mathbb{Z}$ będzie taką liczbą, że $10^k \leqslant x < 10^{k+1}$. Z równości $\lim\limits_{n\to\infty} 10^n = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} 10^{-n} = 0$, wynika, że istnieją potęgi dziesiątki większe niż x oraz mniejsze niż x. 10^{k+1} to najmniejsza z potęg większych niż x (w każdym ograniczonym z dołu zbiorze złożonym z liczb całkowitych znaleźć można najmniejszą). Niech $c_k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ będzie największą taką cyfrą, że $c_k \cdot 10^k \leqslant x$. Zdefiniujemy cyfry $c_{k-1}, c_{k-2}, \ldots$ przez indukcję. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już cyfry $c_k, c_{k-1}, c_{k-2}, \ldots, c_i$ w taki sposób, że dla każdego $j \in \{0,1,2,\ldots,i\}$ zachodzi nierówność

$$0 \leqslant x - \left(c_k \cdot 10^k + c_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + c_{k-j} \cdot 10^{k-j}\right) < 10^{k-j},$$

w tym $x - (c_k \cdot 10^k + c_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + c_{k-i} \cdot 10^{k-i}) < 10 \cdot 10^{k-i-1}$.

Definiujemy c_{k-i-1} jako jedyną liczbę ze zbioru $\{0,1,\ldots,9\}$ (więc cyfrę) taką, dla której

$$0 \leqslant x - (c_k \cdot 10^k + c_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + c_{k-i-1} \cdot 10^{k-i-1}) < 10^{k-i-1}.$$

W ten sposób zdefiniowaliśmy ciąg $c_k, c_{k-1}, \ldots$ spełniający żądane warunki, bo oczywiście $\lim\limits_{i\to\infty} 10^{k-i-1} = 0$. Stąd i z definicji sumy szeregu wynika, że $x = c_k \cdot 10^k + c_{k-1} \cdot 10^{k-1} + c_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \cdots$

Teraz zajmiemy się jednoznacznością. Załóżmy, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{k-n} \cdot 10^{k-n} = x = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_{r-n} \cdot 10^{r-n}.$$

Załóżmy, że $k > r$, przypadek $k < r$ rozpatrzeć można w identyczny sposób. Wtedy

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_{r-n} \cdot 10^{r-n} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} 9 \cdot 10^{r-n} = \tfrac{9 \cdot 10^r}{1-\frac{1}{10}} = 10^{r+1} \leqslant$$

$$\leqslant c_k \cdot 10^{r+1} \leqslant c_k \cdot 10^k \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} c_{k-n} \cdot 10^{k-n} = x.$$

Wynika stąd, że powyższe nierówności są równościami czyli, że: $9 = \tilde{c}_r = \tilde{c}_{r-1} = \ldots,\ c_k = 1,\ k = r+1,\ 0 = c_{k-1} = c_{k-2} = \ldots$

Teraz załóżmy, że $k = r$. Załóżmy, że i jest najmniejszą liczbą całkowitą nieujemną, dla której $c_{k-i} \neq \tilde{c}_{k-i}$. Przyjmijmy, dla ustalenia uwagi, że $c_{k-i} > \tilde{c}_{k-i}$. Mamy więc

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_{k-n} \cdot 10^{k-n} =$$

$$= \tilde{c}_k \cdot 10^k + \tilde{c}_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + \tilde{c}_{k-i+1} \cdot 10^{k-i+1} + \tilde{c}_{k-i} \cdot 10^{k-i} +$$
$$+ \tilde{c}_{k-i-1} \cdot 10^{k-i-1} + \tilde{c}_{k-i-2} \cdot 10^{k-i-2} + \cdots \leqslant$$
$$\leqslant \tilde{c}_k \cdot 10^k + \tilde{c}_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + \tilde{c}_{k-i+1} \cdot 10^{k-i+1} + \tilde{c}_{k-i} \cdot 10^{k-i} +$$

$$+9\cdot 10^{k-i-1}+9\cdot 10^{k-i-2}+\cdots=$$
$$=\tilde{c}_k\cdot 10^k+\tilde{c}_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\cdots+\tilde{c}_{k-i+1}\cdot 10^{k-i+1}+(\tilde{c}_{k-i}+1)\cdot 10^{k-i}=$$
$$=c_k\cdot 10^k+c_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\cdots+c_{k-i+1}\cdot 10^{k-i+1}+(\tilde{c}_{k-i}+1)\cdot 10^{k-i}\leqslant$$
$$\leqslant c_k\cdot 10^k+c_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\cdots+c_{k-i+1}\cdot 10^{k-i+1}+c_{k-i}\cdot 10^{k-i}\leqslant$$
$$\leqslant c_k\cdot 10^k+c_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\cdots+c_{k-i+1}\cdot 10^{k-i+1}+c_{k-i}\cdot 10^{k-i}+$$
$$+c_{k-i-1}\cdot 10^{k-i-1}+c_{k-i-2}\cdot 10^{k-i-2}+\cdots=x\,.$$

Jasne jest, że w rzeczywistości powyższe nierówności są równościami. Z tego stwierdzenia wynika, że:
$9=\tilde{c}_{k-i-1}=\tilde{c}_{k-i-2}=\ldots,\ c_{k-i}=\tilde{c}_{r-i}+1$ oraz
$0=c_{k-i-1}=c_{k-i-2}=\ldots.$ Dowód został zakończony. ■

Pytanko: konstrukcja rozwinięcia dziesiętnego przedstawiona w dowodzie daje w przypadku liczby 30 wynik: $3\cdot 10+0\cdot 10^0+$ $+0\cdot 10^{-1}+0\cdot 10^{-2}+\cdots$ czy może $2\cdot 10+9\cdot 10^0+9\cdot 10^{-1}++9\cdot$ $10^{-2}+\cdots$? ■

Czytelnicy bez trudu zastąpią w tym twierdzeniu liczbę 10 przez dowolną liczbę $c\in\mathcal{N}(2)$ i otrzymają nieco ogólniejsze twierdzenie o przedstawianiu liczb rzeczywistych w układzie pozycyjnym o dowolnej podstawie c, w tym o podstawach 2, 3, 16.

Przykład 16.8 Następujący szereg

$$1-\tfrac{1}{2}+\underbrace{\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}}_{\text{2 wyrazy}}-\tfrac{1}{4}+\underbrace{\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{13}}_{\text{4 wyrazy}}-\tfrac{1}{6}+\underbrace{\tfrac{1}{15}+\cdots+\tfrac{1}{29}}_{\text{8 wyrazów}}-\tfrac{1}{8}+\cdots$$

jest rozbieżny, choć różni się od szeregu anharmonicznego jedynie kolejnością występowania wyrazów! W n-tej grupie złożonej z dodatnich wyrazów występują następujące liczby:
$\frac{1}{2^{n+1}-1},\ \frac{1}{2^{n+1}+1},\ \frac{1}{2^{n+1}+3},\ \ldots,\ \frac{1}{2^{n+2}-3}\,.$

Mamy więc $\frac{1}{2^{n+1}-1}+\frac{1}{2^{n+1}+1}+\frac{1}{2^{n+1}+3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+2}-3}>$
$$>2^n\cdot\tfrac{1}{2^{n+2}-3}>2^n\cdot\tfrac{1}{2^{n+2}}=\tfrac{1}{4}\,.$$

Udowodniliśmy w ten sposób, że ciąg sum częściowych nie spełnia warunku Cauchy'ego, więc nie ma skończonej granicy.
Można wykazać (to zadanie dla Czytelnika), że

$$1-\tfrac{1}{2}+\underbrace{\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}}_{\text{2 wyrazy}}-\tfrac{1}{4}+\underbrace{\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{13}}_{\text{4 wyrazy}}-\tfrac{1}{6}+\cdots=\infty\,.\ ■$$

Twierdzenie 16.4 (o łączności sumowania nieskończonego)
Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny a ciąg (k_n) jest ściśle rosnący, $b_n = a_{k_n} + a_{k_n+1} + \cdots + a_{k_{n+1}-1}$, $k_0 = 0$,

to szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny i zachodzi równość $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

Możemy napisać $a_0 + a_1 + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{j=k_n}^{k_{n+1}-1} a_j \right) =$

$= (a_0 + a_1 + \cdots + a_{k_1-1}) + (a_{k_1} + a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2-1}) + \cdots$.

Dowód. Ciąg sum częściowych szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ jest podciągiem ciągu sum częściowych szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$: $b_0 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{k_1-1}$, $b_0 + b_1 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{k_2-1}$, itd. Jeśli ciąg jest zbieżny, to wszystkie jego podciągi są zbieżne do granicy tego ciągu. ■

Uwaga 16.5
Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, np. znany nam już szereg $(1-1)+(1-1)+\cdots$ jest zbieżny, wszystkie jego wyrazy są równe 0, więc jego sumą jest liczba 0. Opuszczając nawiasy otrzymujemy szereg $1-1+1-1+\cdots$ nie jest zbieżny, bo jego ciąg sum częściowych wygląda tak: $1, 0, 1, 0, \ldots$ ■

Z twierdzenie o granicy iloczynu ciągów wynika od razu, że po pomnożeniu wszystkich wyrazów szeregu zbieżnego przez liczbę rzeczywistą otrzymujemy szereg zbieżny.

Twierdzenie 16.6 (o mnożeniu szeregu przez liczbę)
Jeśli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, $c \in \mathbb{R}$, to szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (c \cdot a_n)$ też jest zbieżny i spełniona jest równość $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. ■

Szeregi zbieżne można też dodawać.

Twierdzenie 16.7 (o dodawaniu szeregów)

Jeśli szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ są zbieżne, to szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$ też jest zbieżny i zachodzi równość $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

Wynika to natychmiast z twierdzenia o granicy sumy ciągów i tego, że suma częściowa szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ jest równa sumie sum częściowych szeregów $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$. ■

Definicja 16.8

Szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ nazywamy sumą szeregów $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$, a szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(c \cdot a_n)$ — iloczynem szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ przez liczbę c .

Twierdzenie 16.9 (Cauchy'ego)

Szereg $\sum\limits_{n=k}^{\infty}a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna n_ε , że jeśli $n > n_\varepsilon$, to $|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$ dla każdej liczby naturalnej k .

Dowód. Wynika to od razu z twierdzenia, które mówi, że ciąg ma granicę **skończoną** wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego — wystarczy zastosować je do ciągu sum częściowych szeregu $\sum a_n$. ■

Twierdzenie 16.10 (warunek konieczny zbieżności szeregu)

Jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dowód. Wynika to natychmiast z równości $a_n = s_n - s_{n-1}$ oraz z tego, że $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1}$. ■

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, o czym świadczy rozbieżność szeregu harmonicznego $\sum \frac{1}{n}$, którego wyraz oczywiście dąży do zera.

Łatwym wnioskiem z twierdzenia o szacowaniu z poprzedniego rozdziału jest następujące

Twierdzenie 16.11 (o porównywaniu sum szeregów)
Jeśli szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ oraz $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ mają sumy i dla każdej liczby n zachodzi nierówność $a_n \leqslant b_n$, to $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$, przy czym jeśli choćby dla jednej liczby n zachodzi nierówność (ostra!) $a_n < b_n$ i szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$. ■

Przykład 16.9 Zbadamy teraz zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Szereg ma szansę być zbieżny, bowiem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Wykażemy, że jest zbieżny i że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$.

Mamy $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ dla $n > 1$, zatem

$$1 + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{3^2} + \cdots + \tfrac{1}{n^2} <$$
$$< 1 + \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n} = 2 - \tfrac{1}{n} < 2.$$

Stąd wynika, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) \leqslant 2$.

Wykazaliśmy więc zbieżność szeregu (ciąg sum częściowych jest ograniczony z góry i rosnący). Otrzymaną nierówność można ,,zaostrzyć", bo dla $n \geqslant 3$ mamy $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} < 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n} = \frac{7}{4} - \frac{1}{n}$, zatem $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{7}{4} < 2$. ■

Kolej na bardzo ważną definicję. Zanim ją podamy zauważmy, że szereg o wyrazach **nieujemnych** ma zawsze sumę: skończoną, gdy jest zbieżny i równą ∞, gdy jest rozbieżny.

Definicja 16.12 (bezwzględnej i warunkowej zbieżności)
Szereg $\sum a_n$ nazywany jest bezwzględnie zbieżnym wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum |a_n|$ jest zbieżny, tzn. gdy $\sum |a_n| < +\infty$.

Jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, ale nie jest zbieżny bezwzględnie, to mówimy, że jest zbieżny warunkowo. ■

Najprostszymi szeregami bezwzględnie zbieżnymi są oczywiście szeregi o wyrazach dodatnich, ale jest też wiele innych. Szereg $\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ jest zbieżny warunkowo. Szereg $\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ jest zbieżny bezwzględnie.

Twierdzenie 16.13 (**o zbieżności szeregu bezwzględnie zbieżnego**)
Szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny. Zachodzi nierówność

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,.$$

Dowód. Wykażemy, że szereg $\sum a_n$ spełnia warunek Cauchy'ego wiedząc, że szereg $\sum |a_n|$ spełnia ten warunek. Wynika to od razu z nierówności trójkąta:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| < \varepsilon\,.$$

Oszacowanie sumy uzyskujemy w taki sam sposób. ■

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, bo istnieją szeregi zbieżne warunkowo, np. $\sum(-1)^n\frac{1}{n}$.

Definicja 16.14 (permutacji)
Permutacją zbioru wszystkich liczb naturalnych nazywamy każdą funkcję przekształcającą go **różnowartościowo na siebie.** ■

Przykład 16.10 Funkcja różnowartościowa $p\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ zdefiniowana za pomocą wzoru $p(n) = n + 1$ nie jest permutacją, bo nie przekształca $\mathbb{N}$ na siebie.
Funkcja $p\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ zdefiniowana wzorem $p(n) = n + (-1)^{n-1}$ jest permutacją zbioru $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Przesuwa ona liczby nieparzyste o 1 w prawo, a parzyste o 1 w lewo. ■

Twierdzenie 16.15 (**o przemienności sum nieskończonych**)
Niech p będzie dowolną permutacją zbioru wszystkich liczb naturalnych, tzn. w ciągu $\big(p(n)\big)$, czyli w ciągu $p(0)$, $p(1)$, ... występują wszystkie liczby naturalne, każda dokładnie jeden raz. Niech $\sum a_n$ będzie szeregiem bezwzględnie zbieżnym. Wtedy szereg $\sum a_{p(n)}$ jest zbieżny i zachodzi równość

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{p(n)}\,.$$

Dowód. Niech $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, $s_n^{(p)} = a_{p(0)} + a_{p(1)} + + \cdots + a_{p(n)}$ i niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieje taka liczba m, że

$$|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + |a_{m+3}| + \ldots < \tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$

Istnieje taka liczba $n_\varepsilon \geqslant m$, że wśród liczb $p(0)$, $p(1)$, $\ldots, p(n_\varepsilon)$ znajdują się **wszystkie** liczby $0, 1, 2, \ldots, m$. Załóżmy, że $k > n_\varepsilon$. Wykażemy, że

$$|s_k - s_k^{(p)}| \leqslant |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + |a_{m+3}| + \ldots.$$

Zarówno s_k jak i $s_k^{(p)}$ są sumami pewnych liczb a_j, jeśli jakiś wyraz jest składnikiem obu sum, to nie ma go w różnicy $s_k - s_k^{(p)}$. Wyrazy a_0, a_1, $\ldots$, a_m występują zarówno w s_k jak i w $s_k^{(p)}$, więc nie występują one w $s_k - s_k^{(p)}$, wobec tego $|s_k - s_k^{(p)}| = =|\sigma_{m+1}a_{m+1} + \sigma_{m+2}a_{m+2} + \cdots| \leqslant |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots < \frac{\varepsilon}{2}$, gdzie $\sigma_{m+j} = -1$ lub $\sigma_{m+j} = 0$ lub $\sigma_{m+j} = 1$ w zależności od tego, czy wyraz a_{m+j} wystąpił tylko w $s_k^{(p)}$, wystąpił w obu sumach s_k i $s_k^{(p)}$, czy też tylko w s_k. Takie same rozważania dotyczą różnicy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n - s_k$, więc również $\Big|\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n - s_k\Big| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Wobec tego dla każdej liczby $k > n_\varepsilon$ mamy

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n - s_k^{(p)}\right| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n - s_k\right| + \left|s_k - s_k^{(p)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Z definicji granicy ciągu wynika więc, że $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^{(p)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, a to właśnie oznacza, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{p(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,.$$

Dowód został zakończony. ■

Wniosek 16.16

Jeśli szereg o wyrazach nieujemnych jest zbieżny i p jest permutacją zbioru liczb naturalnych, to $\sum a_{p(n)} = \sum a_n$. ■

Uwaga 16.17

Jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, niekoniecznie bezwzględnie, a p jest taką permutacją zbioru liczb naturalnych, że $p(n) = n$ dla prawie wszystkich n, to szereg $\sum a_{p(n)}$ jest zbieżny i zachodzi równość $\sum a_{p(n)} = \sum a_n$.

Stwierdzenie to wynika natychmiast z tego, że od pewnego miejsca ciągi sum obu szeregów częściowych pokrywają się. Uwaga ta oznacza, że zmiana porządku **skończenie** wielu wyrazów szeregu nie ma wpływu na jego zbieżność ani na jego sumę. ■

Udowodnimy ważne i zaskakujące twierdzenie pokazujące, jak bardzo zmiana kolejności wyrazów może zmienić sumę szeregu.

Twierdzenie 16.18 (Riemanna)

Jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny warunkowo, to dla każdej liczby rzeczywistej s istnieje taka permutacja p zbioru liczb naturalnych, że $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$.

Dowód. Niech $d_n = \frac{1}{2}(a_n + |a_n|)$, $u_n = \frac{1}{2}(a_n - |a_n|)$. Jest jasne, że $a_n = d_n + u_n$ i $|a_n| = d_n - u_n$ oraz że $d_n \geqslant 0 \geqslant u_n$. Ponieważ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$, więc co najmniej jeden z szeregów $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ jest rozbieżny, a ponieważ ich sumą jest szereg zbieżny, więc oba są rozbieżne (szereg rozbieżny nie jest różnicą szeregów zbieżnych). Wykazaliśmy więc, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n = \infty$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = -\infty$.

Niech b_n oznacza n–ty spośród nieujemnych wyrazów szeregu a_n , zaś c_n — n–ty spośród wyrazów ujemnych. Definicje są poprawne, bo zgodnie z tym, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n = \infty$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = -\infty$ w szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ występuje nieskończenie wiele wyrazów nieujemnych (a nawet dodatnich) i nieskończenie wiele ujemnych.

Zdefiniujemy teraz permutację p. Niech k_1 będzie najmniejszą taką liczbą naturalną, że $b_1 + b_2 + \cdots + b_{k_1} \geqslant s$, a ℓ_1 — najmniejszą liczbą naturalną, dla której spełniona jest nierówność $b_1 + b_2 + \cdots + b_{k_1} + c_1 + c_2 + \cdots + c_{\ell_1} \leqslant s$. Niech k_2 będzie najmniejszą taką liczbą naturalną, że $b_1 + b_2 + \cdots + b_{k_1} + c_1 + {}$ ${}+ c_2 + \cdots + c_{\ell_1} + b_{k_1+1} + b_{k_1+2} + \cdots + b_{k_2} \geqslant s$ itd. Dalsze wyrazy ciągów (k_n), (ℓ_n) definiujemy indukcyjnie korzystając z tego, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = -\infty$. Dowiedziemy, że prawdziwy jest wzór

$$s = b_1 + b_2 + \cdots + b_{k_1} + c_1 + \cdots + c_{\ell_1} + b_{k_1+1} + \cdots + b_{k_2} + \cdots.$$

Z określenia liczb $k_1, k_2, \ldots$ i liczb $\ell_1, \ell_2, \ldots$ wynika od razu, że dla każdej liczby naturalnej n spełnione są nierówności

$0 \leqslant b_1 + b_2 + \cdots + b_{k_1} + c_1 + \cdots + c_{\ell_1} + \cdots + b_{k_n} - s < b_{k_n}$ oraz

$0 \leqslant s - (b_1 + b_2 + \cdot s + b_{k_1} + c_1 + \cdots + c_{\ell_1} + \cdots + c_{\ell_n}) < c_{\ell_n}$.

Z otrzymanych nierówności wynika, że szereg, którego kolejnymi wyrazami są liczby $(b_1 + b_2 + \cdots + b_{k_1})$, $(c_1 + c_2 + \cdots + c_{\ell_1})$, $(b_{k_1+1} + b_{k_1+2} + \cdots + b_{k_2})$, $(c_{\ell_1+1} + c_{\ell_1+2} + \cdots + c_{\ell_2})$ jest zbieżny a jego sumą jest liczba s. Jest tak, bo $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, a te dwie równości wynikają z tego, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ — wyraz szeregu zbieżnego dąży do 0. Ponieważ w każdym nawiasie znajdują się wyrazy jednego znaku i szereg z nawiasami jest zbieżny, więc nawiasy można opuścić — ,,nowe" sumy częściowe znajdą się między ,,starymi". Dowód został zakończony. ■

Uwaga 16.19
Modyfikując nieznacznie podany dowód możemy znaleźć taką permutację wyrazów szeregu warunkowo zbieżnego, że ciąg sum częściowych ,,nowego szeregu" będzie zawierać podciąg o granicy ∞ i również podciąg o granicy $-\infty$. ■

Z tej uwagi i twierdzenia Riemanna wynika

Twierdzenie 16.20
Szereg $\sum a_n$ jest zbieżny bezwzględnie wtedy i tylko wtedy, gdy zmiana kolejności wyrazów nie zmienia sumy szeregu. ■

Z uwagi po twierdzeniu Riemanna wynika również

Twierdzenie 16.21
Szereg $\sum a_n$ jest zbieżny bezwzględnie wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej permutacji p zbioru liczb naturalnych szereg $\sum a_{p(n)}$ jest zbieżny. ■

Badanie zbieżności szeregów bywa trudne. Jednak jest wiele twierdzeń, które w niektórych przypadkach pozwalają w miarę szybko sprawdzić, czy szereg jest zbieżny. Zwane są one kryteriami zbieżności lub rozbieżności szeregów. Ich stosowanie polega na ogół na porównywaniu badanego szeregu z szeregiem, o którym już coś wiemy.

Twierdzenie 16.22 (kryterium porównawcze)
Załóżmy, że dla każdej dostatecznie dużej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$. Wtedy

(16.22.1) jeśli szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to również szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;

(16.22.2) jeśli szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to również rozbieżny jest szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Dowód. Załóżmy, że nierówność $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ ma miejsce dla $n \geqslant k$. Wtedy dla każdego $m \geqslant k$ zachodzi nierówność $\displaystyle\sum_{n=k}^{m} a_n \leqslant \sum_{n=k}^{m} b_n$. Ciągi sum częściowych są niemalejące, więc granice istnieją, czyli szeregi mają sumy. Przechodząc do granicy przy $m \longrightarrow \infty$ otrzymujemy nierówność $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} b_n$. Z niej obie części tezy wynikają od razu – to, że sumujemy od k zamiast od 0, nie ma znaczenia, bo zmiana skończenie wielu wyrazów szeregów (np. zastąpienie w obu szeregach wyrazów o numerach mniejszych niż k zerami) nie ma wpływu na ich zbieżność, choć na ogół wpływa na wartości ich sum. Dowód został zakończony. ■

Komentarz nieformalny: szeregowi o mniejszych wyrazach jest łatwiej być zbieżnym niż szeregowi o większych wyrazach.

Wniosek 16.23
Jeśli dla dostatecznie dużych numerów n zachodzi nierówność $|b_n| \leqslant a_n$ i szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny bezwzględnie. ■

Twierdzenie 16.24 (asymptotyczne kryterium porównawcze)
Załóżmy, że dla każdej dostatecznie dużej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $0 < a_n$ i $0 < b_n$ oraz że istnieje skończona, dodatnia granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Przy tych założeniach szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny.

Dowód. Załóżmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g$ oraz że $0 < g < +\infty$. Niech c, d będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $0 < c < g < d$. Wtedy dla dostatecznie dużych n zachodzą nierówności $0 < b_n$ i $c < \frac{a_n}{b_n} < d$. Wobec tego dla dostatecznie dużych n mamy $c \cdot b_n < a_n < d \cdot b_n$. Jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum c \cdot b_n$ jest zbieżny i wobec tego szereg $\sum b_n$ jest zbieżny. Jeśli szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum d \cdot b_n$ jest zbieżny i wobec tego szereg $\sum a_n$ jest zbieżny. Dowód został zakończony. ■

Założenie istnienia granicy skończonej, dodatniej można interpretować tak: wyrazy szeregów dążą do 0 w tym samym tempie (o ile do 0 dążą), z tego założenia wynika, iż albo oba są zbieżne albo oba — rozbieżne. Podamy jeszcze jedną wersję twierdzenia pozwalającego porównywać szeregi o wyrazach dodatnich.

Twierdzenie 16.25 (drugie kryterium porównawcze)
Załóżmy, że od pewnego miejsca wyrazy szeregów $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są dodatnie oraz $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$. W tej sytuacji

(16.25.1) ze zbieżności szeregu $\sum b_n$ wynika, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny;

(16.25.2) z rozbieżności szeregu $\sum b_n$ wynika, że szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny;

Dowód. Nierówność $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ można przepisać w postaci $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leqslant \frac{a_n}{b_n}$. Znaczy to, że ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ jest nierosnący i ma wyrazy dodatnie, więc jest też ograniczony z góry przez pewną liczbę rzeczywistą $M > 0$ (jeśli „od pewnego miejsca” znaczy „od początku”, to można przyjąć, że $M = \frac{a_0}{b_0}$). Wobec tego ma miejsce nierówność $0 \leqslant a_n \leqslant M \cdot b_n$. Z tej nierówności oraz z kryterium porównawczego wynika teza. Dowód został zakończony. ■

Na ostatnią wersję kryterium porównawczego spojrzeć można tak: wyrazy szeregu $\sum a_n$ dążą do 0 szybciej niż wyrazy szeregu $\sum b_n$, więc jeśli szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, to również szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, jeśli natomiast szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny, to również szereg $\sum b_n$ jest rozbieżny – oczywiście myślimy tylko o szeregach, których wyrazy dążą do 0, bo inne są rozbieżne.

Najprostsze kryteria umożliwiają porównywać, niekoniecznie jawnie, badany szereg z szeregiem geometrycznym.

Twierdzenie 16.26 (kryterium ilorazowe d'Alemberta)
Jeśli wyrazy szeregu $\sum a_n$ są dodatnie i granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ istnieje , to jeśli

16.26.1 $q > 1$, to szereg jest rozbieżny;

16.26.2 $q < 1$, to szereg jest zbieżny.

Dowód. Jeśli $q > 1$, to od pewnego momentu zachodzi nierówność $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, to znaczy $a_{n+1} > a_n$. Wobec tego od pewnego momentu ciąg liczb dodatnich (a_n) jest rosnący, więc jeśli jest zbieżny, to z pewnością nie do 0 — nie jest więc spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu. Załóżmy teraz, że $q < 1$. Niech r oznacza dowolną liczbę większą niż q i jednocześnie mniejszą niż 1, powiedzmy $r = \frac{1+q}{2}$. Wtedy dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r = \frac{r^{n+1}}{r^n}$. Szereg geometryczny $\sum r^n$ jest zbieżny, więc również szereg $\sum a_n$ jest zbieżny — stosujemy drugie kryterium porównawcze. Dowód został zakończony. ■

Obliczanie granicy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ ma na celu ustalenie z jakim szeregiem geometrycznym mamy porównać szereg $\sum a_n$: dla ustalenia zbieżności wybieramy szereg o ilorazie r nieco większym niż q, dla ustalenia rozbieżności — o ilorazie r nieco mniejszym niż q (**nieco** oznacza, że liczby r i q znajdują się po tej samej stronie liczby 1).

W przypadku $q = 1$ szereg może być rozbieżny, np. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ lub zbieżny, np. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Niestety, w wielu przypadkach granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ nie istnieje.

A.Cauchy podał inne kryterium zbieżności szeregów związane z szeregami geometrycznymi.

Twierdzenie 16.27 (Kryterium pierwiastkowe Cauchy'ego)
Jeśli szereg $\sum a_n$ ma wyrazy nieujemne i granica $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ istnieje, to

16.27.1 jeśli $q > 1$, to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny;
16.27.2 jeśli $q < 1$, to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

Dowód. Jeśli $q > 1$ to dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $\sqrt[n]{a_n} > 1$ i wobec tego $a_n > 1$. Wobec tego ciąg (a_n) nie jest zbieżny do 0. Jeśli $q < 1$ i r jest liczbą mniejszą niż 1 i jednocześnie większą niż q, np. $r = \frac{1+q}{2}$, to dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $\sqrt[n]{a_n} < r$, czyli $a_n < r^n$. Stosujemy kryterium porównawcze: szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, bo zbieżny jest szereg geometryczny $\sum r^n$. Dowód został zakończony. ∎

Podobnie jak w przypadku kryterium ilorazowego, jeśli granica $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ jest równa 1, to na temat zbieżności szeregu $\sum a_n$ powiedzieć nic nie można o czym świadczą przykłady przywołane po poprzednim twierdzeniu.

Wyjaśnijmy jeszcze, dlaczego obliczać należy tę akurat granicę. Chodzi o porównanie z szeregiem geometrycznym, więc staramy się obliczyć w przybliżeniu jego iloraz. Metoda d'Alemberta jest najprostsza i najbardziej naturalna. Druga metoda znalezienia q: jeśli dany jest ciąg geometryczny (aq^n), $a > 0$, to obliczamy pierwiastek stopnia n z wyrazu aq^n. Otrzymujemy $q\sqrt[n]{a}$. Co prawda wynikiem nie jest q, ale $\lim_{n\to\infty} q\sqrt[n]{a} = q$.

Uwaga 16.28 W obu kryteriach można nieco osłabić założenia. Zamiast zakładać, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ można założyć, że istnieje taka liczba $r\in(0,1)$, że dla prawie wszystkich numerów n zachodzi nierówność $\frac{a_{n+1}}{a_n}<r$. Zamiast zakładać, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ można założyć, że dla dostatecznie dużych numerów n spełniona jest nierówność $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1$. Analogiczne uwagi w odniesieniu do kryterium pierwiastkowego Czytelnik sformułuje samodzielnie. ■

Uwaga 16.29 Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}>1$, to $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$, zatem nie jest prawdą, że $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, (albo $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, albo $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$, albo ta granica nie istnieje) a to oznacza, że szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny. Podobnie, jeśli $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}>1$, to na pewno nie jest prawdą, że $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, zatem szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny. ■

Uwaga 16.30
Nadmienić wypada, że kryterium pierwiastkowe Cauchy'ego jest nieco ogólniejsze niż kryterium ilorazowe d'Alemberta. Prawdziwe jest mianowicie następujące twierdzenie: Jeśli (a_n) jest ciągiem liczb dodatnich, takim że istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, to również ciąg $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ ma granicę i jest nią q.

Bez trudu można skonstruować ciąg (a_n) liczb dodatnich, dla którego granica $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, a granica $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ nie istnieje: $1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{3},\ 3,\ \frac{1}{4},\ 4,\ \ldots$ Szczegółami zechce Czytelnik zająć się sam. ■

Twierdzenie 16.31 (Kryterium Cauchy'ego o zagęszczaniu)
Załóżmy, że ciąg (a_n) jest nierosnący oraz że jego wyrazy są dodatnie. W tej sytuacji szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n a_{2^n}$ jest zbieżny.

Dowód. Załóżmy, że szereg $a_0+a_1+a_2+\ldots$ jest zbieżny.

Trzeba wykazać zbieżność szeregu $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$.
Mamy $2a_4 \leqslant a_3 + a_4$ (bo $a_4 \leqslant a_3$),
$4a_8 \leqslant a_5 + a_6 + a_7 + a_8$ (bo a_8 to najmniejsza z liczb a_5, a_6, a_7, a_8),
$8a_{16} \leqslant a_9 + a_{10} + \cdots + a_{15} + a_{16}$ itd. Stąd wynika, że
$a_2 + 2a_4 + 4a_8 + 8a_{16} + \ldots \leqslant a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \ldots <$
$< +\infty$, czyli szereg $a_2 + 2a_4 + 4a_8 + 8a_{16} + \ldots$ ma skończoną sumę. Po pomnożeniu go przez 2 otrzymamy szereg zbieżny, a jest nim szereg $2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + 16a_{16} + \ldots$, czyli szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ jest zbieżny, a wobec tego również szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ jest zbieżny — zmiana **skończenie wielu** wyrazów na zbieżność wpływu nie ma (choć może zmienić sumę szeregu zbieżnego).

Udowodnimy teraz wynikanie w druga stronę. Zakładamy, że szereg $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$ jest zbieżny. Mamy
$2a_2 \geqslant a_2 + a_3$, $4a_4 \geqslant a_4 + a_5 + a_6 + a_7$, $8a_8 \geqslant a_8 + a_9 + a_{10} +$
$+ a_{11} + a_{12} + a_{13+} a_{14} + a_{15}$, itd. Stąd wynika, że

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{14} + a_{15} + \ldots \leqslant$$
$$\leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots < +\infty ,$$

co oznacza, że szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, czyli również szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Dowód został zakończony. ■

W dowodzie kryterium Cauchy'ego o zagęszczaniu szacowaliśmy sumę jednego szeregu przez sumę drugiego, o którym wiedzieliśmy, że jest zbieżny. Podamy kilka przykładów pokazujących, jak można szacować szeregi o wyrazach dodatnich.

Przykład 16.11 Niech $k > \ell > 1$ będą liczbami naturalnymi. Szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[\ell]{\frac{1}{n^k}}$ jest zbieżny.

Wyrazy szeregu dążą do 0 i tworzą ciąg malejący, więc możemy użyć kryterium Cauchy'ego o zagęszczaniu: szereg $\sum \sqrt[\ell]{\frac{1}{n^k}}$ zastąpimy szeregiem $\sum 2^n \sqrt[\ell]{\frac{1}{(2^n)^k}} = \sum \sqrt[\ell]{\frac{1}{(2^n)^{k-\ell}}} = \sum \left(\frac{1}{\sqrt[\ell]{2^{k-\ell}}}\right)^n$. Otrzymaliśmy zatem szereg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{\sqrt[\ell]{2^{k-\ell}}}$. Ten iloraz jest dodatni i mniejszy niż 1, bo $k > \ell$, zatem szereg geometryczny, a wraz z nim wyjściowy, jest zbieżny. ∎

Przykład 16.12 Niech $1 \leqslant k \leqslant \ell$ będą liczbami naturalnymi. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[\ell]{\frac{1}{n^k}}$ jest rozbieżny.

Postępując tak, jak w poprzednim przykładzie sprowadzamy problem do zbieżności szeregu geometrycznego o ilorazie $\sqrt[\ell]{2^{\ell-k}} \geqslant 1$, więc rozbieżnego. ∎

Przykład 16.13 Dla dowolnej liczby rzeczywistej x następujący szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ jest bezwzględnie zbieżny.

Dla $x = 0$ wszystkie wyrazy z wyjątkiem pierwszego są zerami, więc zbieżność jest oczywista. Załóżmy, że $x \neq 0$. Mamy

$$\frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{(n)!}} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1\,,$$

więc zapowiedziana teza wynika z kryterium ilorazowego. ∎

Przykład 16.14 Dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in (-1,1)$ następujący szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ jest bezwzględnie zbieżny. Znów skorzystamy z kryterium, d'Alemberta (ilorazowego). Iloraz dwóch kolejnych wyrazów jest równy $x \cdot \frac{n}{n+1}$. Mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \left| x \cdot \frac{n}{n+1} \right| = |x|$. Stąd zbieżność w przypadku $|x| < 1$ i rozbieżność w przypadku $|x| > 1$. Dla -1 otrzymujemy szereg anharmoniczny, który jest zbieżny, a dla $x = 1$ — harmoniczny, który jest rozbieżny. ∎

Przykład 16.15 Niech $\binom{a}{0} = 1$ dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$, niech $\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{n!}$ dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$. Dla dowolnej liczby $x \in (-1,1)$ szereg

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$ jest bezwzględnie zbieżny. Znów skorzystamy z kryterium ilorazowego d'Alemberta. Mamy

$$\left|\frac{\binom{a}{n+1}x^{n+1}}{\binom{a}{n}x^n}\right| = \left|\frac{(a-n)x}{n+1}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|\,,$$

co dowodzi zapowiedzianej tezy. Przy okazji: jeśli $|x|>1$, to szereg jest rozbieżny. Trzeba trochę uważać, bo jeśli a jest liczbą naturalną i $n>a$, to $\binom{a}{n}=0$, więc nie można stosować kryterium ilorazowego. Jednak wtedy prawie wszystkie wyrazy szeregu są równe 0, zatem jest on zbieżny dla wszystkich liczb rzeczywistych $x\in(-1,1)$. ■

Przykład 16.16 Jeśli $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest takim ciągiem liczb rzeczywistych, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ jest zbieżny i spełniona jest nierówność $|x|<|x_0|$, to szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ jest bezwzględnie zbieżny. Ponieważ szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ jest zbieżny, więc $\lim\limits_{n\to\infty}a_nx_0^n=0$, zatem istnieje taka liczba $M>0$, że $\left|a_nx_0^n\right|\leqslant M$. Mamy zatem

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n\,x^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\left|a_nx_0^n\right|\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqslant M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n < +\infty\,.$$

Ostatnia nierówność wynika z tego, że jeśli $0<q<1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ jest zbieżny (kryterium ilorazowe d'Alemberta), przyjmujemy $q=\left|\frac{x}{x_0}\right|$. Stwierdzenie zostało udowodnione.

Szeregi postaci $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ nazywamy potęgowymi o środku w zerze.

Z tego, co udowodniliśmy w tym przykładzie wynika, że zbiór punktów zbieżności szeregu potęgowego o środku w punkcie 0 jest przedziałem o środku w punkcie 0. Później przekonamy się, że nic więcej ogólnie na temat tego przedziału powiedzieć się nie da. Przedział może się nawet zdegenerować do punktu 0, np.

jedyną liczbą x, dla której zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ jest 0.
Dodajmy jeszcze, że suma i iloczyn dwóch szeregów potęgowych są szeregami potęgowymi. Do tego tematu powrócimy w dalszej części tej książki jeszcze kilka razy. Przekonamy się o tym, że ważne funkcje można zapisywać w postaci sumy szeregów tego typu i ułatwia to poznawanie ich własności. ■

Przykład 16.17 Korzystając z twierdzenia z poprzedniego przykładu można zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, którym już zajmowaliśmy się (por. przykład 16.13), nieco inaczej. Dla $x=-1$ ten szereg jest zbieżny, więc jest zbieżny dla każdego takiego x, że $|x| < |-1| = 1$. Dla $x = 1$ szereg jest rozbieżny, zatem jest też rozbieżny dla każdego takiego x, że $|x| > |1| = 1$. ■

Podamy jeszcze trzy kryteria zbieżności szeregów, ale tym razem o wyrazach zmiennych znaków.

Twierdzenie 16.32 (Kryterium Abela – Dirichleta)
Niech (a_n) będzie malejącym ciągiem liczb dodatnich.

16.32.1 (Dirichlet) Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ i ciąg sum częściowych szeregu $\sum b_n$ jest ograniczony, to szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.

16.32.1 (Abel) Jeśli szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum a_n b_n$ też jest zbieżny.

Dowód. Niech $s_n = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ i $S_n^j = s_{n+j} - s_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+j}$. Zachodzi równość $a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{n+k}b_{n+k} = S_n^1 a_{n+1} + (S_n^2 - S_n^1)a_{n+2} + (S_n^3 - S_n^2)a_{n+3} + \cdots + (S_n^k - S_n^{k-1})a_{n+k} = S_n^1(a_{n+1} - a_{n+2}) + S_n^2(a_{n+2} - a_{n+3}) + \cdots + S_n^{k-1}(a_{n+k-1} - a_{n+k}) + S_n^k a_{n+k}$. Jeśli $|s_m| \leqslant M$ dla każdego m, to $|S_n^j| = |s_{n+j} - s_n| \leqslant 2M$, więc
$$|a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{n+k}b_{n+k}| \leqslant 2M\big(|a_{n+1} - a_{n+2}| + |a_{n+2} - a_{n+3}| + \cdots + |a_{n+k-1} - a_{n+k}| + a_{n+k}\big) = 2Ma_{n+1}.$$
Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, to spełniony jest warunek Cauchy'ego zbieżności szeregu $\sum a_n b_n$, co kończy dowód twierdzenia w przypadku

Dirichleta.
Jeśli szereg $\sum b_n$ jest zbieżny a ε jest liczbą dodatnią, to spełniony jest warunek Cauchy'ego, czyli dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n nierówność $|S_n^j| = |s_{n+j} - s_n| < \varepsilon$ zachodzi dla $j = 1, 2, \ldots$. Wobec tego

$$|a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{n+k}b_{n+k}| \leqslant \varepsilon\big(|a_{n+1} - a_{n+2}| + \\ + |a_{n+2} - a_{n+3}| + \cdots + |a_{n+k-1} - a_{n+k}|\big) + \varepsilon a_{n+k} = \varepsilon a_{n+1}\,.$$

Wynika stąd i z ograniczoności ciągu (a_n) wynika od razu, że szereg $\sum a_n b_n$ spełnia warunek Cauchy'ego, jest więc zbieżny. ■

Uwaga 16.33 Można wywnioskować kryterium Abela z kryterium Dirichleta i autor ma nadzieję, że Czytelnik zechce to zrobić.■

Twierdzenie 16.34 (Leibniza)
Jeśli ciąg (a_n) jest monotoniczny i zbieżny do 0, to szereg

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

jest zbieżny.
Dowód. Wynika to natychmiast z kryterium Dirichleta: ciąg zbieżny do 0 to $\left(\frac{1}{n}\right)$, a szereg o ograniczonych sumach częściowych to $\sum(-1)^n$. ■

Uwaga 16.35
Jeśli ciąg nierosnący $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ma dodatnie wyrazy i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, to dla każdej liczby naturalnej $m \geqslant 1$ zachodzą nierówności:

$$a_0 - a_1 + \cdots + a_{2m-2} - a_{2m-1} < \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ oraz}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < a_0 - a_1 + \cdots + a_{2m-2} - a_{2m-1} + a_{2m}\,.$$

To są łatwe do bezpośredniego udowodnienia nierówności i w dodatku często stosowane. Czytelnik powinien je udowodnić. ■

Zajmiemy się teraz twierdzeniem o mnożeniu szeregów. Mnożąc dwie *skończone* sumy liczb

$$(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)(b_0 + b_1 + \cdots + b_n)$$

otrzymujemy sumę wszystkich iloczynów postaci $a_i b_j$, np. dla

$n = 2$ mamy:
$(a_0 + a_1 + a_2)(b_0 + b_1 + b_2) =$
$= a_0b_0 + a_0b_1 + a_0b_2 + a_1b_0 + a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_0 + a_2b_1 + a_2b_2\,.$
Oczywiście otrzymaną sumę dziewięciu składników można porządkować na wiele sposobów (9!=362880). W przypadku skończonej liczby składników kolejność dodawania nie ma żadnego wpływu na ich sumę. To samo dotyczy nieskończenie wielu składników pod warunkiem rozważania wyrazów szeregu bezwzględnie zbieżnego. W przypadku szeregu, który nie jest bezwzględnie zbieżny należy jednak być ostrożnym. Jest jasne, że mnożąc dwa szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ powinniśmy otrzymać szereg, wśród wyrazów którego są wszystkie iloczyny postaci a_ib_j uporządkowane w jakiś sensowny sposób. Sugerowany rezultat wygodnie jest sformułować tak:

Twierdzenie 16.36 (Mertensa o mnożeniu szeregów)
Załóżmy, że szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są zbieżne, przy czym co najmniej jeden z nich jest zbieżny bezwzględnie. Niech

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0 = \sum_{i=0}^{n} a_ib_{n-i}\,.$$

Wtedy szereg $\sum c_n$ jest zbieżny i zachodzi równość:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,.$$

jeśli oba szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są zbieżne bezwzględnie, to również szereg $\sum c_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

Dowód. Oznaczmy sumy częściowe: $s_n^a = a_0 + a_1 + \cdots + a_n\,,$ $s_n^b = b_0 + b_1 + \cdots + b_n\,,$ $s_n^c = c_0 + c_1 + \cdots + c_n = \sum_{i+j\leqslant n} a_ib_j\,.$ Istnieją skończone granice $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^a = A$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^b = B\,.$ Mamy wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^c = AB = \lim\limits_{n\to\infty} s_n^a \cdot \lim\limits_{n\to\infty} s_n^b\,.$ Nie ma znaczenia, o którym szeregu założymy, że jest bezwzględnie zbieżny. Załóżmy, że $\sum |a_n| < +\infty\,.$ Zauważmy, że:

$$s_n^c = \sum_{i+j\leqslant n} a_ib_j = a_0(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) + a_1(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}) +$$
$$+ a_2(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-2}) + \cdots + a_nb_n =$$
$$= a_0s_n^b + a_1s_{n-1}^b + a_2s_{n-2}^b + \cdots + a_ns_0^b\,.$$ Wobec tego

$$s_n^a s_n^b - s_n^c = a_0 s_n^b + a_1 s_n^b + a_2 s_n^b + \cdots + a_n s_n^b - s_n^c =$$
$$= a_1\left(s_n^b - s_{n-1}^b\right) + a_2\left(s_n^b - s_{n-2}^b\right) + + \cdots + a_n\left(s_n^b - s_0^b\right).$$

Ponieważ szeregi $\sum |a_n|$ oraz $\sum b_n$ są zbieżne, więc ich ciągi sum częściowych są ograniczone. Oznacza to, że istnieje taka liczba $M > 0$, że dla każdego m prawdziwe są nierówności:

$$|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_m| \leqslant M\,, \qquad |b_0 + b_1 + \cdots + b_m| \leqslant M\,.$$

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Ze zbieżności szeregu wynika, że spełnia on warunek Cauchy'ego, więc istnieje taka liczba naturalna n_ε, że jeśli $k > m > n_\varepsilon$, to $|s_k^b - s_m^b| < \frac{\varepsilon}{4M}$ oraz

$$|a_{n_\varepsilon+1}| + |a_{n_\varepsilon+2}| + \ldots < \tfrac{\varepsilon}{8M}\,, \qquad \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n - s_m^a \cdot s_m^b\right| < \tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$

Wobec tego dla $m > 2n_\varepsilon$ mamy $\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n - s_m^c\right| \leqslant$

$$\leqslant \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n - s_m^a \cdot s_m^b\right| + \left|s_m^a s_m^b - s_m^c\right| < \tfrac{\varepsilon}{2} +$$
$$+|a_1|\cdot|s_m^b - s_{m-1}^b| + |a_2|\cdot|s_m^b - s_{m-2}^b| + \cdots + |a_{n_\varepsilon}|\cdot|s_m^b - s_{m-n_\varepsilon}^b| +$$
$$+|a_{n_\varepsilon+1}|\cdot|s_m - s_{m-n_\varepsilon-1}| + |a_{n_\varepsilon+2}|\cdot|s_m - s_{m-n_\varepsilon-2}| + \cdots +$$
$$+|a_m|\cdot|s_m - s_0| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2} + (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n_\varepsilon}|)\cdot\tfrac{\varepsilon}{4M} + (|a_{n_\varepsilon+1}| +$$
$$+|a_{n_\varepsilon+2}| + \cdots + |a_m|)\cdot 2M \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2} + M\cdot\tfrac{\varepsilon}{4M} + \tfrac{\varepsilon}{8M}\cdot 2M = \varepsilon\,.$$

Z definicji granicy ciągu wynika, że $\lim\limits_{m\to\infty} s_m^c = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

Pozostaje jeszcze zauważyć, że jeśli oba szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są bezwzględnie zbieżne, to również szereg $\sum c_n$ jest bezwzględnie zbieżny. Wynika to natychmiast z już udowodnionej części twierdzenia i warunku Cauchy'ego. Dowód został zakończony. ■

Uwaga 16.37

Czytelnik może się przekonać, że istnieją szeregi zbieżne $\sum a_n$ i $\sum b_n$, dla których szereg $\sum c_n$ jest rozbieżny. Wystarczy przyjąć $a_n = b_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ i przekonać się, że w tym przypadku ciąg (c_n) nie jest zbieżny do 0, więc szereg $\sum c_n$ jest rozbieżny. Z drugiej strony, jeśli szeregi $\sum a_n$, $\sum b_n$ i $\sum c_n$ są zbieżne, to $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ — nie podamy dowodu tego twierdzenia, bo nie będziemy z niego korzystać. Opisane twierdzenia wskazują na to, że zaproponowana przez Cauchy'ego kolejność sumowania iloczynów $a_i b_j$, jest właściwa. ■

Definicja 16.38 (iloczynu szeregów)

Niech $c_m = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i b_{m-i}$ dla każdego naturalnego m. Szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ nazywamy iloczynem Cauchy'ego szeregów $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$. ■

Prawdziwe jest

Twierdzenie 16.39 (Cesàro)

Jeśli szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ są zbieżne i dla każdego n zachodzą wzory $c_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$, $s_n = c_0 + c_1 + \dots + c_n$, to

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n}\big(s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}\big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,. \ ■$$

Twierdzenie Cesàro podaliśmy bez dowodu, ale wypada napisać, że jego dowód nie jest trudny — można go samodzielnie przeprowadzić, do czego zachęcamy Czytelników. Właśnie z tego twierdzenia wynika zdanie wypowiedziane w uwadze poprzedzającej twierdzenie o mnożeniu szeregów.

Przykład 16.18 Jak już wiemy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ jest zbieżny bezwzględnie dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$. Udowodnimy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(x+y)^n}{n!}\,.$$

Skorzystamy oczywiście z twierdzenia o mnożeniu szeregów. Wyraz iloczynu szeregów to

$$\tfrac{1}{0!} \cdot \tfrac{y^n}{n!} + \tfrac{x}{1!} \cdot \tfrac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \tfrac{x^2}{2!} \cdot \tfrac{y^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + \tfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \tfrac{y}{1!} + \tfrac{x^n}{n!} \cdot \tfrac{1}{0!} =$$

$$= \tfrac{1}{n!}\Big(\tfrac{n!}{0!\cdot n!} \cdot y^n + \tfrac{n!}{1!\cdot(n-1)!} \cdot x \cdot y^{n-1} + \tfrac{n!}{2!\cdot(n-2)!} \cdot x^2 \cdot y^{n-2} + \dots +$$

$+\frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!}\cdot x^{n-1}\cdot y+\frac{n!}{n!\cdot 0!}\cdot x^{n}\Big)=\frac{1}{n!}(x+y)^{n}$ — ostatnia równość wynika natychmiast z dwumianu Newtona. Dowodzona równość to teraz prosty wniosek z twierdzenia o mnożeniu szeregów. ■

Przykład 16.19 Korzystając na przykład z kryterium ilorazowego d'Alemberta dowodzimy, że dla każdej liczby rzeczywistej x oba szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ są zbieżne. [16.1] Sumę pierwszego z nich oznaczmy przez $s(x)$, a drugiego — przez $c(x)$. Wtedy prawdziwe są równości:

a. $c(x)^2+s(x)^2=1$ dla każdej liczby $x\in\mathbb{R}$;

b. $c(x)c(y)-s(x)s(y)=c(x+y)$ dla dowolnych $x,y\in\mathbb{R}$;

c. $c(x)s(y)+s(x)c(y)=s(x+y)$ dla dowolnych $x,y\in\mathbb{R}$.

Skorzystamy znów z twierdzenia o mnożeniu szeregów. Definiujemy: $a_n=(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $b_n=(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Mamy więc

$$A_n=a_0a_n+a_1a_{n-1}+a_2a_{n-2}+\cdots+a_na_0=$$
$$=(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\left(\frac{(2n)!}{0!\cdot(2n)!}+\frac{(2n)!}{2!\cdot(2n-2)!}+\frac{(2n)!}{4!\cdot(2n-4)!}+\cdots+\frac{(2n)!}{(2n)!\cdot 0!}\right)\ \text{oraz}$$
$$B_n=b_0b_n+b_1b_{n-1}+b_2b_{n-2}+\cdots+b_nb_0=$$
$$=(-1)^{n}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(\frac{(2n+2)!}{1!\cdot(2n+1)!}+\frac{(2n+2)!}{3!\cdot(2n-1)!}+\frac{(2n+2)!}{5!\cdot(2n-3)!}+\cdots+\frac{(2n+2)!}{(2n+1)!\cdot 1!}\right).$$

Z podanych wzorów wynika, że $A_0=1$ oraz, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 1$ prawdziwy jest wzór: $A_n+B_{n-1}=$

$$=(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\left(\frac{(2n)!}{0!\cdot(2n)!}-\frac{(2n)!}{1!\cdot(2n-1)!}+\frac{(2n)!}{2!\cdot(2n-2)!}-\frac{(2n)!}{3!\cdot(2n-3)!}+\right.$$
$$\left.+\frac{(2n)!}{4!\cdot(2n-4)!}-\frac{(2n)!}{5!\cdot(2n-5)!}+\cdots+\frac{(2n)!}{(2n)!\cdot 0!}\right)=(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}(1-1)^{n}=0.$$

Stąd równość **a.** wynika natychmiast. Następne dwie można udowodnić w taki sam sposób. Czytelnik powinien co najmniej jedną z nich wykazać, by sprawdzić, czy wszystko dobrze rozumie. ■

Przykład 16.20 Przyjmijmy, że $\binom{a}{0}=1$ dla każdej liczby rzeczywistej a oraz $\binom{a}{n}=\frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{n!}$ dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby naturalnej $n\geqslant 1$. Te definicje rozszerzają definicję symbolu Newtona znaną z poprzedniej nauki. Zauważmy, że zachodzą następujące równości: $\binom{a}{n}=\frac{a}{n}\cdot\binom{a-1}{n-1}$

[16.1] Tu przyjmujemy, że $x^0=1$.

oraz $\binom{a}{n}+\binom{a}{n+1}=\binom{a+1}{n+1}$. Można te równości udowodnić korzystając z umiejętności dodawania ułamków, ale można też powiedzieć, że obie strony każdej z nich są wielomianami zmiennej a. Wartości tych wielomianów pokrywają się dla każdej liczby całkowitej $a \geqslant n+1$. Dwa wielomiany, które przyjmują te same wartości w nieskończenie wielu punktach, są równe, bo ich różnica ma nieskończenie wiele pierwiastków, a jedynym wielomianem, który ma ich aż tyle jest wielomian zerowy.
Przypomnijmy jeszcze, że jeśli a jest dodatnią liczbą całkowitą, to $\quad (1+x)^a=\sum\limits_{n=0}^{a}\binom{a}{n}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$ — to znany wzór Newtona. Dopisane nieco sztucznie składniki są równe 0, więc nie zmieniają sumy.

Teraz zajmiemy się szeregiem $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$ nie zakładając, że liczba a jest naturalna. W dalszym ciągu a oznacza dowolną liczbę rzeczywistą. Wiemy już, że w tej sytuacji szereg jest bezwzględnie zbieżny, gdy $|x|<1$, wykazaliśmy to w jednym z przykładów poprzedzających twierdzenie o mnożeniu szeregów.

Teraz udowodnimy, że $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{b}{n}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{a+b}{n}x^n$.
Ta równość zachodzi oczywiście dla dowolnych liczb naturalnych a,b, bowiem $(1+x)^a\cdot(1+x)^b=(1+x)^{a+b}$.

Ponieważ oba szeregi są bezwzględnie zbieżne, więc możemy skorzystać z twierdzenia o mnożeniu szeregów. n–ty wyraz iloczynu tych szeregów wygląda tak:

$$x^n\left(\binom{a}{0}\binom{b}{n}+\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}+\binom{a}{2}\binom{b}{n-2}+\cdots+\binom{a}{n}\binom{b}{0}\right).$$

Wystarczy wykazać, że prawdziwa jest równość

$$\binom{a}{0}\binom{b}{n}+\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}+\binom{a}{2}\binom{b}{n-2}+\cdots+\binom{a}{n}\binom{b}{0}-\binom{a+b}{n}=0.$$

Znów możemy zauważyć, że przy ustalonym b, np. $b>n$ i $b\in\mathbb{N}$ lewa strona równości jest wielomianem stopnia nie większego niż n zmiennej a. Każda liczba całkowita $a>n$ jest pierwiastkiem tego wielomianu, bo równość zachodzi dla $a,b>n$, jeśli $a,b\in\mathbb{N}$. Wielomian ma więc nieskończenie wiele pierwiastków, więc jest to wielomian zerowy. Udowodniliśmy już, że równość

$$\binom{a}{0}\binom{b}{n}+\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}+\binom{a}{2}\binom{b}{n-2}+\cdots+\binom{a}{n}\binom{b}{0}-\binom{a+b}{n}=0$$

jest spełniona gdy b jest liczbą całkowitą większą niż n a a jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Teraz potraktujemy to wyrażenie jako wielomian zmiennej b przy ustalonym $a\in\mathbb{R}$. Znów mamy do czynienia z wielomianem stopnia nie większego niż n, który ma nieskończenie wiele pierwiastków. Jest więc wielomianem zerowym, a to oznacza, że równość $\binom{a}{0}\binom{b}{n}+\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}+\binom{a}{2}\binom{b}{n-2}+\cdots+\binom{a}{n}\binom{b}{0}-\binom{a+b}{n}=0$ jest prawdziwa dla dowolnych rzeczywistych a i b oraz dowolnej liczby naturalnej n.

Na przykład prawdziwy jest wzór;

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2+1/2}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1}{n}=1+x\,.$$

Ta równość sugeruje, że $\sqrt{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}x^n$. Do dowodu brak nam tylko tego, że $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}x^n\geqslant 0$ dla $x\in(-1,1)$. To wynika np. z równości

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/4}{n}x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/4}{n}x^n=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/4}{n}x^n\Big)^2,$$

bo kwadraty liczb rzeczywistych są nieujemne. Podobnie można udowodnić, że $\sqrt[k]{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{1/k}{n}x^n$ dla dowolnej liczby rzeczywistej $x\in(-1,1)$ i dowolnej liczby naturalnej k. Zachęcamy Czytelnika, by przekonał się, że $\frac{1}{(1+x)^k}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{-k}{n}x^n$ dla każdej liczby rzeczywistej $x\in(-1,1)$ i dowolnej liczby naturalnej k.

Szeregiem rozpatrywanym w tym przykładzie zajmował się I.Newton. a było wtedy dowolną liczbą i dlatego właśnie pojawiła się nazwa *dwumian Newtona*, „szkolny” dwumian Newtona był znany na długo przed poczęciem Isaaca Newtona. ■

Zadania

1. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,

jeśli $a_n =$

a. $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

ą. $(-1)^n \frac{n+1}{(n+2)\sqrt{n}}$;

c. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

ć. $\frac{2^n \cdot n!}{n^n}$;

d. $(-1)^{n(n+1)/2}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$;

e. $\frac{3^n \cdot n!}{n^n}$

ę. $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

f. $\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$;

g. $\frac{1}{1000n+1}$;

h. $\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$;

i. $\frac{(n!)^2}{2^n}$;

j. $\frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4+3n)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (2+4n)}$;

k. $\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$;

l. $\frac{n^5}{2^n+3^n}$;

ł. $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$;

m. $\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$;

n. $\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b}$, $a, b \in \mathbb{R}$;

ń. $\frac{((n+1)!)^n}{2! \cdot 4! \cdot 6! \cdot \ldots \cdot (2n)!}$;

o. $\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}\right)^k$, $k \in \mathbb{N}$;

ó. $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$;

p. $\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$;

r. $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$;

s. $\sqrt[n]{a} - 1$, $a > 0$;

ś. $\sqrt[n]{n} - 1$;

t. $\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2$;

u. $\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$;

w. $\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots(1+x^n)}$, $x \neq -1$;

x. $e - (1+1/n)^n$;

y. $n^k x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$;

z. $\frac{n! \cdot e^n}{n^{n+p}}$, $p \in \mathbb{N}$;

ż* $(-1)^{\lfloor n\sqrt{2} \rfloor} \frac{1}{n}$.

2. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeśli $a_n =$

a. $\dfrac{2^n x^{2^n}}{1 + x^{2^n}}$;

b. $\dfrac{x^{2^{n-1}}}{1 - x^{2^n}}$, $x \neq \pm 1$;

c. nq^n , $|q| < 1$

d. $n^2 q^n$, $|q| < 1$;

e. $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

f. $\frac{1}{n(n+3)(n+6)}$;

g. $\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$;

h. $\frac{1}{n(n+1)(n+3)(n+4)}$;

i. $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)} \cdot (\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$;

j. $\frac{n}{n^4+n^2+1}$;

k. $(-1)^n \frac{(2n+1)^3}{(2n+1)^4+4} = \frac{1^3}{1^4+4} - \frac{3^3}{3^4+4} + \frac{5^3}{5^4+4} - \frac{7^3}{7^4+4} + \cdots$.

3. Obliczyć sumę szeregu $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n-1}{n!}$.

4. Obliczyć sumę szeregu $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^n}\right)$.

5. $\displaystyle\sum_{p,q\geqslant 2}\frac{1}{p^q-1}$, tu każda liczba p^q występuje jeden raz nawet wtedy, gdy $4^2=2^4$.

6. Wykazać, że dla dowolnego szeregu zbieżnego $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ o wyrazach dodatnich istnieje taki ciąg liczb dodatnich (b_n), którego granicą jest ∞, że $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_n$ jest szeregiem zbieżnym. *Nie ma więc najwolniej zbieżnego szeregu.*

7. Wykazać, że dla dowolnego szeregu rozbieżnego $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ o wyrazach dodatnich istnieje ciąg taki liczb dodatnich (b_n), którego granicą jest 0, że $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_n$ jest szeregiem rozbieżnym. *Nie ma więc najwolniej rozbieżnego szeregu.*

8. Dowieść, że szereg $\sum a_n$ jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu (b_n) zbieżnego do 0 szereg $\sum a_nb_n$ jest zbieżny.

9. Dowieść, że jeśli (a_n) jest dowolnym ciągiem liczb dodatnich rzeczywistych, to szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$ jest zbieżny. Niech $P=\lim\limits_{n\to\infty}\big((1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)\big)$. Wyrazić sumę szeregu za pomocą $P\in[1,\infty]$.

10. Dowieść, że szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $a>-1$.

11. Dowieść, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n}$ jest zbieżny bezwzględnie wtedy i tylko wtedy, gdy $a \geqslant 0$.

12. Dowieść, że jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ jest zbieżny, to ciąg (a_n) ma skończoną granicę. Podać przykład świadczący o nieprawdziwości twierdzenia odwrotnego.

13. Dowieść, że jeśli (a_n) jest ściśle rosnącym ciągiem liczb dodatnich, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg (a_n) jest ograniczony.

14. Dowieść, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (b_n) zbieżnego do 0 szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

15. Dowieść, że jeśli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ i ciąg sum częściowych szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jest ograniczony, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

16. Dowieść, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny dla każdego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$.

17. Dowieść, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny dla każdego szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, którego ciąg sum częściowych jest ograniczony, wtedy i tylko wtedy, gdy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}-a_n| < \infty$ oraz $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

18! Niech $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = b_n$. Wykazać, że iloczyn szeregów $\sum a_n$ i $\sum b_n$ jest rozbieżny.

19. Udowodnić twierdzenie Cesàro.

20. Udowodnić, że jeśli oba szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ i ich iloczyn są zbieżne, to zachodzi równość

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0).$$

21! Udowodnić punkty **b.** i **c.** z przykładu 16.19.

22. Dowieść, że jeśli ciąg (a_n) składa się z liczb dodatnich oraz $1 < \displaystyle\lim_{n\to\infty} n\big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\big) = g$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Wsk.: porównać szereg $\sum a_n$ *z szeregiem* $\sum \frac{1}{\sqrt[\ell]{n^k}}$, $1 < \frac{k}{\ell} < g$.

23. Dowieść, że jeśli ciąg (a_n) składa się z liczb dodatnich oraz $1 > \displaystyle\lim_{n\to\infty} n\big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\big)$, to szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

24. Podać przykład takiego ciągu (a_n) o wyrazach dodatnich dodatnich, dla którego $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\big) = 1$ i szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

25. Podać przykład takiego ciągu (a_n) o wyrazach dodatnich dodatnich, dla którego $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\big) = 1$ i szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

26. Dowieść, że jeśli nierosnący ciąg (a_n) składa się z liczb dodatnich a szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

27. Dowieść, że jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, $b_n = \frac{a_0 + 2a_1 + \cdots + 2^n a_n}{2^{n+1}}$, to $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

28. Załóżmy, że wyrazy szeregu rozbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ są dodatnie i $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Dowieść, że szereg

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ jest rozbieżny; **b.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ jest rozbieżny;

c. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ jest zbieżny; **d.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 \cdot a_n}$ jest zbieżny;

e. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n \cdot a_n}$ może być zbieżny lub rozbieżny.

29. Niech wyrazy szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będą dodatnie. Udowodnić, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zbieżne są również szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} \sqrt{a_n} \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[k]{a_n \cdot a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{n+k-1}}\,.$$

30. Dowieść, że $|x| \leqslant \frac{1}{2} \implies \left|\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16}\right| < 0{,}005\,.$

31. Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje dokładnie jeden taki ciąg liczb całkowitych nieujemnych $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, że: dla każdego $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność $a_n \leqslant n-1$, przy czym jest ona jest ostra dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n, oraz $x = a_1 + \frac{1}{2!}a_2 + \frac{1}{3!}a_3 + \cdots$.

Dowieść, że $x \in \mathbb{Q}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla prawie wszystkich n zachodzi równość $a_n = 0$.

32. Dowieść, że jeśli $0 < x \leqslant 1$, to istnieje dokładnie jeden taki ciąg liczb naturalnych, że $1 < k_1 \leqslant k_2 \leqslant k_3 \leqslant \ldots$ oraz $x = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1 k_2} + \frac{1}{k_1 k_2 k_3} + \cdots$, przy czym liczba x jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba naturalna n_0, że dla $n \geqslant n_0$ zachodzi równość $k_n = k_{n_0}$.

33. Czy zbieżność szeregu $\sum a_n$ wynika z tego , że dla każdego $p \in \mathbb{N}$ zachodzi wzór $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}) = 0$?

34. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Czy wynika stąd zbieżność szeregu:

(a) $a_1 + a_2 + a_4 + a_3 + a_8 + a_7 + a_6 + a_5 + a_{16} + a_{15} + a_{14} + a_{13} + a_{12} + a_{11} + a_{10} + a_9 + a_{32} + \cdots + a_{17} + a_{64} + \cdots$;

(b) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_7 + a_6 + a_8 + a_9 + a_{11} + a_{13} + a_{15} + a_{10} + a_{12} + a_{14} + a_{16} + a_{17} + \cdots + a_{31} + a_{18} + \cdots + a_{32} + \cdots$?

35. W trzech rzędach ułożono zapałki: w pierwszym rzędzie a zapałek, w drugim — b zapałek, w trzecim — c zapałek. Grają dwie osoby. W każdym ruchu gracz bierze pewną liczbę zapałek z jednego tylko rzędu. Wygrywa ten, kto weźmie ostatnią zapałkę. Dowieść, że jeśli po zapisaniu liczb a, b, c w układzie dwójkowym okaże się, że suma cyfr występujących w tych liczbach na pewnej pozycji jest nieparzysta, to zaczynający gracz może wygrać niezależnie od poczynań przeciwnika.

FUNKCJE

Zaczniemy od dwu definicji dosyć ważnego pojęcia. Pierwszą wprowadzamy po to, by łatwiej można było formułować definicje i twierdzenia nie czyniąc różnicy między liczbami rzeczywistymi i symbolami nieskończonymi.

Definicja 17.1 (otoczenia punktu)

1.1 Jeśli $a \in \mathbb{R}$, to otoczeniem punktu a nazywany jest dowolny zbiór, który zawiera pewien przedział otwarty zawierający punkt a.

1.2 Jeśli $a = \infty$, to otoczeniem punktu $a = \infty$ nazywany jest dowolny zbiór, który zawiera pewną półprostą postaci (M, ∞).

1.3 Jeśli $a = -\infty$, to otoczeniem punktu $a = -\infty$ nazywany jest dowolny zbiór, który zawiera pewną półprostą postaci $(-\infty, M)$. ■

Definicja 17.2 (punktu skupienia zbioru)

Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ i niech $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\} =: \overline{\mathbb{R}}$. Mówimy, że a jest punktem skupienia zbioru A, jeśli w każdym otoczeniu punktu a znajduje się punkt zbioru $A \setminus \{a\}$. ■

Uwaga 17.3

Ponieważ otoczenia mogą być wybierane dowolnie, np. δ może być dowolną liczbą dodatnią, więc w każdym otoczeniu znajduje się nieskończenie wiele różnych punktów zbioru A. ■

Przykład 17.1 Niech (a_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych o granicy g. Każde otoczenie punktu g zawiera prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n). Wynika stąd, że jeśli dla nieskończenie wielu n zachodzi $g \neq a_n$, to g jest punktem skupienia zbioru $\{a_n\colon \ n \in \mathbb{N}\}$. ■

Przykład 17.2 Zbiór skończony nie ma punktów skupienia. ■

Przykład 17.3 Zbiór nieskończony A ma punkt skupienia. Wynika to z twierdzenia Bolzano–Weiestrassa, bo istnieje wtedy taki ciąg (a_n), że $a_n \in A$ dla każdego n i jeśli $n \neq m$, to $a_n \neq a_m$. Z ciągu (a_n) można wybrać podciąg, który ma granicę.

Ta granica jest punktem skupienia zbioru A. ■

Twierdzenie 17.4
Punkt $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ jest punktem skupienia zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki ciąg (a_n), że $a_n \in A \setminus \{a\}$ i $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Dowód. Jeśli $a \in \mathbb{R}$ jest punktem skupienia zbioru A, to dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje taka liczba $a_n \in A$, że $0 < |a_n - a| < \frac{1}{n}$. Z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że $\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$, czyli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Jeśli $a = \infty$, to dla każdej liczby naturalnej n istnieje taki punkt $a_n \in A$, że $a_n > n$. Wobec tego $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Przypadek $a = -\infty$ pozostawiam Czytelnikowi. Zakończyliśmy dowód ,,w jedną stronę". Wynikanie w przeciwną stronę jest jeszcze prostsze. ■

Przykład 17.4 Zbiór $\mathbb{N}$ złożony ze wszystkich liczb naturalnych ma dokładnie jeden punkt skupienia. Jest nim ∞. ■

Przykład 17.5 Punktami skupienia zbioru $\mathbb{Z}$ składającego się ze wszystkich liczb całkowitych są ∞ oraz $-\infty$. ■

Przykład 17.6 Punktami skupienia zbioru złożonego ze wszystkich liczb wymiernych są wszystkie liczby rzeczywiste, ∞ i $-\infty$. ■

Przykład 17.7 Punktami skupienia zbioru $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ są wszystkie liczby rzeczywiste, ∞ oraz $-\infty$. ■

Przykład 17.8 Niech $A = \{1 + (-1)^n + \frac{1}{n}\colon \quad n = 1, 2, \ldots\}$, Punktami skupienia zbioru są liczby 0 i 2. Wynika to z równości $0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + (-1)^{2n-1} + \frac{1}{2n-1}\right)$, $2 = \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + (-1)^{2n} + \frac{1}{2n}\right)$. Innych punktów skupienia ten zbiór nie ma, bo granicami różnowartościowych ciągów utworzonych z liczb ze zbioru A mogą być jedynie 0 i 2. ■

Definicja 17.5 (otoczeniowa granicy funkcji)
Niech $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją i niech a będzie punktem skupienia zbioru A. Punkt $g \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ nazywany jest granicą funkcji f w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy dla

każdego otoczenia V punktu g istnieje takie otoczenie U punktu a, że jeśli $x \in U$ i $x \neq a$, to $f(x) \in V$. Jeśli g jest granicą funkcji f w punkcie a, to piszemy $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. ■

Uwaga 17.6 Niech $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Przypomnijmy, że ciąg jest funkcją: a_1 to jej wartość w punkcie 1, a_2 — w punkcie 2, itd. Jest to funkcja określona na zbiorze liczb naturalnych, którego jedynym punktem skupienia jest ∞. Widać więc, że pojęcie granicy funkcji obejmuje też pojęcie granicy ciągu. ■

Twierdzenie 17.7 (o jednoznaczności granicy)
Granica funkcji, jeśli istnieje, jest wyznaczona jednoznacznie.

Dowód. Załóżmy, że $g_1 = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ i $g_2 = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Dla ustalenia uwagi załóżmy , że $g_1 < g_2$. Istnieją wtedy rozłączne otoczenia V_1 punktu g_1 i V_2 punktu g_2, np. $V_1 = (-\infty, c)$ i $V_2 = (c, \infty)$, gdzie $c \in (g_1, g_2)$. Istnieją więc takie otoczenia U_1 i U_2 punktu a, że jeśli $x \in U_1 \setminus \{a\}$, to $f(x) \in V_1$ a jeśli $x \in U_2 \setminus \{a\}$, to $f(x) \in V_2$. Ponieważ U_1 i U_2 są otoczeniami tego samego punktu a, więc $U_1 \cap U_2$ zawiera pewien przedział otwarty I, który nie zawiera punktu a. jeśli $x \in I$, to $f(x) \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$, co jest niemożliwe. ■

Definicję granicy można wypowiedzieć w nieco inny sposób.

Definicja 17.8 (Cauchy'ego granicy funkcji)
Niech p będzie punktem skupienia zbioru A, na którym określona jest funkcja f o wartościach rzeczywistych. Wzór $g = \lim\limits_{x\to p} f(x)$ ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jedna z następujących dziewięciu możliwości:

8.1 $g, p \in \mathbb{R}$. Wtedy $g = \lim\limits_{x\to p} f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jeśli $0 < |x - p| < \delta$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$.

8.2 $g \in \mathbb{R}$, $p = +\infty$. Wtedy $g = \lim\limits_{x\to p} f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba rzeczywista M taka, że jeśli $x > M$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$.

8.3 $g \in \mathbb{R}$, $p = -\infty$. Wtedy $g = \lim\limits_{x \to p} f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba rzeczywista M taka, że jeśli $x < M$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$.

8.4 $g = +\infty$, $p \in \mathbb{R}$. Wtedy $g = \lim\limits_{x \to p} f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby rzeczywistej M istnieje liczba rzeczywista $\delta > 0$ taka, że jeśli $0 < |x - p| < \delta$, to $f(x) > M$.

8.5 $g = +\infty$, $p = +\infty$. Wtedy $g = \lim\limits_{x \to p} f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby M istnieje liczba rzeczywista K taka, że jeśli $x > K$, to $f(x) > M$.

8.6 $g = +\infty$, $p = -\infty$. Wtedy $g = \lim\limits_{x \to p} f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby M istnieje liczba rzeczywista K taka, że jeśli $x < K$, to $f(x) > M$.

8.7 $g = -\infty$, $p \in \mathbb{R}$. Wtedy $g = \lim\limits_{x \to p} f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby rzeczywistej M istnieje liczba rzeczywista $\delta > 0$ taka, że jeśli $0 < |x - p| < \delta$, to $f(x) < M$.

8.8 $g = -\infty$, $p = +\infty$. Wtedy $g = \lim\limits_{x \to p} f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby M istnieje liczba rzeczywista K taka, że jeśli $x > K$, to $f(x) < M$.

8.9 $g = -\infty$, $p = -\infty$. Wtedy $g = \lim\limits_{x \to p} f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby M istnieje liczba rzeczywista K taka, że jeśli $x < K$, to $f(x) < M$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że $p, g \in \mathbb{R}$. Jeśli g jest granicą funkcji f w punkcie p i ε jest liczbą dodatnią , to przedział $V = (g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ jest otoczeniem g. Istnieje więc takie otoczenie U punktu p, że jeśli $x \in U$ i $x \neq p$, to $f(x) \in V$. Otoczenie U zawiera przedział otwarty, którego elementem jest p. Zmniejszając w razie potrzeby ten przedział możemy stwierdzić, że U zawiera przedział otwarty o środku p. Jeśli 2δ jest długością tego przedziału, to jest on równy $(p - \delta, p + \delta)$. Zdanie $x \in (p - \delta, p + \delta)$ i $x \neq p$ jest równoważne temu, że $0 < |x - p| < \delta$. Wykazaliśmy, że spełniony jest warunek 8.1.

Załóżmy, że spełniony jest warunek 8.1. Udowodnimy, że $g = \lim_{x\to p} f(x)$. Niech V będzie dowolnym otoczeniem liczby g. Zbiór V zawiera pewien przedział otwarty zawierający liczbę g. Zmniejszając ten przedział możemy stwierdzić, że zbiór V zawiera przedział o środku p, więc przedział postaci $(-\varepsilon,\varepsilon)$. Istnieje zatem taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $0 < |x-p| < \delta$, to $|f(x)-g| < \varepsilon$, więc $f(x) \in V$. Przyjmując, że $U = (p-\delta, p+\delta)$ kończymy dowód tego, że jeśli spełniony jest warunek 8.1, to $g = \lim_{x\to p} f(x)$.

Uzasadnienie prawdziwości twierdzenia w pozostałych przypadkach pozostawiamy Czytelnikowi. ■

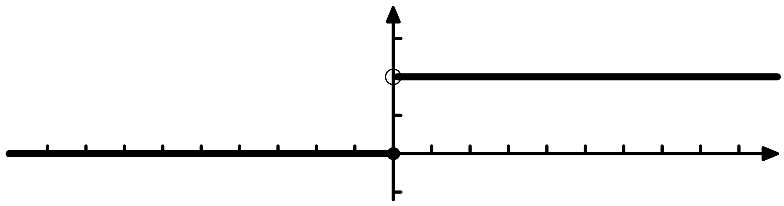
Przykład 17.9 Niech $f(x) = \lfloor -x^2 \rfloor$ dla $x \in \mathbb{R}$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą i niech $\delta = 1$. Jeśli $0 < |x| < \delta = 1$, to $-1 < -x^2 < 0$, więc $f(x) = -1$, czyli $\big|f(x) - (-1)\big| = 0 < \varepsilon$. W ten sposób wykazaliśmy, że $-1 = \lim_{x\to 0} f(x)$. W tym przykładzie mamy $f(0) = 0 \neq \lim_{x\to 0} f(x)$. ■

Przykład 17.10 Udowodnimy, że $\lim_{x\to 0} x^n = 0$ dla każdej liczby naturalnej n. Niech ε będzie liczbą dodatnią. Niech δ będzie liczbą dodatnią mniejszą od $\min(1,\varepsilon)$. Jeżeli $0 < |x| < \delta$, to $|x^n| = |x|^n < \delta^n < \delta < \varepsilon$. Dowód został zakończony. ■

Przykład 17.11 Niech $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Liczba 1 jest oczywiście punktem skupienia dziedziny funkcji f, chociaż nie jest punktem tej dziedziny. Wykażemy, że $\lim_{x\to 1} = 2$. Niech $\varepsilon > 0$ i niech $\delta = \varepsilon$. Jeśli $0 < |x-1| < \delta$, to spełniona jest nierówność $|f(x)-2| = \left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| = |x+1-2| = |x-1| < \delta = \varepsilon$, co kończy dowód zapowiedzianej równości. ■

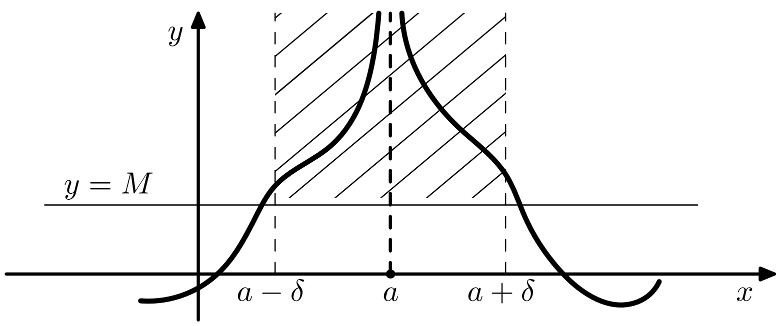
Przykład 17.12 Funkcja f określona na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych wzorem $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } x \leqslant 0, \\ 2 & \text{jeśli } x > 0, \end{cases}$ nie ma granicy w punkcie 0. Ponieważ przedziały $(-\infty, 0)$ i $(2,\infty)$ nie zawierają wartości funkcji f, więc z równości $g = \lim_{x\to 0} f(x)$

wynika, że $0 \leqslant g \leqslant 2$. Niech $\varepsilon = 1$. Jeśli $\lim\limits_{x\to 0} = g$, to istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $0 < |x| < \delta$, to $|f(x) - g| < 1$. Wobec tego $|0 - g| = |f(-\frac{\delta}{2}) - g| < 1$ i $|2 - g| = |f(\frac{\delta}{2}) - g| < 1$. Stąd wynika, że $2 \leqslant |2 - g| + |g - 0| = |2 - g| + |0 - g| < 1 + 1 = 2$ — sprzeczność, więc granica w punkcie 0 nie istnieje. ■



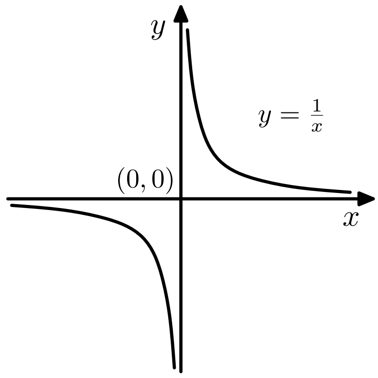
Uwaga 17.9 Jeśli funkcje f i g pokrywają się we wszystkich punktach pewnego otoczenia punktu a, być może z wyjątkiem samego punktu a i istnieje granica $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, to istnieje też granica $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ i obie granice są równe. Stąd wynika, że zmiana wartości funkcji w skończenie wielu punktach jej dziedziny nie wpływa na istnienie granicy, ani na jej wartość. ■

Równość $\infty = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ można zinterpretować „geometrycznie". Dla każdej prostej o równaniu $y = M$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że punkty $\big(x, f(x)\big)$ wykresu funkcji f odpowiadające argumentom $x \in (a - \delta, 0) \cup (0, a + \delta)$ znajdują się nad tą prostą.

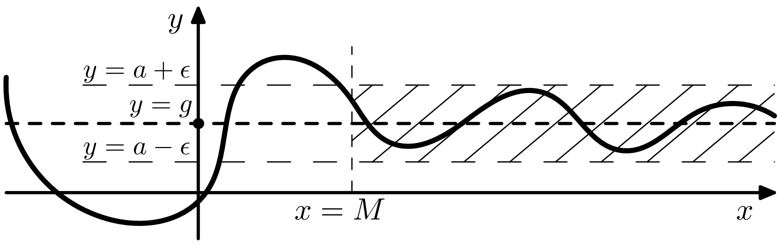


Przykład 17.13 Funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2}$ określona dla $x \neq 0$ ma granicę ∞ w punkcie 0. Niech M oznacza liczbę dodatnią i niech $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$. Z nierówności $0 < |x| < \delta$ wynika, że $0 < x^2 < \delta^2 = \frac{1}{M}$, więc $f(x) = \frac{1}{x^2} > M$, co kończy dowód. ■

Przykład 17.14 Nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$. Załóżmy, że istnieje i $g=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$. Z nierówności $0<\delta<1$ wynika, że $f(x)=\frac{1}{x}>\frac{1}{\delta}>1$, więc $g\geqslant 1$. Z nierówności $-\delta<x<0$ wynika, że $f(x)=\frac{1}{x}<-\frac{1}{\delta}<-1$, zatem $g\leqslant -1$, wbrew wykazanej wyżej nierówności $g\geqslant 1$. ■



Równość $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=g\in\mathbb{R}$ można łatwo zinterpretować geometrycznie. Jeśli $\varepsilon>0$, to istnieje taka liczba $M\in\mathbb{R}$, że punkty $\big(x,f(x)\big)$ wykresu funkcji f odpowiadające argumentom $x>M$ leżą w pasie ograniczonym prostymi $y=g-\varepsilon$ i $y=g+\varepsilon$.



Definicję granicy można też wypowiedzieć opierając się na pojęciu granicy ciągu.

Definicja 17.10 (granicy funkcji w punkcie.) [17.1]
Niech p oznacza dowolny punkt skupienia dziedziny funkcji f. Mówimy, że $g\in\overline{\mathbb{R}}$ jest granicą funkcji f w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy gdy dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do p, o wyrazach różnych od p, zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=g$. ■

Zwrócić należy uwagę na to, że wśród wyrazów ciągu zbieżnego do p, występującego w definicji granicy, nie ma p. Oznacza to w szczególności, że nawet wtedy, gdy p jest argumentem funkcji f, to wartość w tym punkcie nie ma wpływu na istnienie granicy w punkcie p, ani na jej wartość – zmiana wartości funkcji w punkcie p nie powoduje zmiany granicy w tym punkcie.

[17.1] Ta definicja granicy jest nazywana ciągową lub Heinego

Twierdzenie 17.11
Definicja granicy według Cauchy'ego jest równoważna definicji według Heinego.

Dowód. Dowód podamy w dwóch wybranych przypadkach: p i g są liczbami oraz $p=\infty$ i $g=-\infty$. Resztę Czytelnik powinien uzupełnić samodzielnie, być może nie wszystko — tyle tylko, by w miarę swobodnie przeprowadzić dowód w którymś przypadku.

Załóżymy najpierw, że g, p są liczbami rzeczywistymi oraz że $g=\lim\limits_{x\to p} f(x)$ w sensie definicji ciągowej. Rozumujemy nie wprost. Istnieje taka liczba $\varepsilon>0$, że dla każdej liczby $\delta>0$ istnieje takie x, że $0<|x-p|<\delta$ i jednocześnie $|f(x)-g|\geqslant\varepsilon$. Niech x_n oznacza liczbę dobraną do $\frac{1}{n}$, tzn. $0<|x_n-p|<\frac{1}{n}$ i $|f(x_n)-g|\geqslant\varepsilon$. Mamy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=p$ i $x_n\neq p$ dla wszystkich numerów n. Ciąg $\big(f(x_n)\big)$ wartości funkcji nie jest zbieżny do liczby g, bowiem wszystkie wyrazy tego ciągu wartości pozostają w odległości nie mniejszej niż ε od g. Twierdzenie zostało udowodnione w jedna stronę.

Teraz załóżymy, że $g=\lim\limits_{x\to p} f(x)$ w sensie definicji otoczeniowej. Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem argumentów funkcji f zbieżnym do p, o wyrazach różnych od p i niech ε oznacza dowolną liczbę dodatnią. Z definicji otoczeniowej granicy funkcji wynika, że istnieje taka liczba $\delta>0$, że jeśli $0<|x-p|<\delta$, to $|f(x)-g|<\varepsilon$. Z definicji granicy ciągu wnioskujemy, że dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $|x_n-p|<\delta$ i oczywiście $x_n\neq p$, zatem $0<|x_n-p|<\delta$, a stąd wynika, że $|f(x_n)-g|<\varepsilon$. Stąd i z definicji granicy ciągu wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=g$, a wobec tego, że (x_n) jest dowolnym ciągiem, możemy stwierdzić, że g jest granicą w sensie definicji ciągowej.

Teraz, zgodnie z obietnicą założymy, że $g=-\infty$ i $p=+\infty$. Zakładamy, że dla każdego ciągu (x_n) argumentów funkcji f, którego granicą jest $+\infty$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=-\infty$. Mamy wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej M istnieje taka liczba rzeczywista K, że jeśli $x>K$, to $f(x)<M$. Załóżmy, że tak nie jest. Istnieje więc taka liczba M, że dla każdej liczby K

istnieje taki argument x funkcji f większy od K, że $f(x) \geqslant M$. Przyjmując $K = n$ otrzymujemy argument x_n, taki że $x_n \geqslant n$ i $f(x_n) \geqslant M$. Stąd jednak wynika, że $-\infty$ nie jest granicą ciągu $(f(x_n))$, wbrew założeniu, co kończy dowód w jedną stronę. Teraz założymy, że dla każdej liczby rzeczywistej M istnieje taka liczba rzeczywista K, że jeśli $x > K$, to $f(x) < M$. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, to dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $x_n > K$ i wobec tego $f(x_n) < M$. Ponieważ M oznacza dowolną liczbę, więc $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$. Dowód został zakończony. ■

Definicja Cauchy'ego zazwyczaj pozwala dowodzić istnienie granicy, trzeba jednak zgadnąć wartość granicy. Definicja Heinego jest użyteczna często w dowodach nieistnienia granicy: wskazujemy dwa ciągi (x_n') i (x_n'') o wyrazach różnych od p, których granicą jest p tak, by $\lim\limits_{x\to p} f(x_n') \neq \lim\limits_{x\to p} f(x_n'')$.

Przykład 17.14 Niech $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ -1 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$

W punkcie 0 granicy nie ma, bo spełnione są następujące zależności $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sgn}\left(-\frac{1}{n}\right) = -1 \neq 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{n}\right)$. ■

Przykład 17.15 Funkcja Dirichleta, którą określamy wzorem $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{gdy } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$ nie ma granicy w żadnym punkcie. ■

Przykład 17.16 Granicą funkcji Riemanna zdefiniowanej wzorami

$$\begin{cases} 0 & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q} & \text{gdy } x = \frac{p}{q}, \ \text{ gdzie } q \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z},\ \text{nwd(p,q)=1} \end{cases}$$

jest liczba 0 w każdym punkcie $p \in \mathbb{R}$. Udowodnimy to stwierdzenie. Niech ε będzie liczbą dodatnią, a n — naturalną i niech $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Niech k będzie **najmniejszą** taką liczbą całkowitą, że $p < \frac{k}{n!}$, a ℓ — **największą** taką liczbą całkowitą, że $\frac{\ell}{n!} < p$. Ponieważ każda liczba naturalna $\nu \leqslant n$ jest dzielnikiem liczby $n!$, więc w przedziałach $(\frac{\ell}{n!}, p)$ i $(p, \frac{k}{n!})$ nie ma liczb wymiernych o mianownikach ν. Jeśli $x \in (\frac{\ell}{n!}, \frac{k}{n!}) \cap \mathbb{Q}$ jest liczbą wymierną różną od p, to mianownik liczby x zapisanej w postaci nieskracalnej jest większy niż n, więc $0 < f(x) < \frac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} f(n\sqrt{2}) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{n\to\infty} f(n)$, więc nie istnieje $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Podobnie dowodzimy nieistnienie granicy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. ■

Korzystając z definicji ciągowej granicy funkcji i twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy ciągu otrzymujemy

Twierdzenie 17.12 (o arytmetycznych własnościach granicy)

17.6.1 Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{x\to p} f(x)$, $\lim\limits_{x\to p} g(x)$ i określona jest ich suma, to istnieje granica $\lim\limits_{x\to p} (f(x)+g(x))$ i zachodzi wzór: $\lim\limits_{x\to p} (f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to p} f(x) + \lim\limits_{x\to p} g(x)$.

17.6.2 Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{x\to p} f(x)$, $\lim\limits_{x\to p} g(x)$ i określona jest ich różnica, to istnieje granica $\lim\limits_{x\to p} (f(x)-g(x))$ i zachodzi wzór: $\lim\limits_{x\to p} (f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to p} f(x) - \lim\limits_{x\to p} g(x)$.

17.6.3 Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{x\to p} f(x)$, $\lim\limits_{x\to p} g(x)$ i określony jest ich iloczyn, to istnieje granica $\lim\limits_{x\to p} (f(x)\cdot g(x))$ i zachodzi wzór: $\lim\limits_{x\to p} (f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to p} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to p} g(x)$.

17.6.4 Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{x\to p} f(x)$, $\lim\limits_{x\to p} g(x)$ i określony jest ich iloraz, to istnieje granica $\lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)}$ i zachodzi wzór

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to p} f(x)}{\lim\limits_{x\to p} g(x)}. \ ■$$

Przed podaniem następnego twierdzenia przypomnijmy, że operujemy terminem **dla dostatecznie dużych** n. Oznacza to, że interesują nas liczby naturalne większe od pewnej liczby. Właściwie chodzi o to, by były one „bliskie $+\infty$”. W przypadku funkcji argument (którym w przypadku ciągu jest numer wyrazu, czyli n) ma być bliski punktowi p, który może być równy $+\infty$, ale też może być liczbą, może być też równy $-\infty$. Sposób mówienia wymaga więc zmiany. Mówiąc x **jest dostatecznie bliski** p będziemy mieć na myśli, że:

$x > M$ dla pewnej liczby rzeczywistej M, gdy $p = +\infty$,
$x < M$ dla pewnej liczby rzeczywistej M, gdy $p = -\infty$,
$|x - p| < \delta$ dla pewnej **dodatniej** liczby δ, gdy $p \in \mathbb{R}$.

Z twierdzenia o trzech ciągach wynika analogiczne twierdzenie dla granic funkcji.

Twierdzenie 17.13 (o trzech funkcjach)
Jeśli dla wszystkich argumentów x dostatecznie bliskich punktowi p zachodzi nierówność podwójna $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, istnieją granice $\lim\limits_{x\to p} f(x)$, $\lim\limits_{x\to p} h(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to p} f(x) = \lim\limits_{x\to p} h(x)$, to również funkcja g ma granicę w punkcie p i zachodzi równość $\lim\limits_{x\to p} f(x) = \lim\limits_{x\to p} g(x) = \lim\limits_{x\to p} h(x)$. ■

Twierdzenie, które znajduje się poniżej ma bardzo prosty dowód, ale jest bardzo często stosowane.

Twierdzenie 17.14 (o granicy złożenia dwu funkcji)
Załóżmy, że

dziedzina funkcji f zawiera zbiór wartości funkcji g,
funkcja g ma granicę q w punkcie p, tzn. $q = \lim\limits_{x\to p} g(x)$,
punkt q jest punktem skupienia dziedziny funkcji f,
funkcja f ma granicę L w punkcie q, tzn. $L = \lim\limits_{y\to q} f(y)$,
$g(x) \neq q$ dla każdego x dostatecznie bliskiego p.

Wtedy funkcja $f \circ g$ określona wzorem $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ma w punkcie p granicę i zachodzi równość $\lim\limits_{x\to p} f\big(g(x)\big) = L$.

Dowód. Założenia tego twierdzenia są tak dobrane, że dowód wynika od razu z definicji ciągowej granicy funkcji w punkcie. ■

Z następnego twierdzenia będziemy korzystać rzadko. Podajemy je po to, by pokazać pełną analogię pojęcia granicy ciągu i granicy funkcji. Czytelnik zwróci uwagę na to, że pozwala ono udowodnić istnienie skończonej granicy bez jej wskazywania.

Twierdzenie 17.15 (o warunku Cauchy'ego)
Załóżmy, że p jest punktem skupienia zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$. Funkcja

$f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ ma granicę skończoną w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek Cauchy'ego:

(w.C.) dla każdego $\varepsilon > 0$ dla wszystkich $x, y \neq p$ dostatecznie bliskich p zachodzi nierówność $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Dowód. Załóżmy, że $\lim\limits_{x\to p} f(x) = g \in \mathbb{R}$. Niech ε będzie liczbą dodatnią. Istnieje wtedy takie otoczenie U punktu p, że jeśli $xy \in U$, to $|f(x)-g| < \frac{\varepsilon}{2}$ i $|f(y)-g| < \frac{\varepsilon}{2}$. Z nierówności trójkąta wynika wtedy, że $|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-g|+|g-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Teraz udowodnimy, że z warunku Cauchy'ego wynika istnienie skończonej granicy. Niech (x_n) będzie ciągiem o granicy p i wyrazach różnych od p. Niech ε będzie liczbą dodatnią. Istnieje wtedy takie otoczenie U punktu p, że jeśli $x, y \in U$, to $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Istnieje też taki numer n_ε, że jeśli $n > n_\varepsilon$, to $x_n \in U$. Jeśli $k, m > n_\varepsilon$, to $x_k, x_m \in U$, a stąd wynika, że $|f(x_k) - f(x_m)| < \varepsilon$. Oznacza to, że ciąg $\big(f(x_n)\big)$ spełnia warunek Cauchy'ego, więc ma skończoną granicę. Jeśli (x'_n) i $(x''_n,)$ są ciągami zbieżnymi do p o wyrazach różnych od p, to istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$ i $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n)$. Są one równe, bo te ciągi są podciągami ciągu $\big(f(x_n)\big)$, gdzie $x_{2n-1} = x'_n$ i $x_{2n} = x''_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$, a ten ciąg też jest zbieżny, więc wszystkie jego podciągi mają te same granice. Teza wynika teraz z definicji Heinego. ■

Oprócz granicy funkcji często rozpatrywane są granice jednostronne funkcji w punkcie. Zdefiniujemy granicę lewostronną, definicja granicy prawostronnej jest analogiczna.

Definicja 17.16 (granicy lewostronnej)
g jest granicą lewostronna funkcji f w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy można znaleźć w dziedzinie ciąg (x_n) o wyrazach mniejszych (ściśle!) niż p, zbieżny do p i gdy dla każdego takiego ciągu odpowiadający mu ciąg wartości $(f(x_n))$ ma granicę g. Stosujemy oznaczenie $\lim\limits_{x\to p^-} f(x)$. ■

Przykład 17.17 Funkcja $\frac{1}{x}$ ma jednostronne granice w punkcie 0: prawostronna jest równa $+\infty$, zaś lewostronną jest $-\infty$. ■

Przykład 17.18 Funkcja $\lfloor x \rfloor$ ma w punkcie 0 obie granice jednostronne: $\lim\limits_{x\to 0^-} \lfloor x \rfloor = -1$ i $\lim\limits_{x\to 0^+} \lfloor x \rfloor = 0$. ■

Przykład 17.19 Niech $f(x) = \frac{1}{x+\lfloor x \rfloor}$ dla $x \neq 0$. Zachodzą równości: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$ i $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$. ■

Przykład 17.20 Funkcja Dirichleta, którą określamy wzorem $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{gdy } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$ nie ma granicy lewostronnej ani prawostronnej w żadnym punkcie. ■

Bez trudu można udowodnić ,,funkcyjną" wersję twierdzenia o scalaniu (por. zad. 15.34).

Twierdzenie 17.17 (o scalaniu)
Funkcja f określona na zbiorze zawierającym ciąg liczb mniejszych niż p, zbieżny do p oraz ciąg liczb większych niż p, zbieżny do p, ma granicę w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy ma obie granice jednostronne i są one równe.

Dowód. Jest jasne, że z istnienia granicy wynika istnienie granic jednostronnych – zamiast wszystkich ciągów zbieżnych do p, których wyrazy są różne od p, rozpatrujemy jedynie ich część. Jeśli natomiast wiemy, że istnieją granice jednostronne, to ciąg o wyrazach różnych od p możemy rozbić na podciąg o wyrazach mniejszych niż p i na podciąg o wyrazach większych niż p. Odpowiadające im ciągi wartości mają tę samą granicę, więc ciąg wartości odpowiadający naszemu ciągowi ma granicę i to równą wspólnej wartości obu granic jednostronnych. Oczywiście jeśli ciąg argumentów zawiera jedynie skończenie wiele wyrazów większych od p, to nie możemy rozpatrywać granicy prawostronnej, ale to niczemu nie przeszkadza, bo w tym przypadku wystarczy skorzystać z istnienia granicy lewostronnej. ■

Twierdzenie 17.18 (o granicach funkcji monotonicznej)
Niech p będzie punktem skupienia zbioru $A \cap (-\infty, p)$ i niech $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcja monotoniczną. Istnieje wtedy granica jednostronna $\lim\limits_{x\to p^-} f(x)$. Jeśli p jest punktem skupienia zbioru

$A \cap (p, \infty)$, to istnieje prawostronna granica $\lim\limits_{x \to p^+} f(x)$.

Dowód. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że f jest funkcją niemalejącą. Niech $g = \sup\{f(x)\colon \quad x \in A \cap (-\infty, p)\}$. Jeśli $b < g$ jest dowolną liczbą rzeczywistą, to istnieje takie $x_0 \in A \cap (-\infty, p)$, że $b < f(x_0)$ i oczywiście $f(x_0) \leqslant g$. Jeżeli $x_0 < x < p$, to $b < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant g$. Ponieważ b oznacza tu dowolną liczbę mniejszą niż g, więc z tego, co napisaliśmy wyżej wynika, że $g = \lim\limits_{x \to p^-} f(x)$. Podobnie rozpatrujemy pozostałe przypadki. ■

Przykład 17.21 W rozdziale poświęconym szeregom wykazaliśmy, że dla każdej liczby $x \in [-1, 1)$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ jest zbieżny. Niech $L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Wykażemy, że $\lim\limits_{h \to 0} \frac{L(x+h) - L(h)}{h} = \frac{1}{1-x}$ dla każdej liczby $x \in (-1, 1)$. Niech $r \in (|x|, 1)$. Z kryterium ilorazowego d'Alemberta wynika zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n-1) r^{n-2}$.

Oznaczmy $C = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (n-1) r^{n-2}$. Oczywiście $C > 0$. Załóżmy, że $|h| < r - |x|$, tzn. $|x| + |h| < r$. Niech $n \geqslant 2$, i $k \leqslant n$ będą liczbami naturalnymi. Mamy

$$|x|^{k-1} \big| (x+h)^{n-k} - x^{n-k} \big| =$$
$$= |x|^{k-1} \big| h[(x+h)^{n-k-1} + (x+h)^{n-k-2} x + \cdots + x^{n-k-1}] \big| \leqslant$$
$$\leqslant |h| \cdot |x|^{k-1} \cdot (n-k) \cdot r^{n-k-1} \leqslant (n-k) \cdot |h| \cdot r^{n-2}.$$

Mamy też $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$. Wynika stąd, że

$$\left| \frac{L(x+h) - L(h)}{h} - \frac{1}{1-x} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{(x+h)^n - x^n}{nh} - x^{n-1} \Big) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \big| (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2} x + \cdots + x^{n-1} - n x^{n-1} \big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \big(|(x+h)^{n-1} - x^{n-1}| + |x| \cdot |(x+h)^{n-2} - x^{n-2}| +$$

$$+|x|^2\cdot|(x+h)^{n-3}-x^{n-3}|+\cdots+|x|^{n-2}\cdot|x+h-x|\big)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|h|}{n}\big((n-1)r^{n-2}+(n-2)r^{n-2}+(n-3)r^{n-2}+\cdots+r^{n-2}\big)=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\tfrac{|h|}{2}(n-1)r^{n-2}=\tfrac{C|h|}{2}\,.$$

Z otrzymanej nierówności teza wynika natychmiast. ■

Przykład 17.22 W rozdziale poświęconym szeregom wykazaliśmy, że dla każdego $x\in\mathbb{R}$ oba szeregi[17.2] $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ i $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ są bezwzględnie zbieżne. Definiujemy funkcje

$$c(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\tfrac{x^{2n}}{(2n)!}\ \text{ oraz }\ s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

Wykażemy, że $\lim\limits_{h\to0}\frac{c(h)-c(0)}{h}=0$ i $\lim\limits_{h\to0}\frac{s(h)-s(0)}{h}=1$. Jeśli $h\neq0$,

to $\frac{c(h)-c(0)}{h}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{h^{2n-1}}{(2n)!}$ i $\frac{s(h)-s(0)}{h}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{h^{2n}}{(2n+1)!}$.

Z pierwszej z tych równości wynika, że jeśli $0<|h|<1$, to

$$\left|\tfrac{c(h)-c(0)}{h}\right|\leqslant|h|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{|h|^{2n-2}}{(2n)!}<|h|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{(2n)!}\xrightarrow[h\to0]{}0\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{(2n)!}=0\,,$$

co uzasadnia pierwszy z dowodzonych wzorów.

Z drugiej równości wynika, że jeśli $0<|h|<1$, to

$$\left|\tfrac{s(h)-s(0)}{h}-1\right|\leqslant|h|\cdot\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^{2n}}{(2n+1)!}\leqslant|h|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\xrightarrow[h\to0]{}0\,,$$

co uzasadnia drugi z dowodzonych wzorów. ■

Mówiąc o granicy funkcji w punkcie p zakładaliśmy, że p jest punktem skupienia dziedziny funkcji f, ale nie zakładaliśmy, że jest punktem tej dziedziny. Nie było dla nas istotne, czy funkcja jest w tym punkcie określona, a jeśli jest, to jaka jest jej wartość w tym punkcie. Wśród funkcji, które mają granicę w punkcie p ważną klasę stanowią te, których wartość w punkcie p jest równa granicy funkcji w tym punkcie.

Definicja 17.19 (funkcji ciągłej)

Niech $f\colon A\longrightarrow\mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją i niech $p\in A$. Mówimy

[17.2] Aby nie komplikować oznaczeń przyjmujemy tu, że $x^0=1$ również dla $x=0$.

wtedy, że funkcja f jest ciągła w punkcie p (lub że p jest punktem ciągłosci funkcji f), jeśli zachodzi jedna z dwu możliwości:

19.1 p nie jest punktem skupienia zbioru A;

19.2 p jest punktem skupienia zbioru A i $f(p) = \lim_{x \to p} f(x)$.

Jeśli p nie jest punktem ciągłości funkcji f, to mówimy, że funkcja f jest nieciągła w punkcie p, który to punkt nazywamy punktem nieciągłości funkcji f. O funkcjach, które są ciągłe we wszystkich punktach pewnego zbioru $B \subseteq A$ mówimy, że są ciągłe w zbiorze B. ■

Oczywiście niejawnie wypowiedzieliśmy w drugim warunku założenie o istnieniu granicy $\lim_{x \to p} f(x)$.

Przykład 17.23 Granicą funkcji $\lfloor -x^2 \rfloor$ w punkcie 0 jest -1, wartością jest 0, więc funkcja ta jest nieciągła w punkcie 0. ■

Przykład 17.24 Funkcja $\lfloor x \rfloor$ nie ma granicy w żadnym punkcie całkowitym (granice jednostronne istnieją, ale są różne), więc jest nieciągła w tych punktach. Jest ona ciągła w każdym punkcie niecałkowitym. ■

Przykład 17.25 Funkcja Riemanna ma w każdym punkcie granicę 0, więc jest ciągła we wszystkich punktach niewymiernych, bo w nich wartość funkcji też jest równa 0. W punktach wymiernych jej wartości są dodatnie, więc różne od granicy, zatem każda liczba wymierna jest punktem nieciągłości funkcji Riemanna. ■

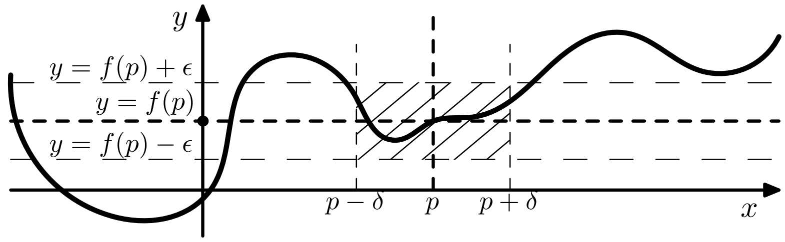
Przykład 17.26 Funkcja Dirichleta nie ma granicy (nawet jednostronnej) w żadnym punkcie, więc nie jest ciągła w ani jednym punkcie. ■

Można zapisać definicję ciągłości funkcji $f\colon A \to \mathbb{R}$ w punkcie $p \in A$ tak:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in A} |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon .$$

Jeśli p nie jest punktem skupienia zbioru A, to wtedy dla dostatecznie małej liczby $\delta > 0$, jedyną liczbą $x \in A$, dla której zachodzi nierówność $|x-p| < \delta$ jest liczba p. Gdy p jest punktem skupienia, to równoważność wypisanej formuły z definicją ciągłości wynika z definicji granicy podanej przez Cauchy'ego.

Geometrycznie ciągłość oznacza, że funkcja f przekształca zbiór $A\cap(p-\delta, p+\delta)$ w przedział $\big(f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon\big)$, więc fragment wykresu funkcji f, który odpowiada przedziałowi $(p-\delta, p+\delta)$ znajduje się w pasie ograniczonym przez proste $y = f(p) - \varepsilon$ i $y = f(p) + \varepsilon$.



Przykład 17.27 Wykażemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ funkcja x^n jest ciągła w zbiorze $\mathbb{R}$. Niech ε oznacza liczbę dodatnią. Jeśli $0 < \delta < 1$ i $|x-p| < \delta$, to $|x| < 1 + |p|$ i wobec tego

$$|x^n - p^n| = |x-p| \cdot |x^{n-1} + x^{n-2}p + x^{n-3}p^2 + \cdots + p^{n-1}| \leqslant \\ \leqslant |x-p| \cdot n(1+|p|)^{n-1}.$$

Wobec tego, jeśli $\delta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + n(1+|p|)^{n-1}}$ i $|x-p| < \delta$, to $|x^n - p^n| < \varepsilon$, co kończy dowód ciągłości. ■

Uwaga 17.20
Z definicji granicy podanej przez Heinego wynika, że funkcja f jest ciągła w punkcie $p \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) punktów zbioru A zbieżnego do p zachodzi równość $f(p) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Czytelnik zechce zwrócić uwagę, na to, że tym razem w ciągu x_n mogą pojawiać się wyrazy równe p. ■

Z tej uwagi wynika natychmiast

Twierdzenie 17.21 (o operacjach na funkcjach ciągłych)
Jeśli funkcje f i g określone na zbiorze A są ciągłe w punkcie $p \in A$ i $c \in \mathbb{R}$, to następujące funkcje są ciągłe w punkcie p: cf, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ oraz $\frac{f}{g}$ pod warunkiem $g(p) \neq 0$. ■

Przykład 17.28 Każdy wielomian jest funkcją ciągła w $\mathbb{R}$. ■

Przykład 17.29 Każda funkcja wymierna (tzn. iloraz dwóch wielomianów) jest ciągła w każdym punkcie swej dziedziny. ■

Przykład 17.30 Niech $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. W rozdziale o szeregach wykazaliśmy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ jest zbieżny (i to bezwzględnie) dla każdego $x\in\mathbb{R}$, więc funkcja exp została zdefiniowana na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych. Wykazaliśmy również, że $\exp(x+y)=\exp(x)\cdot\exp(y)$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y. Jest jasne, że dla każdej liczby dodatniej $x\in\mathbb{R}$ spełniona jest nierówność $\exp(x)>1+x$. Z udowodnionej równości $\exp(x)=\exp(\frac{x}{2})\cdot\exp(\frac{x}{2})=(\exp(\frac{x}{2}))^2$ wynika, że $\exp(x)\geqslant 0$ dla każdej liczby $x\in\mathbb{R}$. Ponieważ $\exp(x)\cdot\exp(-x)=$ $=\exp(0)=1$, więc $\exp(x)\neq 0$, co w połączeniu z nierównością $\exp(x)\geqslant 0$ daje nierówność $\exp(x)>0$. Wobec tego nierówność $\exp(x)>1+x$ zachodzi też dla $x\leqslant -1$. Niech $x\in(-1,0)$. Mamy wtedy $\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!}=\frac{x^{2n}}{(2n)!}\big(1+\frac{x}{2n+1}\big)>0$. Stąd wynika, że również dla $x\in(-1,0)$ zachodzi nierówność $\exp(x)>1+x$. Wykazaliśmy, że dla każdej liczby $x\neq 0$ zachodzi nierówność $\exp(x)>1+x$. Załóżmy, że $s<t$. Mamy więc

$$\exp(t)=\exp(s)\exp(t-s)>\exp(s)(1+t-s)>\exp(s),$$

a to oznacza, że funkcja exp jest ściśle rosnąca na $\mathbb{R}$. Niech teraz $s<t<p+1$. Stąd wynika, że

$$\big|\exp(t)-\exp(s)\big|=\exp(t)-\exp(s)=\exp(t)\big(1-\exp(s-t)\big)<$$
$$<\exp(t)\big(1-(1+s-t)\big)=(t-s)\exp(t)<|t-s|\exp(p+1).$$

Wykazaliśmy, że

$$x_1,x_2<p+1\Rightarrow|\exp(x_2)-\exp(x_1)|\leqslant|x_2-x_1|\exp(p+1),$$

przy czym nierówność jest ostra, gdy $x_2\neq x_1$. Niech $\varepsilon>0$ będzie liczbą rzeczywistą. Jeśli $\delta=\frac{\varepsilon}{\varepsilon+\exp(p+1)}$ i $|x_1-x_2|<\delta$, to $\delta<1$ oraz $|\exp(x_2)-\exp(x_1)|<\varepsilon$, więc funkcja exp jest ciągła w punkcie p. ■

Przykład 17.31 Udowodnimy raz jeszcze ciągłość funkcji exp zdefiniowanej wzorem $\exp(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Zaczniemy od dowodu jej ciągłości w punkcie $p=0$. Jeśli $|x|<1$, to

$$\big|\exp(x)-\exp(0)\big|=\big|\exp(x)-1\big|=\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\Big|=|x|\cdot\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}\Big|\leqslant$$

$$\leqslant |x|\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{|x|^{n-1}}{n!} \leqslant |x|\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n!} \leqslant |x|\big(1+\sum_{n=2}^{\infty}\tfrac{1}{n(n-1)}\big) \leqslant 2|x|\,.$$ [17.3]

Z otrzymanej nierówności ciągłość w punkcie 0 wynika od razu. Wystarczy więc zdefiniować $\delta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+2}$.

Zachodzi wzór $|\exp(x)-\exp(p)| = \exp(p)|\exp(x-p)-\exp(0)|$. Wiedząc, że funkcja $\exp$ jest ciągła w punkcie 0, możemy przyjąć, że jeśli $\tilde{\delta}$ była dobrana do liczby $\varepsilon > 0$ w dowodzie ciągłości funkcji $\exp$ w punkcie 0, to dowodząc ciągłość tej funkcji w punkcie p można przyjąć, że $\delta = \frac{\tilde{\delta}}{\exp(p)}$ jest dobrana do liczby ε.

Oczywiście korzystamy tu z tego, że $\exp(p) > 0$ dla każdego p, co wykazaliśmy w poprzednim przykładzie. ■

Twierdzenie 17.22 (o ciągłości złożenia)
Jeśli funkcja $f\colon A \longrightarrow B$ jest ciągła w punkcie $p \in A$ a funkcja $g\colon B \longrightarrow \mathbb{R}$ — w punkcie $f(p)$, to ich złożenie $g \circ f$ jest ciągłe w punkcie p.

Dowód. Twierdzenie to wynika od razu z definicji ciągłości. Jeśli $\varepsilon > 0$, to z ciągłości funkcji g w punkcie $f(p)$ wynika, że istnieje taka liczba $\eta > 0$, że

$$|y - f(p)| < \eta \Rightarrow \big|g(y) - g\big(f(p)\big)\big| < \varepsilon\,.$$

Z ciągłości funkcji f w punkcie p wynika istnienie takiej liczby $\delta > 0$, że

$$|x - p| < \delta \Rightarrow \big|f(x) - f(p)\big| < \eta\,,$$

ale wtedy $\big|g\big(f(x)\big) - g\big(f(p)\big)\big| < \varepsilon$, co kończy dowód ciągłości złożenia $g \circ f$ w punkcie p. ■

Wniosek 17.23
Jeśli funkcja $f\colon A \to B$ jest ciągła w zbiorze A, funkcja $g\colon B \to \mathbb{R}$ — w zbiorze B, to ich złożenie $g \circ f$ jest ciągłe w zbiorze A. ■

Przykład 17.32 Udowodnimy, że funkcja $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x^2+1}}{x^4+1}}$ jest ciągła w zbiorze liczb nieujemnych, czyli w $[0,\infty)$. Funkcje x,

[17.3] Końcówka to kosmetyka: liczba 2 wygląda nieco prościej niż tak samo dobra liczba $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$, więc ostatnich dwu nierówności mogłoby nie być.

x^2+1 i x^4+1 są ciągłe jako wielomiany. Funkcje $\sqrt{y}$ i $\sqrt[3]{z}$ są ciągłe (zob. tw. 15.35), zatem ciągła jest funkcja $\sqrt{x^2+1}$ jako złożenie dwu funkcji ciągłych. Funkcja $\sqrt{x}+\sqrt{x^2+1}$ jest ciągła jako suma funkcji ciągłych, a funkcja $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x^2+1}}{x^4+1}$ — jako iloraz funkcji ciągłych. Stąd i z ciągłości funkcji $\sqrt[3]{z}$ wynika ciągłość funkcji $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x^2+1}}{x^4+1}}$. ■

Uwaga 17.24 (niecałkiem matematyczna)
Rozumując tak, jak w ostatnim przykładzie dowodzimy, że funkcja zdefiniowana jednym wzorem za pomocą funkcji ciągłych (*ale co to znaczy?!*) jest ciągła. ■

Uwaga 17.25
Zmniejszając dziedzinę funkcji możemy zlikwidować nieciągłości. Jeśli f oznacza funkcję Dirichleta, która nie ma punktów ciągłości, to po zmniejszeniu dziedziny np. zbioru liczb niewymiernych $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ otrzymujemy funkcje stałą ($=0$), więc ciągłą we wszystkich punktach swej dziedziny. ■

Jeśli B jest zbiorem punktów ciągłości funkcji f, to funkcja $f_{|B}$, czyli f ograniczona do dziedziny B, jest ciągła w zbiorze B. Jednak nie każdą funkcję ciągłą można przedłużyć do funkcji ciągłej na większej dziedzinie. Funkcja sgn zdefiniowana w zbiorze liczb różnych od 0 wzorami $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & \text{gdy } x<0,\\ 1 & \text{gdy } x>0,\end{cases}$ nie ma granicy w punkcie 0, więc nie można jej dookreślić w punkcie 0 tak, by stała się ciągła na $\mathbb{R}$.

Lemat 17.26 (o przedłużaniu funkcji ciągłej)
Załóżmy, że $p\in A\subseteq\mathbb{R}$ i $B=A\setminus\{p\}$. Jeśli funkcja $g\colon B\longrightarrow\mathbb{R}$ ciągła i zachodzi jeden z dwóch warunków:

26.1 p nie jest punktem skupienia zbioru A,

26.2 p jest punktem skupienia zbioru A i istnieje **skończona** granica $\lim\limits_{x\to p} g(x)$

to funkcję g można przedłużyć do funkcji ciągłej na zbiorze A.

Dowód. Definiujemy funkcję $f\colon A\longrightarrow\mathbb{R}$ wzorami

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{jeśli } x \in B, \\ 7 & \text{jeśli } x = p \text{ i zachodzi warunek pierwszy,} \\ \lim\limits_{x \to p} g(x) & \text{jeśli } x = p \text{ i spełniony jest warunek drugi.} \end{cases}$$

Z definicji wynika ciągłość funkcji f w punkcie p. Ciągłość w innych punktach wynika automatycznie z ciągłości funkcji g. ∎

Uwaga 17.27
Twierdzenie odwrotne do lematu o przedłużaniu funkcji ciągłej jest też prawdziwe i wynika od razu z definicji ciągłości. W drugim przypadku definiowaliśmy $f(p)$ p **w jedyny** możliwy sposób. ∎

Przykład 17.33 Funkcję $\frac{x^2-1}{x-1}$ określoną na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ można przedłużyć do funkcji ciągłej na $\mathbb{R}$, bo $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$. ∎

Przykład 17.34 Funkcji $\frac{1}{x}$ określonej na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nie można przedłużyć do funkcji ciągłej na całej prostej, bo granice jednostronne tej funkcji są różne i w dodatku nieskończone. ∎

Omówimy ważne własności funkcji ciągłych.

Lemat 17.28
Jeśli funkcja $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie p i $f(p) \neq 0$, to istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $|x - p| < \delta$, to liczby $f(x)$ i $f(p)$ mają ten sam znak.

Dowód. Niech $\varepsilon = |f(p)|$. Z ciągłości funkcji f w punkcie p wynika, że istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $|x - p| < \delta$, to $|f(x) - f(p)| < \varepsilon = |f(p|$, zatem $|f(x) - f(p)|^2 < |f(p|^2$, czyli $f(x)^2 - 2f(x)f(p) + f(p)^2 < f(p)^2$, więc $0 \leqslant f(x)^2 < 2f(x)f(p)$, a to oznacza, że liczby $f(x)$ i $f(p)$ mają ten sam znak. ∎

Twierdzenie 17.29 (Weiestrassa o osiąganiu kresów)
Niech f będzie funkcją ciągłą w każdym punkcie przedziału domkniętego $[a, b]$. Wtedy w przedziale [a,b] znajdują się takie punkty p, q, że nierówność $f(p) \leqslant f(x) \leqslant f(q)$ zachodzi dla każdego $x \in [a, b]$, tzn. $f(p)$ jest najmniejszą wartością funkcji f na przedziale [a,b], zaś $f(q)$ jest największą wartością funkcji f.[17.4]

[17.4] Wtedy $f(p)=\inf\{f(x)\colon\ x\in[a,b]\}$, $f(q)=\sup\{f(x)\colon\ x\in[a,b]\}$, zatem kres dolny jest osiągany w punkcie p, a górny w punkcie q.

Dowód. Niech M będzie kresem górnym funkcji f w przedziale $[a,b]$, tzn. $M=\sup\{f(x)\colon\ x\in[a,b]\}$. Istnieje ciąg (x_n) punktów przedziału $[a,b]$, taki że $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=M$. Z twierdzenia Bolzano – Weierstrassa wynika, że z ciągu (x_n) można wybrać podciąg zbieżny (x_{k_n}). Niech $q=\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n}$. Ponieważ dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $a\leqslant x_{k_n}\leqslant b$, więc w granicy otrzymujemy $a\leqslant q\leqslant b$. Funkcja f jest ciągła w każdym punkcie przedziału $[a,b]$, w szczególności w punkcie q. Wynika stąd, że $f(q)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n})=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=M$. Udowodniliśmy, więc że $\sup f=M=f(q)$, co oznacza, że $f(q)$ jest największą wartością funkcji f na przedziale $[a,b]$. Istnienie punktu, w którym funkcja f przyjmuje swą najmniejszą wartość, wnioskujemy stosując twierdzenie o wartości największej do funkcji $-f$. Dowód został zakończony. ■

Wniosek 17.30
Funkcja ciągła i nieograniczona na ograniczonym przedziale niedomkniętym nie może być przedłużona do funkcji ciągłej na przedziale domkniętym o tych samych końcach. ■

Przykład 17.35 Funkcji $\frac{1}{x}$ określonej na przedziale $(0,1]$ nie można przedłużyć do funkcji ciągłej na przedziale $[0,1]$. ■

Przykład 17.36 Funkcja $x+\lfloor -x\rfloor$ rozpatrywana na przedziale domkniętym $[0,1]$ jest nieciągła, jedynym jej punktem nieciągłości jest 0. Nie przyjmuje ona wartości najmniejszej: jej kresem dolnym jest liczba -1, ale nie jest ona wartością funkcji $x+\lfloor -x\rfloor$. ■

Przykład 17.37 Niech $f(x)=x^6+6x^2+12x$ dla $x\in\mathbb{R}$. Udowodnimy, że funkcja f ma wartość najmniejszą. Z twierdzenia Weierstrassa wynika, że istnieje taka liczba $c\in[-2,0]$, że jeśli $x\in[-2,0]$, to $f(c)\leqslant f(x)$.
Jeśli $x>0$, to $x^6+6x^2+12x>0=f(0)\geqslant f(c)$. Jeśli $x<-2$, to $x<x+2<0$, więc $x^6+6x^2+12x\geqslant 6x(x+2)>0=f(0)\geqslant f(c)$. Wobec tego dla każdego $x\in\mathbb{R}$ mamy $f(x)\geqslant f(c)$.

Można udowodnić, że liczba $f(c)$ jest niewymierna, a nawet, że nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu stopnia 2, 3 lub 4 o współczynnikach całkowitych. ■

Zajmiemy się kolejnym, intuicyjnie oczywistym twierdzeniem, często mylnie nazywanym twierdzeniem Darboux. Wydaje się, że pierwszymi, którzy je udowodnili, zresztą niezależnie, byli Czech Bolzano i Francuz Cauchy.

Twierdzenie 17.31 (o przyjmowaniu wartości pośrednich)
Jeśli f jest funkcją ciągłą w każdym punkcie pewnego przedziału P i dla pewnych punków x,z przedziału P zachodzi nierówność $f(x)<C<f(z)$, to między punktami x i z znajduje się punkt y, taki że $C=f(y)$.

Dowód. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $x<z$. Zdefiniujemy pomocniczą funkcję $g(t)=f(t)-C$ dla $t\in P$. Z założeń o funkcji f wynika, że $g(x)<0<g(z)$. Funkcja g jest ciągła. Niech $y=\sup\{s\in[x,z]:\quad g(s)<0\}$. Oczywiście $x\leqslant y\leqslant z$. Jeżeli $g(y)\neq 0$, to istnieje taka $\delta>0$, że jeśli $|t-y|<\delta$ i $t\in[x,z]$, to liczby $g(t)$ oraz $g(y)$ mają ten sam znak. Jeśli $g(y)<0$, to $y\neq z$ i wtedy w przedziale $[x,z]$, na prawo od y znajdują się takie punkty t, że $g(t)<0$, wbrew definicji y. Jeśli $g(y)>0$, to $x\neq y$ wtedy w przedziale $[x,z]$, na lewo od y znajdują się takie punkty t, że $g(t)>0$, wbrew definicji y. Wykluczyliśmy nierówność $g(y)\neq 0$, więc $g(y)=0$, czyli $f(y)=C$. ■

Wniosek 17.32
Jeśli funkcja $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła, $m=\inf\{f(x):\quad a\leqslant x\leqslant b\}$, $M=\sup\{f(x):\quad a\leqslant x\leqslant b\}$, to $\{f(x):\quad x\in[a,b]\}=[m,M]$, tzn. ciągły obraz przedziału domkniętego jest przedziałem domkniętym lub punktem (gdy $m=M$). ■

Uwaga 17.33
Jeśli dla każdych dwu liczb $x<z$ z dziedziny funkcji f i dla każdej liczby C leżącej między liczbami $f(x)$ i $f(z)$ istnieje taka liczba $y\in[x,z]$, że $f(y)=C$, to mówimy, że funkcja f ma *własność Darboux*. Twierdzenie Bolzano–Cauchy'ego o przyjmowaniu wartości pośrednich można więc sformułować tak: każda funkcja ciągła określona na przedziale ma własność Darboux. Istnieją funkcje

nieciągłe, które mają własność Darboux. ■

Przykład 17.38 Niech $f\colon [a,b] \longrightarrow [a,b]$ będzie funkcją ciągłą. Istnieje wtedy taki punkt $x_0 \in [a,b]$, że $f(x_0) = x_0$, punkt ten nazywamy punktem stałym funkcji f. Niech $h(x) = f(x) - x$. Oczywiście $h(a) = f(a) - a \geqslant 0$ i $h(b) = f(b) - b \leqslant 0$. Z twierdzenia Bolzano–Cauchy'ego wynika, że istnieje taki punkt $x_0 \in [a,b]$, że $0 = h(x_0) = f(x_0) - x_0$, czyli $f(x_0) = x_0$. ■

Przykład 17.39 Niech w będzie unormowanym wielomianem nieparzystego stopnia. Istnieje wtedy taka liczba $x_0 \in \mathbb{R}$, że $w(x_0) = 0$, czyli wielomian stopnia nieparzystego ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Niech n będzie stopniem wielomianu w. Istnieją takie liczby rzeczywiste a_0, a_1, ... , a_{n-1}, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$w(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n_1} + x^n .$$

Dla $x \neq 0$ mamy więc $w(x) = x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x} + 1 \right)$. Wynika stąd, że $\lim\limits_{x\to\infty} w(x) = \infty \cdot (0 + 0 + \cdots + 0 + 1) = \infty$ oraz $\lim\limits_{x\to-\infty} w(x) = -\infty \cdot (0 + 0 + \cdots + 0 + 1) = -\infty$. Z definicji granicy wynika istnienie takiego $M > 0$, że $w(M) > 0 > w(-M)$. Z twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich wynika, że istnieje taki punkt $x_0 \in [-M, M]$, że $w(x_0) = 0$. ■

Twierdzenie 17.34 (o ciągłości funkcji monotonicznej) Jeśli funkcja monotoniczna f określona na zbiorze $A \subset \mathbb{R}$ przekształca zbiór A *na* przedział, to jest ciągła w każdym punkcie zbioru A.

Dowód. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że funkcja f jest niemalejąca. Jeśli $p \in A$ jest granicą ciągu (a_n) punktów zbioru A mniejszych niż p, to istnieje granica $\lim\limits_{x\to p^-} f(x) \leqslant f(p)$. Ponieważ dla $x \geqslant p$ zachodzi nierówność $f(x) \geqslant f(p)$, a dla $x < p$ zachodzi nierówność $f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to p^-} f(x)$, więc z tego, że obrazem zbioru A jest przedział, wynika, że $\lim\limits_{x\to p^-} f(x) = f(p)$: gdyby było $\lim\limits_{x\to p^-} f(x) < f(p)$, to punkty przedziału $\left(\lim\limits_{x\to p^-} f(x), f(p) \right)$

byłyby poza obrazem zbioru A, więc ten obraz nie byłby przedziałem. Analogicznie, jeśli istnieje ciąg (a'_n) większych niż p zbieżny do p, to $f(p) = \lim\limits_{x \to p^+} f(x)$. Stąd wynika, że f jest ciągła w punkcie p. Dowód został zakończony. ■

Wniosek 17.35 (charakteryzujący monotoniczne funkcje ciągłe) Jeśli f jest funkcją monotoniczną określoną na przedziale P, to f jest ciągła w każdym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy f przekształca przedział P *na* pewien przedział (zdegenerowany do punktu w przypadku, gdy f jest funkcją stałą). ■

Twierdzenie 17.36 (o różnowartościowych funkcjach ciągłych) Jeżeli f jest różnowartościową funkcją określoną na przedziale P, ciągłą w każdym punkcie przedziału P, to f jest funkcją ściśle monotoniczną.

Dowód. Wykażemy najpierw, że jeśli x, z są punktami przedziału P i $x < y < z$, to punkt $f(y)$ leży między punktami $f(x)$ i $f(z)$. Są dwie możliwości $f(x) < f(z)$ oraz $f(x) > f(z)$. Drugą możliwość możemy sprowadzić do pierwszej zastępując funkcję f funkcją przeciwną $-f$. Wystarczy więc zająć się pierwszą. Jeśli $f(y)$ nie leży między $f(x)$ i $f(z)$, to albo $f(y) < f(x)$, albo $f(z) < f(y)$. W pierwszym wypadku, na mocy twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich, istnieje punkt x' leżący między y i z, taki że $f(x) = f(x')$. Przeczy to różnowartościowości funkcji f. W drugim przypadku między x i y znajduje się punkt z', taki że $f(z) = f(z')$, co znów przeczy różnowartościowości funkcji f.

Teraz przejdziemy do właściwego dowodu. Załóżmy, że istnieją takie punkty r, s, że $r < s$ oraz $f(r) < f(s)$. Udowodnimy, że jeśli $u < v$, to również $f(u) < f(v)$. Z tego co już udowodniliśmy wynika, że jeśli $u < r$, to $f(u) < f(r)$ (dla dowodu rozważamy trójkę $x = u$, $y = r$, $z = s$), jeśli $r < u < s$, to $f(r) < f(u) < f(s)$ (tym razem $x = r$, $y = u$, $z = s$) i wreszcie jeśli $s < u$, to $f(s) < f(u)$. To samo dotyczy oczywiście $f(v)$. Punkty r, s dzielą przedział P na trzy podprzedziały. Jeśli u, v

znajdują się w różnych podprzedziałach, to teza wynika z tego, co już stwierdziliśmy. Jeśli $u < v < r$, to ponieważ $f(u) < f(r)$ i $f(v)$ leży między $f(u)$ i $f(r)$, więc $f(u) < f(v) < f(r)$. Pozostałe dwa przypadki rozpatrujemy w identyczny sposób.
Jeśli $r < s$ i $f(r) > f(s)$, to zamiast funkcji f rozważamy funkcję przeciwną $-f$. Dowód został zakończony. ■

Wykażemy teraz twierdzenie, które pozwala stwierdzać ciągłość funkcji odwrotnej.

Twierdzenie 17.37 (o ciągłości funkcji odwrotnej)
Jeśli f jest funkcją ściśle monotoniczną określoną na pewnym przedziale P, to funkcja odwrotna $f^{-1}\colon f(P) \longrightarrow P$, przekształcająca obraz przedziału P na przedział P jest ciągła.

Dowód. Twierdzenie to wynika od razu z twierdzenia o ciągłości funkcji monotonicznej, które udowodniliśmy już wcześniej: funkcja monotoniczna, której obraz jest przedziałem jest ciągła i tego, że funkcja odwrotna do funkcji monotonicznej jest monotoniczna. Dowód został zakończony. ■

Przykład 17.40 Funkcja $\sqrt[n]{x}$ jest ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych nieujemnych, jako funkcja odwrotna do wielomianu x^n. ■

Zajmiemy się teraz tzw. funkcjami jednostajnie ciągłymi. Zanim podamy definicję, przyjrzymy się raz jeszcze funkcji $\frac{1}{x}$.

Przykład 17.41 Niech $p \neq 0$ i niech $\varepsilon > 0$. Załóżmy, że znaleźliśmy taką liczbę $\delta > 0$, że $|x - p| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{p}\right| < \varepsilon$. Można zadać pytanie, czy da się dobrać liczbę δ do liczby ε niezależnie od $p \neq 0$. Gdyby miało się to udać, to w szczególności moglibyśmy przyjąć $p = \frac{\delta}{n}$ i $x = \frac{\delta}{2n}$ dla dowolnej liczby naturalnej n. Oczywiście $|\frac{\delta}{2n} - \frac{\delta}{n}| = \frac{\delta}{2n} < \delta$, więc musiałaby zachodzić nierówność $\frac{n}{\delta} = \left|\frac{2n}{\delta} - \frac{n}{\delta}\right| < \varepsilon$, z której wynika, że $n < \delta\varepsilon$, co przeczy nieograniczoności zbioru liczb naturalnych. Nie można więc dobrać liczby δ do liczby ε **niezależnie** od p. ■

Definicja 17.38 (jednostajnej ciągłości)
Funkcja f jest jednostajnie ciągła na zbiorze A wtedy i tylko

wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$, taka że jeśli $x, y \in A$ oraz $|x-y| < \delta$, to $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Zapiszemy tę definicję za pomocą kwantyfikatorów:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in A}\forall_{p\in A}|x-p| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(p)| < \varepsilon\,. \blacksquare$$

Ta definicja różni się od definicji ciągłości we wszystkich punktach zbioru A:

$$\forall_{p\in A}\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in A}|x-p| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(p)| < \varepsilon\,,$$

miejscem, w którym pojawia się zdanie „dla każdego $p \in A$". To ważna różnica. W definicji ciągłości we wszystkich punktach zbioru A liczba δ zależy od p i od ε, a w definicji jednostajnej ciągłości — wyłącznie od liczby ε.

Przykład 17.42 Funkcja $\sqrt{x}$ określona na półprostej $[0,\infty)$ jest jednostajnie ciągła. Mamy $|\sqrt{x} - \sqrt{p}\,| \leqslant \sqrt{|x-p|}$ — tę nierówność zechce Czytelnik wykazać sam. Z niej wynika, że jeśli $|x-p| < \varepsilon^2$, to $|\sqrt{x} - \sqrt{p}\,| < \varepsilon$, więc przyjmijmy np. $\delta = \varepsilon^2$. $\blacksquare$

Przykład 17.43 Funkcja x^2 określona na półprostej $[0,\infty)$ nie jest jednostajnie ciągła. Załóżmy, że jest jednostajnie ciągła i że z nierówności $0 < p < x$ i $x - p < \delta$ wynika nierówność $|x^2 - p^2| < 1$, przyjęliśmy $\varepsilon = 1$. Niech $p = \frac{1}{\delta}$, $x = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$. Wtedy $1 > x^2 - p^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1$ — sprzeczność. $\blacksquare$

Zachodzi bardzo ważne, przypisywane Cantorowi a czasem Heinemu

Twierdzenie 17.39 (o jednostajnej ciągłości)
Jeśli funkcja f jest ciągła w każdym punkcie przedziału domkniętego $[a,b]$, to jest ona ciągła jednostajnie w tym przedziale.

Dowód. Załóżmy, że twierdzenie nie jest prawdziwe. Istnieje wtedy taka liczba $\varepsilon > 0$, że dla każdej liczby $\delta > 0$ istnieją takie liczby $x, y \in [a,b]$, że $|x-y| < \delta$ i jednocześnie $|f(x)-f(y)| \geqslant \varepsilon$. Niech x_n, y_n będą takimi dwiema liczbami z przedziału $[a,b]$, że $|x_n - y_n| < \delta = \frac{1}{n}$ i jednocześnie $|f(x)-f(y)| \geqslant \varepsilon$. Z twierdzenia Bolzano – Weierstrassa wynika, że z ciągu (x_n) można wybrać podciąg zbieżny (x_{k_n}). Oznaczmy jego granicę przez g. Mamy więc $g = \lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n}$, a ponieważ $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, więc mamy również

$g = \lim_{n\to\infty} y_{k_n}$. Oczywiście $g \in [a,b]$, zatem funkcja f jest ciągła w punkcie g, więc $f(g) = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \lim_{n\to\infty} f(y_{k_n})$, wbrew temu, że $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geqslant \varepsilon > 0$. Dowód został zakończony. ■

Oczywiście suma funkcji jednostajnie ciągłych jest jednostajnie ciągła, iloczyn funkcji jednostajnie ciągłej przez liczbę — też. Zmniejszając dziedzinę funkcji jednostajnie ciągłej otrzymujemy funkcję jednostajnie ciągłą na mniejszej dziedzinie. Złożenie funkcji jednostajnie ciągłych jest funkcją jednostajnie ciągłą. Natomiast iloczyn funkcji jednostajnie ciągłych nie musi być jednostajnie ciągły: $x^2 = x \cdot x$.

Z twierdzenia Cantora–Heinego wynika, że warunkiem koniecznym istnienia ciągłego przedłużenia funkcji ciągłej na przedział domknięty jest jej jednostajna ciągłość. Niebawem przekonamy się, że ten warunek jest też dostateczny.

Uwaga 17.40 (o ograniczoności funkcji jednostajnie ciągłej)
Funkcja $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ jednostajnie ciągła na zbiorze ograniczonym A jest ograniczona. Ponieważ A jest zbiorem ograniczonym, więc istnieje przedział $[a,b]$, który zawiera zbiór A, tzn. $A \subseteq [a,b]$. Z jednostajnej ciągłości funkcji f na zbiorze A wynika, że istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $|x-y| < \delta$, to $|f(x) - f(y)| < 1$. Niech $a = x_0$, x_1, x_2, ... , x_{k-1}, $x_k = b$ będą takimi liczbami, że $0 < x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_k - x_{k-1} < \delta$. Niech $t_j \in [x_{j-1}, x_j] \cap A$ dla $j = 1, 2, \ldots, k$. Może się zdarzyć, że dla niektórych j zbiór $[x_{j-1}, x_j] \cap A$ jest pusty. Wtedy odpowiedniego t_j nie ma. Niech $M = 1 + \max\{f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_k)\}$, $m = -1 + \min\{f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_k)\}$. Jeśli $x \in A$, to istnieje taka liczba j, że $x \in [x_{j-1}, x_j] \cap A$. Wtedy $|f(x) - f(t_j)| < 1$, zatem $m \leqslant -1 + f(t_j) < f(x) < 1 + f(t_j) \leqslant M$.

Bez założenia ograniczoności dziedziny twierdzenie przestaje być prawdziwe: funkcja x jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$, ale nie jest ograniczona ani z góry, ani z dołu. ■

Lemat 17.41
Jeśli funkcja $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła, $p \in \mathbb{R}$ jest punk-

tem skupienia zbioru A, to istnieje skończona granica $\lim\limits_{x\to p} f(x)$.

Dowód. Niech ε będzie liczbą dodatnią. Istnieje wtedy taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $|$, to $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Jeśli więc $|x-p| < \frac{\delta}{2}$ i $|y-p| < \frac{\delta}{2}$, to $|x-y| \leqslant |x-p| + |p-y| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$, więc $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Wykazaliśmy, że jest spełniony warunek Cauchy'ego gwarantujący istnienie skończonej granicy funkcji f w punkcie p. Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie 17.42 (o przedłużaniu funkcji jednostajnie ciągłej)
Jeśli $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła, $A \subseteq \mathbb{R}$, zbiór B składa się ze wszystkich punktów zbioru A i wszystkich skończonych punktów skupienia zbioru A, to istnieje dokładnie jedna taka funkcja ciągła $h\colon B \longrightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in A$ zachodzi wzór $h(x) = f(x)$. Funkcja h jest jednostajnie ciągła w zbiorze B.

Dowód. Z lematu poprzedzającego dowodzone twierdzenie wynika, że jeśli $p \in B \setminus A$, to istnieje granica $\lim\limits_{x\to p} f(x)$. Definiujemy więc funkcję h wzorami:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{gdy } x \in A, \\ \lim\limits_{x\to p} f(x) & \text{gdy } x \in B \setminus A. \end{cases}$$

Wykażemy, że h jest funkcją jednostajnie ciągłą. Niech ε będzie liczbą dodatnią. Istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $|x-y| < \delta$ dla pewnych $x, y \in A$, to $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Niech $a, b \in B$. Istnieją wtedy ciągi (a_n) i (b_n) punktów zbioru A zbieżne odpowiednio do a i b.[17.5] Jeśli $|a-b| < \delta$, to dla dostatecznie dużych numerów n zachodzi nierówność $|a_n - b_n| < \delta$, więc $|f(a_n) - f(b_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Z definicji h i jednostajnej ciągłości f wynika, że $|h(a) - h(b)| = \lim\limits_{n\to\infty} |f(a_n) - f(b_n)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, co kończy dowód jednostajnej ciągłości funkcji h. Oczywiście to jedyne możliwe przedłużenie. ■

Wniosek 17.43
Funkcję jednostajnie ciągłą określoną na zbiorze liczb wymiernych lub na zbiorze liczb dwójkowo–wymiernych (czyli takich, które

[17.5] Jeśli np. $a \in A$, to można przyjąć $a_n = a$ dla każdego n.

można zapisać w postaci $\frac{k}{2^n}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) można przedłużyć do funkcji ciągłej na $\mathbb{R}$ i to w dokładnie jeden sposób. ■

Uwaga 17.44
Niech $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Definiujemy nową funkcję: $h(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|\colon \ x \in A,\ y \in A,\ |x-y| \leqslant \delta\}$ dla $\delta > 0$. Funkcja h jest niemalejąca na $(0,\infty)$, być może $h(t) = \infty$ dla pewnego $t > 0$.[17.6] Czytelnik zechce udowodnić, że funkcja f jest jednostajnie ciągła na zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{\delta\to 0} h(\delta) = 0$. ■

Omówimy jeszcze jedną bardzo ważną klasę funkcji, mianowicie tzw. funkcje wypukłe. Do zdefiniowania ich przydadzą nam się jeszcze inne pojęcia.

Definicja 17.45 (kombinacji wypukłej)
Niech $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0, \ldots, p_n \geqslant 0$ będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. Kombinacją wypukłą o współczynnikach $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0, \ldots, p_n \geqslant 0$ liczb x_1, $x_2, \ldots, x_n$ nazywamy liczbę $p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$. ■

Zamiast terminu *kombinacja wypukła* można też używać zamiennie terminu *średnia ważona.* Wtedy liczby p_1, $p_2, \ldots, p_n$ nazywamy wagami.

Uwaga 17.46 (o środku masy)
Jeśli w punkcie x_1 umieścimy masę m_1, w punkcie x_2 — masę m_2, ... , w punkcie x_m — masę m_n, to środek masy znajduje się w punkcie $\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$. To stwierdzenie pozostawiamy bez dowodu, choć nie jest on trudny, ale trzeba znać prawo dźwigni. Stwierdzenie można stosować nie tylko do punktów leżących na prostej. W przypadku przestrzeni podany tu wzór używamy oddzielnie do znalezienie pierwszej współrzędnej środka masy układu n punktów materialnych, potem do znalezienia drugiej i trzeciej. ■

Definicja 17.47 (funkcji wypukłej)
Funkcję f określoną na zbiorze wypukłym P nazywamy wypukłą,

[17.6] Aby uniknąć nieskończonych wartości można założyć, że h jest ograniczona na każdym zbiorze ograniczonym.

jeśli dla dowolnych punktów $x, y \in P$ i dowolnej liczby $p \in (0,1)$ zachodzi nierówność

$$f\big(px + (1-p)y\big) \leqslant pf(x) + (1-p)f(y)\,.$$ [17.7]

Jeżeli nierówność ta jest ostra w przypadku $x \neq y$, to mówimy, że funkcja jest ściśle wypukła.

Jeśli funkcja $-f$ jest wypukła, to mówimy, że funkcja f jest wklęsła, jeśli funkcja $-f$ jest ściśle wypukła, to funkcja f nazywana jest ściśle wklęsłą. ■

Przykład 17.44 Jeśli $f(x) = ax + b$, to funkcja f jest jednocześnie wypukła i wklęsła, nie jest ściśle wypukła. Stwierdzenie to wynika natychmiast z definicji:

$$f\big(px + (1-p)y\big) = a\big(px + (1-p)y\big) + b =$$
$$= p\big(ax + b\big) + (1-p)\big(ay + b\big) = pf(x) + (1-p)f(y)\,,$$

więc w przypadku funkcji liniowej nierówność występująca w definicji funkcji wypukłej staje się równością. ■

Przykład 17.45 Jeśli $f(x) = x^2$, to f jest funkcją ściśle wypukłą na całej prostej. Uzasadnimy tę tezę. Dla $0 < p < 1$ mamy

$$pf(x) + (1-p)f(y) - f\big(px + (1-p)y\big) =$$
$$= px^2 + (1-p)y^2 - \big(px + (1-p)y\big)^2 = p(1-p)(x-y)^2 \geqslant 0\,,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$. ■

Przykład 17.46 Funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ jest ściśle wklęsła — wynika to ze ścisłej wypukłości funkcji kwadratowej: nierówność $\sqrt{px + (1-p)y} > p\sqrt{x} + (1-p)\sqrt{y}$ jest równoważna nierówności

$$pu^2 + (1-p)v^2 > \big(pu + (1-p)v\big)^2\,, \text{ gdzie } u = \sqrt{x},\ v = \sqrt{y}\,.$$ ■

Przed podaniem następnych przykładów skomentujemy definicję funkcji wypukłej i podamy kryterium pozwalające stwierdzać wypukłość niektórych funkcji. Funkcja jest wypukła, jeśli połączywszy dwa punkty jej wykresu otrzymujemy odcinek, którego każdy punkt leży nad wykresem funkcji lub na jej wykresie. Funkcja jest ściśle wypukła, jeśli wszystkie punkty wewnętrzne odcinka łączącego dwa punkty wykresu leżą nad wykresem funkcji.

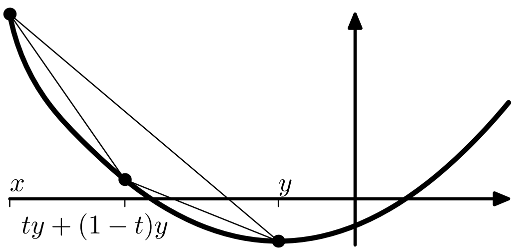
[17.7] Definicję tę stosuje się w niezmienionej formie również w przypadku funkcji wielu zmiennych, punkty dodajemy i mnożymy przez liczby dodając lub mnożąc ich współrzędne.

Jest tak dlatego, że w przypadku $0 < t < 1$, $x < y$ zachodzi nierówność $x < tx + (1-t)y < y$. W przykładzie pierwszym pokazaliśmy, że punkt $\big(tx+(1-t)y,\, tf(x)+(1-t)f(y)\big)$ leży na wykresie funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty $\big(x, f(x)\big)$ oraz $\big(y, f(y)\big)$, współczynnik kierunkowy tej funkcji to $a = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, wyraz wolny to $b = f(x) - ax = f(x) - x\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

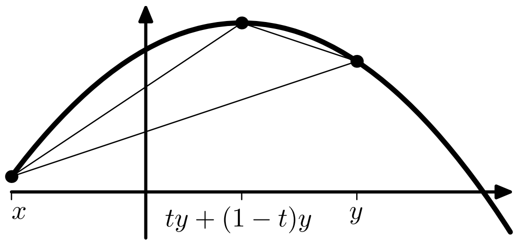
Nierówność występująca w definicji funkcji wypukłej:

$$f\big(tx+(1-t)y\big) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$$

to stwierdzenie, że punkt $\big(tx+(1-t)y, f\left(tx+(1-t)y\right)\big)$ znajduje się pod punktem $\big(tx+(1-t)y, tf(x)+(1-t)f(y)\big)$. Oznacza to, że funkcja jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór punktów znajdujących się nad jej wykresem jest wypukły.



wykres funkcji wypukłej



wykres funkcji wklęsłej

Przykład 17.47 Funkcja $|x|$ jest wypukła na $\mathbb{R}$, ale nie jest ściśle wypukła. Jeśli $0 < p < 1$, to

$$|px + (1-p)y| \leqslant |px| + |(1-p)y| = p|x| + (1-p)|y|.$$

Dowód wypukłości zakończyliśmy. Funkcja nie jest ściśle wypukła, bo $|1| = |\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1| = \frac{1}{2}\cdot|0| + \frac{1}{2}\cdot|1|$. Tutaj $x = 0$, $y = 1$ i $0 < p = \frac{1}{2} < 1$. ■

Przykład 17.48 Wielomian $w(x) = ax^2+bx+c$, drugiego stopnia, jest funkcją ściśle wypukłą wtedy i tylko wtedy, gdy $a > 0$, ściśle wklęsłą — wtedy i tylko wtedy, gdy $a < 0$.

Dowód. Niech $a > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ i $0 < p < 1$. Wtedy

$$pw(x) + (1-p)w(y) - w\big(px + (1-p)y\big) = ap(1-p)(x-y)^2 > 0.$$

Z tego wzoru ścisła wypukłość funkcji w wynika od razu. Jeżeli $a < 0$, to nierówność zmienia kierunek na przeciwny, zatem funkcja jest ściśle wklęsła. ■

Przykład 17.49 Funkcja x^3 nie jest ani wypukła, ani wklęsła na żadnym przedziale, którego wewnętrznym punktem jest 0, bowiem $\frac{1}{4}(-\varepsilon)^3+\frac{3}{4}\varepsilon^3=\frac{1}{2}\varepsilon^3>\frac{1}{8}\varepsilon^3=\left(\frac{1}{4}(-\varepsilon)+\frac{3}{4}\varepsilon\right)^3$, co wyklucza wklęsłość oraz $\frac{3}{4}(-\varepsilon)^3+\frac{1}{4}\varepsilon^3=-\frac{1}{2}\varepsilon^3<-\frac{1}{8}\varepsilon^3=\left(\frac{3}{4}(-\varepsilon)+\frac{1}{4}\varepsilon\right)^3$, co wyklucza wypukłość. ■

Uwaga 17.48 Można udowodnić, że funkcja wypukła jest ciągła w każdym wewnętrznym punkcie swej dziedziny, w końcach przedziału, na którym jest określona mogą pojawić się nieciągłości. Istnieją funkcje ciągłe na całej prostej, które nie są ani wypukłe, ani wklęsłe na żadnym przedziale, ale takie przykłady nie są proste. ■

Uwaga 17.49
Suma funkcji wypukłych jest wypukła. Iloczyn funkcji wypukłej przez liczbę dodatnią jest wypukły, a przez ujemną — wklęsły. ■

A teraz bardzo ważne twierdzenie.

Twierdzenie 17.50 (nierówność Jensena)
Jeśli funkcja f jest wypukła, to dla dowolnych jej argumentów $x_1,\ ,x_2,\ x_3,\dots,x_n$ i dowolnych wag $p_1,p_2,p_3,\dots,p_n$ zachodzi nierówność:
$$f(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+\dots+p_nx_n)\leqslant$$
$$\leqslant p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+p_3f(x_3)+\dots+p_nf(x_n)\,.$$
Nierówność ta w przypadku funkcji ściśle wypukłej, dodatnich wag $p_1,p_2,\dots,p_n$ i przynajmniej dwóch różnych argumentów spośród $x_1,x_2,\dots,x_n$ jest ostra.

Dowód. Dla $n=1$ musi być $p_1=1$ i nierówność staje się oczywistą równością. Dla $n=2$ mamy $p_2=1-p_1$ i otrzymujemy nierówność, która występuje w definicji funkcji wypukłej.

Załóżmy, że dowodzone twierdzenie jest prawdziwe dla wszelkich możliwych wyborów n argumentów funkcji f i n wag. Niech $x_1,x_2,\dots,x_n,x_{n+1}$ będą dowolnymi argumentami funkcji f, a $p_1,p_2,\dots,p_n,p_{n+1}$ dowolnymi wagami, tj. liczbami nieujemnymi, których suma równa jest 1. Jeśli którakolwiek z wag jest równa 0, to nierówność z $n+1$ argumentami i $n+1$ wagami jest prawdziwa na mocy uczynionego założenia: argument odpowiadający zerowej wadze jest nieistotny, bo w nierówności faktycznie nie występuje. Załóżmy, że wszystkie wagi $p_1,p_2,\dots,p_n,p_{n+1}$ są dodatnie. Niech $p'_n=p_n+p_{n+1}$ i $x'_n=\frac{p_nx_n+p_{n+1}x_{n+1}}{p_n+p_{n+1}}=$

$=\frac{p_n}{p'_n}x_n+\frac{p_{n+1}}{p'_n}x_{n+1}$. Mamy $p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n+p_{n+1}x_{n+1}=$ $=p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_{n-1}x_{n-1}+p'_nx'_n$ i $p_1+\ldots+p_{n-1}+p'_n=1$. Z założenia, które uczyniliśmy wynika, że

$$f(p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_{n-1}x_{n-1}+p'_nx'_n)\leqslant$$
$$\leqslant p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\ldots+p_{n-1}f(x_{n-1})+p'_nf(x'_n)=$$
$$=p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\ldots+p_{n-1}f(x_{n-1})+p'_nf\left(\frac{p_n}{p'_n}x_n+\frac{p_{n+1}}{p'_n}x_{n+1}\right)\leqslant$$
$$\leqslant p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\ldots+p_{n-1}f(x_{n-1})+$$
$$+p'_n\left(\frac{p_n}{p'_n}f(x_n)+\frac{p_{n+1}}{p'_n}f(x_{n+1})\right)=$$
$$=p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\ldots+p_{n-1}f(x_{n-1})+p_nf(x_n)+p_{n+1}f(x_{n+1})$$

— druga z tych nierówności jest bezpośrednim wnioskiem z wypukłości funkcji f. Zakończyliśmy dowód nierówności Jensena. ■

Twierdzenie 17.51 (o wypukłości funkcji ciągłej)
Funkcja f ciągła w każdym punkcie zbioru wypukłego P jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x,y\in P$ zachodzi nierówność $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}$, ściśle wypukła, gdy ta nierówność jest ostra w każdym przypadku, w którym $x\neq y$.
Dowód. Jeśli f jest wypukła, to przyjmując w definicji wypukłości $p=\frac{1}{2}$ otrzymujemy warunek podany w tym twierdzeniu, co kończy dowód konieczności tego warunku.

Zajmiemy się teraz dowodem w „drugą” stronę. Niech x,y będą dowolnymi punktami zbioru P. Mamy $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}$. Ponieważ nierówność ta zachodzi dla każdych punktów x,y zbioru P, więc możemy zastąpić punkt y środkiem odcinka łączącego punkty x,y. Mamy $\frac{1}{2}\left(x+\frac{x+y}{2}\right)=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y$. Mamy więc $f\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(f(x)+f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(f(x)+\frac{f(x)+f(y)}{2}\right)=$ $=\frac{3}{4}f(x)+\frac{1}{4}f(y)$. Wykazaliśmy, że nierówność definiująca wypukłość ma miejsce dla $p=\frac{3}{4}$. Stosując to samo rozumowanie do punktów $\frac{x+y}{2}$, y otrzymujemy $f\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y\right)\leqslant\frac{1}{4}f(x)+\frac{3}{4}f(y)$, a więc nierówność z definicji wypukłości w przypadku $p=\frac{1}{4}$. Rozważając teraz kolejno pary punktów x i $\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y$, $\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y$ i $\frac{1}{2}(x+y)$, $\frac{1}{2}(x+y)$ i $\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y$ oraz $\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y$ i y otrzymujemy nierówność kolejno dla $p=\frac{7}{8}$, $p=\frac{5}{8}$, $p=\frac{3}{8}$ i $p=\frac{1}{8}$.

Otrzymaliśmy nierówność dla siedmiu wartości p: $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{7}{8}$. W taki sam sposób możemy otrzymać nierówność dla $p = \frac{k}{16}$ ($k \in \mathbb{N}$), następnie dla $p = \frac{k}{32}$ itd. Teraz skorzystamy z ciągłości funkcji f. Każda liczba $p \in (0,1)$ jest granicą ciągu (p_n) liczb postaci $\frac{k}{2^m} \in (0,1)$ ($k \in \mathbb{N}$). Dla tych liczb nierówność jest już udowodniona. Mamy więc

$$f\big(p_n x + (1-p_n)y\big) \leqslant p_n f(x) + (1-p_n) f(y)\,.$$

Przechodząc do granicy (wolno, bo f jest ciągła w każdym punkcie, w szczególności w $px + (1-p)y$) otrzymujemy nierówność

$$f\big(px + (1-p)y\big) \leqslant pf(x) + (1-p)f(y)\,,$$

a to kończy dowód wypukłości funkcji f.

Należy jeszcze dowieść, jeśli $f\big(\frac{x+y}{2}\big) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$ dla $x \neq y$, to f jest **ściśle** wypukła. Załóżmy, że tak nie jest. Wobec tego

$$f(px + (1-p)y) = pf(x) + (1-p)f(y)$$

dla pewnych $x, y \in P$, $x \neq y$, $p \in (0,1)$. Niech $0 < r < p < 1$. Mamy wtedy $\quad pf(x) + (1-p)f(y) = f\big(px + (1-p)y\big) =$
$= f\big(\frac{p-r}{1-r}x + \frac{1-p}{1-r}(rx + (1-r)y)\big) \leqslant \frac{p-r}{1-r}f(x) + \frac{1-p}{1-r}f(rx+(1-r)y) \leqslant$
$\leqslant \frac{p-r}{1-r}f(x) + \frac{1-p}{1-r}\big(rf(x) + (1-r)f(y)\big) = pf(x) + (1-p)f(y)$.
Wobec tego, że ten ciąg nierówności zaczyna się i kończy tym samym wyrażeniem, wszystkie nierówności są równościami, w szczególności

$$f(rx + (1-r)y) = rf(x) + (1-r)f(x)\,,$$

a to przeczy założeniu, bo r może być postaci $\frac{k}{2^m}$, a dla takich r nierówność, jak to wykazaliśmy wcześniej, jest ostra. ■

Ostatni fragment tego dowodu wygląda nieco sztucznie, ale stanie się jaśniejszy po zapoznaniu się z twierdzeniem charakteryzującym funkcje wypukłe. W tej chwili wypada stwierdzić jedynie, że jeśli trzy punkty wykresu funkcji wypukłej leżą na jednej prostej, to wykres tej funkcji zawiera najkrótszy odcinek domknięty, który zawiera te trzy punkty wykresu, a ostatni fragment dowodu w istocie rzeczy to pokazuje. By to dobrze zrozumieć, trzeba pojąć, że jeśli $0 < r < p < 1$, to punkt $px + (1-p)y$

leży bliżej punktu x niż punkt $rx + (1 - r)y$ [17.8], następnie narysować sobie to wszystko biorąc pod uwagę to, że żaden punkt wykresu funkcji wypukłej nie może się znaleźć nad odcinkiem łączącym dwa punkty tego wykresu.

Bez założenia ciągłości powyższe twierdzenie nie jest prawdziwe, ale przykłady o tym świadczące są bardzo nienaturalne i ich omówienie wykracza znacznie poza ramy tej książki.

Przykład 17.50 Jeśli $k > 1$ jest liczbą naturalną, to funkcja x^k jest ściśle wypukła na półprostej $[0, \infty)$. Funkcja x^k jest ciągła, więc wystarczy udowodnić, że dla dowolnych dodatnich i różnych liczb x, y zachodzi nierówność $\left(\frac{x+y}{2}\right)^k < \frac{1}{2}\left(x^k + y^k\right)$. Wiemy już, z dowodu ścisłej wypukłości funkcji kwadratowej, że jest tak dla $k = 2$. Załóżmy, że dowodzona nierówność jest prawdziwa, gdy wykładnik równy jest n. Niech $x \neq y$ będą liczbami nieujemnymi. Mamy $(x - y)(x^n - y^n) > 0$, więc $x^{n+1} + y^{n+1} > > x^n y + xy^n$, więc $2x^{n+1} + 2y^{n+1} > x^{n+1} + y^{n+1} + x^n y + xy^n = = (x^n + y^n)(x + y) > 2 \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right)^n (x + y) = 4\left(\frac{x+y}{2}\right)^{n+1}$. Otrzymana nierówność jest równoważna takiej $\frac{1}{2}\left(x^{n+1} + y^{n+1}\right) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^{n+1}$. Rozumowanie indukcyjne zostało zakończone, zatem udowodniliśmy, że x^k jest funkcją ściśle wypukłą. ■

Przykład 17.51 Wykażemy nierówność Schwarza: dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ zachodzi:
$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$.
Równość ma tu miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba nieujemna t, dla której zachodzą równości $a_1 = tb_1$, $a_2 = tb_2$, $\ldots$, $a_n = tb_n$ lub równości $b_1 = ta_1$, $b_2 = ta_2, \ldots, b_n = ta_n$.

Dowód. Skorzystamy z nierówności Jensena dla funkcji x^2, która, jak wiemy, jest ściśle wypukła. Zauważmy najpierw, że jeśli $a_j = 0$ dla pewnego j, to można przyjąć, że $b_j = 0$, bowiem w wyniku tej operacji otrzymujemy nierówność z tą samą lewą stroną i zmniejszoną stroną prawą, więc z niej wynika nierówność

[17.8] Załóżmy, że $x<y$ i $1>p>r>0$. Wtedy $px+(1-p)y-x=(1-p)(y-x)< <(1-r)(y-x)=rx+(1-r)y-x$.

wyjściowa. Można więc przyjąć, że wszystkie liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są różne od 0. To samo dotyczy liczb $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Po tej redukcji do przypadku prostszego z punktu widzenia wybranej metody dowodu, udowodnimy nierówność. Mamy

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 =$$
$$= \left(\tfrac{a_1}{b_1} \cdot \tfrac{b_1^2}{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2} + \tfrac{a_2}{b_2} \cdot \tfrac{b_2^2}{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2} + \cdots + \tfrac{a_n}{b_n} \cdot \tfrac{b_n^2}{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}\right)^2 \cdot$$
$$\cdot \left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\tfrac{b_1^2}{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2} \cdot \left(\tfrac{a_1}{b_1}\right)^2 + \tfrac{b_2^2}{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2} \cdot \left(\tfrac{a_2}{b_2}\right)^2 + \cdots +\right.$$
$$\left. + \tfrac{b_n^2}{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2} \cdot \left(\tfrac{a_n}{b_n}\right)^2\right) \cdot \left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)^2 =$$
$$= (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$. Wystarczy oznaczyć ten iloraz przez t, by otrzymać tezę. Oczywiście wyjściowa nierówność staje się równością, gdy liczba t jest dodatnia — w przypadku przeciwnym z lewej strony nierówności otrzymamy liczbę ujemną, podczas gdy liczba po prawej stronie nierówności jest dodatnia. Dowód został zakończony. ■

Uwaga 17.52
Nierówność Schwarza można udowodnić na wiele różnych sposobów. Podany przed chwilą wcale nie jest najkrótszy. ■

Podamy jeszcze jedno twierdzenie, które ma duże znaczenie.

Twierdzenie 17.53 (charakteryzujące funkcje wypukłe)
Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze wypukłym (czyli przedziale) P. Następujące warunki są równoważne:

53.1 funkcja f jest wypukła;

53.2 jeśli $x < y < z$ są punktami zbioru P, to
$$\tfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \tfrac{f(z)-f(x)}{z-x};$$

53.3 jeśli $x < y < z$ są punktami zbioru P, to
$$\tfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant \tfrac{f(z)-f(y)}{z-y};$$

53.4 jeśli $x < y < z$ są punktami zbioru P, to
$$\tfrac{f(x)-f(z)}{x-z} \leqslant \tfrac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

W przypadku funkcji ściśle wypukłych powyższe nierówności są ostre.

Dowód. Udowodnimy, że drugi warunek jest równoważny wypukłości funkcji f. Mamy $y = \frac{z-y}{z-x}x + \frac{y-x}{z-x}z$. Wypukłość oznacza, że dla każdej trójki $x < y < z$ zachodzi nierówność

$$f(y) \leqslant \tfrac{z-y}{z-x}f(x) + \tfrac{y-x}{z-x}f(z),$$

równoważna takiej $(z-y)f(x) + (x-z)f(y) + (y-x)f(z) \geqslant 0$. Przemnażając nierówność z drugiego warunku przez iloczyn mianowników $(y-x)(z-x) > 0$ i przenosząc wszystkie składniki na jedną stronę otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 \leqslant (y-x)\big(f(z)-f(x)\big) - (z-x)\big(f(y)-f(x)\big) &= \\ = (y-x)f(z) + (x-z)f(y) + (z-y)f(x)&, \end{aligned}$$

więc tę samą, co poprzednio. Tak samo dowodzimy równoważność dwóch pozostałych warunków. ■

Każda z nierówności z ostatniego twierdzenia mówi, że iloraz $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, zwany różnicowym, jest funkcją niemalejącą: zwiększenie jednego z dwóch argumentów zwiększa wartość ilorazu. Stąd i z twierdzenia o granicy funkcji monotonicznej wynika

Twierdzenie 17.54
Niech $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą określoną na przedziale P. Jeśli p jest punktem wewnętrznym przedziału P, to istnieją skończone granice $\lim\limits_{x\to p^-} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} \leqslant \lim\limits_{x\to p^+} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$. Jeżeli liczba rzeczywista p jest prawym końcem przedziału P, to istnieje $\lim\limits_{x\to p^-} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} > -\infty$. Jeśli liczba rzeczywista p jest lewym końcem przedziału P, to istnieje $\lim\limits_{x\to p^+} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} < \infty$.

Dowód. Załóżmy, że liczba p jest punktem wewnętrznym przedziału P. Istnieją wtedy takie liczby $q, r \in P$, że $r < p < q$. Jeśli $r < x < p < y < q$, to

$$\frac{f(r)-f(p)}{r-p} \leqslant \frac{f(x)-f(p)}{x-p} \leqslant \frac{f(y)-f(p)}{y-p} \leqslant \frac{f(q)-f(p)}{q-p}.$$

Funkcja $\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ jest niemalejąca, więc

$$\frac{f(r)-f(p)}{r-p} \leqslant \lim_{x\to p^-} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} \leqslant \frac{f(y)-f(p)}{y-p}.$$

Ponieważ otrzymana nierówność zachodzi dla każdego $y \in (p, r)$

a funkcja $\frac{f(y)-f(p)}{y-p}$ zmiennej y jest niemalejąca, więc

$$\frac{f(r)-f(p)}{r-p} \leqslant \lim_{x\to p^-} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} \leqslant \lim_{y\to p^+} \frac{f(y)-f(p)}{y-p} \leqslant \frac{f(q)-f(p)}{q-p}\,.$$

Wykazaliśmy pierwszą część tezy, resztę wykazujemy tak samo. ■

Zadania

1. Niech $\sum a_n$ będzie szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich, a (x_n) ciągiem liczb rzeczywistych. Niech I_n będzie przedziałem domkniętym o środku x_n i długości a_n. Dowieść, że istnieje liczba rzeczywista, która nie jest elementem żadnego z przedziałów I_n.

Uwaga: Niech $x'_1 = \frac{1}{1}$, $x'_2 = \frac{2}{1}$, $x'_3 = \frac{2}{2}$, $x'_4 = \frac{1}{2}$, $x'_5 = \frac{3}{1}$, $x'_6 = \frac{3}{2}$, $x'_7 = \frac{3}{3}$, $x'_8 = \frac{2}{3}$, $x'_9 = \frac{1}{3}$, $x'_{10} = \frac{4}{1}$, $x'_{11} = \frac{4}{2}$, ... ($x'_{k^2+j} = \lceil \frac{j}{k+2} \rceil \frac{k+1}{j} + \lfloor \frac{j}{k+2} \rfloor \frac{2k+2-j}{k+1}$ dla $j = 1, 2, \ldots, 2k+1$). W ciągu (x'_n) występują wszystkie liczby wymierne dodatnie, zatem w ciągu $x_1 = 0$, $x_2 = -x'_1$, $x_3 = x'_1$, $x_4 = -x'_2$, $x_5 = x'_2$, ... ($x_{2n} = -x'_n$, $x_{2n+1} = x'_n$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$) występują wszystkie liczby wymierne. Jeśli (I_n) i (a_n) są ciągami występującymi w treści zadania, to każda liczba **wymierna** jest środkiem jednego z przedziałów I_1, I_2, ... więc istnieje liczba x, siłą rzeczy niewymierna, która nie należy do ani jednego przedziału I_1, I_2, ... ■

2. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$.

3. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ i $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

4. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

5. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+2x^5}$.

6. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, tu $m, n \in \mathbb{N}$.

7. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(1+x+x^2)(13+x)(257+x^7)}{(2x+271)^{10}}$.

8. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(1+x)(6+x)(11+x)(17+x)(24+x)}{(x^2+x+1)^3}$.

9. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(1+x)(6+x)(11+x)(17+x)(24+x)(31+x)}{(x^2+x+1)^3}$.

10. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^3-6x^2+11x-6}$.

11. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^5-3x^4+x^3+13x^2-7x-30}{x^5+2x^4-5x^3-10x^2+4x+8}$.

12. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+x^2+x^3+\cdots+x^{2009}-2009}{x^2-1}$.

13. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{257}-257x+256}{(x-1)^2}$.

14. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n}\right)$, tu $m,n\in\mathbb{N}$.

15. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x+1}$.

16. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}+\sqrt[8]{x}+\sqrt[10]{x}}{\sqrt{961x+1024}}$.

17. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 9} \frac{\sqrt{4+5x}-7}{x-9}$.

18. Znaleźć $\lim\limits_{x\to -32} \frac{\sqrt{17-x}-7}{2+\sqrt[5]{x}}$.

19. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{(1+x)^k}-1}{x}$, tu $k,n\in\mathbb{N}$.

20. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 64} \frac{\sqrt[6]{x}-2}{\sqrt{x}-8}$.

21. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{27+6x-14x^7}-3}{x+x^2+x^3}$.

22. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[81]{1+729x}-\sqrt[13]{1+117x}}{x^2+x^3}$.

23. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-1-x}$.

24. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

25. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}} - \sqrt{x+\sqrt{x}}$.

26. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})\cdot\ldots\cdot(1-\sqrt[57]{x})}{(1-x)^{56}}$.

27. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$.

28. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x-\sqrt{x^2-1}\,)^n+(x+\sqrt{x^2-1}\,)^n}{x^n}$, tu $n\in\mathbb{N}$.

29. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$.

30. Znaleźć $\lim\limits_{a\to 0}\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\lim\limits_{a\to 0}\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $0\neq b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$.

31! Wykazać, że jeśli stopień wielomianu w jest dodatni i parzysty, to $\lim\limits_{x\to\infty} w(x) = \infty = \lim\limits_{x\to-\infty} w(x)$.

32! Wykazać, że jeśli stopień wielomianu w jest nieparzysty, to granice $\lim\limits_{x\to\infty} w(x)$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} w(x)$ są nieskończone i zachodzi równość $\lim\limits_{x\to\infty} w(x) = -\lim\limits_{x\to-\infty} w(x)$.

33. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ma w każdym punkcie granicę 0, to istnieje taka liczba niewymierna a, że $f(a) = 0$.

34. Dowieść, że nie istnieje taka funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego rzeczywistego a zachodzi równość $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

35! Podać przykład takich dwu funkcji $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$ i $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ i

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) + g(x) = 0$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) + g(x) = -13$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) + g(x) = \infty$, (d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) + g(x) = -\infty$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) + g(x)$ nie istnieje.

36! Podać przykład takich dwu funkcji $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$ i $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ i

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \cdot g(x) = 0$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \cdot g(x) = -13$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \cdot g(x) = \infty$, (d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \cdot g(x) = -\infty$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \cdot g(x)$ nie istnieje.

37. Niech C będzie zbiorem złożonym z tych liczb x z przedziału $[0,1]$, dla których istnieje taki ciąg (c_n), że $c_n \in \{0,2\}$ dla każdego n i $x = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \frac{c_3}{3^3} + \cdots$, czyli tych liczb $x \in [0,1]$, które mają rozwinięcie w układzie trójkowym złożone jedynie z zer i dwójek. [17.9] Wykazać, że każdy punkt skupienia zbioru C jest elementem tego zbioru.

38. Dowieść, że jeśli $c_n, c_n' \in \{0,2\}$ dla każdego naturalnego n i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n'}{3^n}$, to również $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n'}{2^{n+1}}$. Niech $f\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^{n+1}}$. Dowieść, że funkcja f jest ciągła w każdym punkcie zbioru Cantora C i $f(C) = [0,1]$.

[17.9] Zbiór C nazywany jest zbiorem Cantora. Tej nazwy będziemy używać.

39. Dowieść, że zbiór Cantora nie zawiera żadnego przedziału.

40. Dowieść, że każda funkcja ciągła $g\colon [0,1] \longrightarrow C$ jest stała.

41. Dowieść, że jeśli $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, to każda liczba z przedziału $[0,1]$ jest punktem skupienia zbioru $\{na - \lfloor na \rfloor\colon \quad n \in \mathbb{N}\}$.

42. Niech $\overline{A}$ będzie zbiorem złożonym ze wszystkich punktów zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ i ze wszystkich **skończonych** punktów skupienia zbioru A.

Udowodnić, że $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ i $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$. Podać przykład zbiorów A, B, dla których $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Uwaga: Zbiór $\overline{A}$ nazywamy domknięciem zbioru A. Zbiór jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy jest równy swemu domknięciu. Przedział $[7,13]$ jest domknięty. Podobnie zbiór Cantora, półprosta $[666,\infty)$, zbiór $\{1,2,3,128\}$. Zbiory $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $(0,1]$ nie są domknięte.

43! Zbiór wyrazów $\{a_n\colon \quad n \in \mathbb{N}\}$ ciągu (a_n) jest nieskończony. Dowieść, że ciąg (a_n) ma granicę wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a_n\colon \quad n \in \mathbb{N}\}$ ma dokładnie jeden punkt skupienia.

44. Zdefiniować taką funkcję $a\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, że:

(i) dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} a(n,k)$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a(k,n)$;

(ii) istnieją granice $\lim\limits_{k\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} a(n,k)$ i $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{k\to\infty} a(n,k)$;

(iii) $\lim\limits_{k\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} a(n,k) \neq \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{k\to\infty} a(n,k)$.

45. Dowieść, że każda nieujemna liczba rzeczywista jest punktem skupienia zbioru kwadratów wszystkich liczb wymiernych.

46. Załóżmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zbiór $F_n \subseteq \mathbb{R}$ jest domknięty i $\mathbb{R} = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots$. Dowieść, że istnieje taka liczba $k \in \mathbb{N}$, że zbiór F_k zawiera przedział.

47. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i zachodzi równość $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, to istnieje taka liczba $x_0 \in [a,\infty)$, że $f(x) \geqslant f(x_0)$ dla każdego $x \in [a,\infty)$.

48. Podać przykład ograniczonej funkcji ciągłej określonej na półprostej $[0,\infty)$, która nie jest jednostajnie ciągła.

49! Podać przykład ograniczonej funkcji ciągłej $f\colon (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie jest jednostajnie ciągła.

50. Dowieść, że jeśli $A \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, to każda funkcja ciągła $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona, osiąga swe kresy i jest jednostajnie ciągła.

51. Dowieść, że jeśli $A \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem, który nie zawiera choćby jednego swego skończonego punktu skupienia, to istnieje funkcja ciągła $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie jest ograniczona ani z góry ani z dołu i nie jest jednostajnie ciągła.

52. Dowieść, że jeśli każda funkcja ciągła $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ ma własność przyjmowania wartości pośrednich, tzn. jeśli liczba C znajduje się między liczbami $f(x)$ i $f(y)$, to istnieje takie $c \in A \cap (x,y)$, że $C = f(c)$, to zbiór A jest przedziałem.

53! Dowieść, że każda funkcja wypukła $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła. Podać przykład funkcji wypukłej $f\colon [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, która ma punkt nieciągłości.

54. Niech $f(x) = x^6 + 6x^2 + 12x$ dla $x \in \mathbb{R}$. Niech $f(c)$ będzie najmniejszą wartością wielomianu f (zob. przykład 17.38).

Dowieść, że $c^5 + 2c + 2 = 0$.

Dowieść, że liczba c nie jest pierwiastkiem żadnego niezerowego wielomianu o współczynnikach całkowitych, stopnia mniejszego niż 5.

Dowieść, że liczba $f(c)$ nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach całkowitych, stopnia pierwszego ani drugiego.

55. Podać przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest nieciągła w punkcie 0 i ma własność Darboux (przyjmuje wartości pośrednie).

56. Załóżmy, że $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ i $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ są takimi ciągami, że dla pewnej liczby $x_0 \neq 0$ szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n$ są zbieżne. Udowodnić, że jeśli istnieje taki ciąg (x_j) liczb różnych od 0 zbieżny do 0, że $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_j^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_j^n$ dla $j = 1,2,\ldots$, to $a_n = b_n$ dla $n = 0,1,2,\ldots$

57. Dowieść, że jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to funkcja dana wzorem $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest ciągła w każdym punkcie przedziału $(-1,1]$.

58! Udowodnić, że jeśli funkcje $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe, to funkcje $\max(f,g)$ i $\min(f,g)$ zdefiniowane wzorami $\max(f,g)(x) = \max\big(f(x), g(x)\big)$ i analogicznie $\min(f,g)(x) = = \min\big(f(x), g(x)\big)$ też są ciągłe.

59. Dowieść, że jeśli funkcja **różnowartościowa** $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ma własność Darboux, to f jest funkcją ciągłą.

60. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Udowodnić, że istnieje funkcja niemalejąca $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, której jedynymi punktami nieciągłości są liczby a_1, a_2, a_3, ...

61. Zdefiniować taką jednostajnie ciągłą funkcję $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, że dla każdej liczby $L > 0$ istnieją takie liczby $x, y \geqslant 0$, że $|f(x) - f(y)| > L|x - y|$.

62. Udowodnić, że jeżeli funkcja $f\colon [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona na każdym przedziale ograniczonym i istnieje granica $\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x+1) - f(x)\big)$, to istnieje również granica $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ i spełniona jest równość $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x+1) - f(x)\big)$.

63. Udowodnić, że jeżeli funkcja $f\colon [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona na każdym przedziale ograniczonym i istnieje granica $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}$, to istnieje też granica $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}}$ i spełniona jest równość $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}$.

64. Podać przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, która ma dokładnie jeden punkt ciągłości.

65. Udowodnić, że istnieje funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie jest ograniczona na żadnym przedziale.

66! Jeśli $f\colon B \cup C \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją, że jej ograniczenia $f_{|B}$ do zbioru B i $f_{|C}$ do zbioru C są ciągłe w punkcie $x_0 \in B \cap C$, to funkcja f jest ciągła w punkcie x_0.

67. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, nieograniczona z góry, nieograniczona z dołu, to przyjmuje każda wartość nieskończenie wiele razy.

68. Jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją ciągłą w co najmniej jednym punkcie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f(x+y) = f(x) + f(y)$, to istnieje taka liczba $a \in \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x) = ax$.

69. Jeśli $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją monotoniczną, że równość $f(x+y) = f(x)+f(y)$ zachodzi dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$, to istnieje taka liczba $a \in \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x) = ax$.

70. Jeśli $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją ograniczoną na przedziale (-1,1), że równość $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ma miejsce dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$, to istnieje taka liczba $a \in \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x) = ax$.

71. Niech $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + y\sqrt{2}\colon \quad x, y \in \mathbb{Q}\}$. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f: \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, że $f(x+y) = f(x)+f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ i $f(1) = 1$.

Uwaga: w zbiorze $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ wykonalne są cztery działania arytmetyczne, mianowicie dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez liczby różne od 0.

72. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) := \{\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} + \delta\sqrt{6}\colon \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}\}$. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f: \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, że $f(x + y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ oraz $f(1) = 1$.

73! Dowieść, że jeśli wielomian v nie ma pierwiastków rzeczywistych i stopień wielomianu w nie jest większy niż stopień wielomianu v, to iloraz $\frac{w}{v}$ jest funkcją ograniczoną na $\mathbb{R}$,

74. Rozstrzygnąć czy:

(a) kwadrat funkcji nieciągłej musi być funkcją nieciągłą;

(b) sześcian funkcji nieciągłej musi być funkcją nieciągłą.

75! Dowieść, że jeśli funkcja f jest ciągła, to funkcja $|f|$ też jest ciągła. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

76. Udowodnić uwagę 17.44.

77. Dowieść, że dla każdego wielokąta wypukłego istnieje prosta, która dzieli jednocześnie obwód i pole wielokąta na połowy.

78. Dowieść, że na brzegu każdego wielokąta wypukłego leżą cztery punkty, które są wierzchołkami pewnego kwadratu.

79. Niech $f\colon [3,12] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że zachodzi równość $f(3) = f(12)$. Dowieść, że dla pewnego $x \in [3,12]$ zachodzi równość $f(x) = f(2x)$.

80. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją, że istnieje taka liczba $c \in (0,1)$, że nierówność $|f(x)-f(y)| \leqslant c|x-y|$ jest spełniona dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że istnieje dokładnie jedna liczba $x_0 \in \mathbb{R}$, dla której zachodzi równość $f(x_0) = x_0$.

81. Podać przykład takiej funkcji $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że jeśli $x \neq y$, to $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $f(x) > x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

82. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją i niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Niech $f^n(x) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{\text{n literek f}}(x)\ldots))$. Dowieść, że jeśli nierówność $|f^n(x) - f^n(y)| \leqslant c|x-y|$ jest spełniona dla pewnej liczby $c \in (0,1)$ i wszystkich liczb $x, y \in \mathbb{R}$, to istnieje dokładnie jedna taka liczba $x_0 \in \mathbb{R}$, że $f(x_0) = x_0$.

83. Niech $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x) = 1 - |2x-1|$. Niech $f^n(x) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{\text{n literek f}}(x)\ldots))$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ ustalić liczbę rozwiązań równania $f^n(x) = x$.

84. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, obraz $f([a,b])$ przedziału $[a,b]$ jest przedziałem o długości $b - a$.

85. Niech $C \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem domkniętym i ograniczonym a $f\colon C \longrightarrow C$ — funkcją niemalejącą. Dowieść, że $f(p) = p$ dla pewnego punktu $p \in C$.

86. Niech $0 < c < 1$ i niech $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{c} & \text{dla } x \in [0,c] \\ \frac{1-x}{1-c} & \text{dla } x \in [c,1] \end{cases}$.

Punkt x ma okres n wtedy i tylko wtedy, gdy n jest najmniejszą z liczb naturalnych $k \geqslant 1$, dla których zachodzi równość $\underbrace{f(f(\ldots f}_{\text{k literek f}}(x)\ldots)) = x$. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją punkty, które mają okres n oraz że jest tych punktów skończenie wiele.

87. Niech $f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że dla każdej liczby $x > 0$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{n}\right) = 0$. Udowodnić, że $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

88. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji f, jeśli $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ dla $x \notin \{1,2\}$, $f(1) = f(2) = 0$.

89. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji f, jeśli $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{2x^2-3x+1}$ dla $x \notin \{1, \frac{1}{2}\}$, $f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

90. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji f, jeśli $f(x) = x^2 - \lfloor x^2 \rfloor$.

91. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji f, jeśli

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{p}{q+1}, & \text{gdy } x = \frac{p}{q},\ q \geqslant 1,\ p,q \in \mathbb{Z},\ \mathrm{nwd}(p,q) = 1. \end{cases}$$

92. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji f, jeśli g jest funkcją Riemanna i $f(x) = (x^3 + 6x^2 + 11x + 6)g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

93. Z wypukłości funkcji x^2 wywnioskować, że jeśli $a,b,c > 0$, to zachodzi nierówność $\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a+b+c} \leqslant a^3 + b^3 + c^3$.

94. Dowieść, że jeśli $n > 1$ jest liczbą naturalną, to funkcja $\sqrt[n]{x}$ jest ściśle wklęsła na $[0,\infty)$.

95. Dowieść, że jeśli $n > 1$ jest liczbą naturalną, to funkcja $\sqrt[n]{x}$ jest jednostajnie ciągła na $[0,\infty)$.

96! Załóżmy, że funkcja $f\colon B \cup C \longrightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła na zbiorze B i na zbiorze C oraz $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset \neq C$. Czy wynika stąd jednostajna ciągłość na zbiorze $B \cup C$?

97. Czy funkcja $\frac{x}{1+x^2}$ jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$?

98. Czy funkcja $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$?

99. Czy istnieje jednostajnie ciągła funkcja określona na półprostej $[0,\infty)$, która przekształca tę półprostą na $\mathbb{R}$?

100. Czy istnieje różnowartościowa funkcja ciągła określona na półprostej $[0,\infty)$, która przekształca tę półprostą na $\mathbb{R}$?

101. Zdefiniować różnowartościową funkcje ciągłą przekształcającą półprostą $(0,\infty)$ na $\mathbb{R}$.

102. Czy istnieje różnowartościowa funkcja jednostajnie ciągła przekształcającą półprostą $(0,\infty)$ na $\mathbb{R}$?

103. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła, to dla każdej liczby $d>0$ istnieje taka liczba M, że jeśli $|x_1-x_2|\leqslant d$, to $\big|f(x_1)-f(x_2)\big|\leqslant M$.

104. Udowodnić, że jeśli funkcja $f\colon[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ jest ciągła oraz $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, to f jest ciągła jednostajnie.

105. Rozstrzygnąć, czy z tego że funkcja $f\colon[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ jest ciągła i $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ oraz $g\colon[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła, wynika, że ich iloczyn jest funkcją jednostajnie ciągłą.

106. Znaleźć wszystkie przedziały, na których funkcja $\sin\sqrt[3]{x}$ jest jednostajnie ciągła.

107. Znaleźć wszystkie przedziały, na których funkcja $\sin x^3$ jest jednostajnie ciągła.

108. Wykazać, że jeśli funkcja ściśle wypukła jest ciągła i **nie** jest monotoniczna, to ma wartość najmniejszą i ta najmniejsza wartość jest przyjmowana w dokładnie jednym punkcie, przy czym jest to punkt wewnętrzny dziedziny funkcji.

109. Wykazać, że jeśli funkcje f i g są wypukłe, funkcja g jest niemalejąca, to funkcja $g\circ f$ jest *wypukła*, jeśli natomiast g jest nierosnąca, to złożenie $g\circ f$ *może* być funkcją *wklęsłą*, *wypukłą* lub być ściśle wypukła na jednym przedziale, a na drugim ściśle wklęsła.

110. Czy funkcja ciągła f, wypukła na każdym z przedziałów $[a,b]$ i $[b,c]$ musi być wypukła na przedziale $[a,c]$?

111. Podać przykład dwu funkcji dodatnich ściśle wypukłych, których iloczyn jest ściśle wklęsły.

112. Wykazać, że iloczyn dwu dodatnich funkcji wypukłych, niemalejących jest wypukły. Czy iloczyn dwu funkcji wypukłych, nierosnących musi być wypukły?

Sformułować odpowiednie twierdzenie dla funkcji wklęsłych.

POTĘGI I LOGARYTMY

Niech $a \neq 0$ będzie liczbą rzeczywistą, n — liczbą całkowitą. Określiliśmy potęgę liczby a wzorami: $a^0 = 1$, $a^{n+1} = a^n \cdot a$ dla $n = 0, 1, 2\ldots$ oraz $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ dla $n = -1, -2, -3, \ldots$. Spełnione są równości $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ i $(a^m)^n = a^{mn}$ dla dowolnych liczb całkowitych m, n oraz $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{Z}$. Rozszerzymy teraz definicje potęgi definiując najpierw potęgi o wykładniku wymiernym, a potem o wykładniku rzeczywistym. Oczywiście zachowamy ważne własności potęgowania.

Z wymienionych wyżej najważniejsza jest pierwsza, bo pozostałe z niej wynikają. Będziemy więc tak definiować potęgi, by spełniona była równość $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. To natychmiast prowadzi do pewnego ograniczenia: $a = a^1 = a^{1/2} \cdot a^{1/2} = \left(a^{1/2}\right)^2 \geqslant 0$, zatem podstawa potęgi, jeśli chcemy dopuścić np. wszystkie wymierne wykładniki musi być nieujemna. Nie może ona być równa 0, bo musiałoby wtedy być $0^0 = 1$, więc $1 = 0^1 \cdot 0^{-1} = 0 \cdot 0^{-1}$, co jest nie możliwe.

Definicja 18.1
dla każdej liczby rzeczywistej $x > 0$ przyjmujemy $0^x = 0$. ■

Nie definiujemy 0^0, ani 0^x dla $x < 0$, by nie mieć problemów z własnościami potęg.

W dalszych rozważaniach zakładamy, że $a > 0$. Niech $w \in \mathbb{Q}$. Załóżmy, że $q > 0$ i p są takimi liczbami całkowitymi, że $w = \frac{p}{q}$. Powinna być spełniona równość

$$\left(a^w\right)^q = \underbrace{a^w \cdot a^w \cdot \ldots \cdot a^w}_{\text{q czynników}} = a^{qw} = a^p .$$

Oznacza to, że powinniśmy przyjąć, że $a^w = \sqrt[q]{a^p}$. Zauważmy, że liczby wymierne można zapisywać w postaci ilorazu liczby całkowitej i naturalnej na nieskończenie wiele sposobów. Jednak z tego, że $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, $s > 0$ i $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ wynika, że $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[s]{a^r}$.

Definicja 18.2 (potęgi o wykładniku wymiernym)
Jeśli $a > 0$, $w = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ i $q > 0$, to potęgą liczby a o wykładniku w nazywamy liczbę $a^w = \sqrt[q]{a^p}$. [18.1] ■

Przykład 18.1 $8^{1/3} = 2$, $2^{1/2} = \sqrt{2}$, $32^{4/5} = 16$, $81^{-2/4} = \frac{1}{9}$, $1048576^{-7/20} = \frac{1}{128}$, $\left(\frac{216}{15625}\right)^{-2/3} = \frac{625}{36}$, $441^{3/2} = 9261$. ■

Dla każdej rzeczywistej liczby dodatniej a definiujemy funkcję $\tilde{f}_a\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ wzorem $\tilde{f}_a(w) = a^w$. Z własności potęg o wykładnikach całkowitych i własności pierwiastków wynika

Twierdzenie 18.3
Funkcja $\tilde{f}_a$ ma następujące własności:

18.3.1 Dla dowolnych liczb wymiernych w, i v zachodzi wzór $\tilde{f}_a(w + v) = \tilde{f}_a(w) \cdot \tilde{f}_a(v)$;

18.3.2 $\tilde{f}_a(1) = a$;

18.3.3 jeśli $a > 1$, to funkcja $\tilde{f}_a$ jest ściśle rosnąca, funkcja $\tilde{f}_1$ jest stała, jeśli $0 < a < 1$, to funkcja $\tilde{f}_a$ jest ściśle malejąca.

18.3.4 $\tilde{f}_a(w) > 0$ dla każdej liczby wymiernej w. ■

Z uwag poprzedzających definicję potęgi o wykładniku wymiernym wynika, że funkcja spełniającą warunki 18.3.1 i 18.3.2 jest tylko jedna. Wykażemy, że można ją przedłużyć do funkcji ciągłej na $f_a\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ w dokładnie jeden sposób.

Lemat 18.4
Funkcja $\tilde{f}_a$ jest ciągła w punkcie 0.

Dowód. Funkcja $\tilde{f}_a$ jest monotoniczna, **więc istnieją granice jednostronne** $\lim\limits_{x\to 0^+} \tilde{f}_a$ i $\lim\limits_{x\to 0^-} \tilde{f}_a$. Wiemy też, że $\tilde{f}_a(0) = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_a(\frac{1}{n})$ i $\tilde{f}_a(0) = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{-1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_a(-\frac{1}{n})$. Wynika stąd, że obie granice jed-

[18.1] Czytamy a do potęgi w lub po prostu a do w.

nostronne są równe wartości funkcji w punkcie 0, zatem funkcja jest ciągła w tym punkcie. ∎

Lemat 18.5

Funkcja $\tilde{f}_a$ jest jednostajnie ciągła na każdym zbiorze postaci $(c,d)\cap\mathbb{Q}$, gdzie $c,d\in\mathbb{R}$ i $c<d$.

Dowód. Niech $c,d\in\mathbb{R}$. Ponieważ funkcja $\tilde{f}_a$ jest monotoniczna, więc jest ograniczona na każdym zbiorze ograniczonym (jej dziedzina jest nieograniczona!). Istnieje zatem liczba M taka, że dla każdego $w\in(c,d)\cap\mathbb{Q}$ zachodzi nierówność $0<\tilde{f}_a(w)<M$. Niech $v,w\in(c,d)\cap\mathbb{Q}$. Mamy

$$|\tilde{f}_a(v)-\tilde{f}_a(w)|=\tilde{f}_a(w)|\tilde{f}_a(v-w)-1|\leqslant M|\tilde{f}_a(v-w)-\tilde{f}_a(0)|.$$

Z tej nierówności i z ciągłości funkcji $\tilde{f}_a$ w punkcie 0 wynika jednostajna ciągłość na zbiorze $(c,d)\cap\mathbb{Q}$. ∎

Lemat 18.6

Dla każdej liczby $a>0$ istnieje dokładnie jedna funkcja ciągła $f_a\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, która jest przedłużeniem funkcji $\tilde{f}_a\colon\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}$.

Dowód. Z twierdzenia o przedłużaniu funkcji jednostajnie ciągłej z poprzedniego rozdziału wynika, że dla każdego $n\in\mathbb{N}$ obcięcie funkcji $\tilde{f}_a$ do zbioru $(-n,n)\cap\mathbb{Q}$ można przedłużyć do funkcji ciągłej $g_n\colon[-n,n]\longrightarrow\mathbb{R}$. Z jednoznaczności przedłużenia wynika, że jeśli $m>n$ i $|x|\leqslant n$, to $g_m(x)=g_n(x)$. [18.2] Przyjmujemy $f_a(x)=g_n(x)$ dla $n\geqslant|x|$. Ciągłość funkcji f_a wynika natychmiast z tego, że każda z funkcji g_n jest ciągła (jednostajnie). ∎

Twierdzenie 18.7

Dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej a istnieje dokładnie jedna taka funkcja **ciągła** $f_a\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, że

18.7.1 dla dowolnych liczb rzeczywistych x,y zachodzi równość
$$f_a(x+y)=f_a(x)\cdot f_a(y);$$

[18.2] $g_n(x)=\lim_{j\to\infty}\tilde{f}_a(w_j)$, gdzie $w_j\in(-n,n)\cap\mathbb{Q}\subset(-m,m)\cap\mathbb{Q}$.

18.7.2 $f_a(1) = a$.

Funkcja f_a jest dodatnia, jest przedłużeniem funkcji $\tilde{f}_a$, $f_a(0)=1$. Jeśli $a > 1$, to funkcja f_a jest ściśle rosnąca, $f_1(x) = 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, jeśli $0 < a < 1$, to funkcja f_a jest ściśle malejąca.

Dowód. Niech f_a oznacza ciągłe przedłużenie funkcji $\tilde{f}_a$, którego istnienie zostało wykazane w lemacie poprzedzającym to twierdzenie. Niech $x, y \in \mathbb{R}$. Istnieją ciągi liczb wymiernych (v_n) i (w_n) zbieżne odpowiednio do x i y. Zachodzi więc równość $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n + w_n) = x + y$. Z ciągłości f_a wynika, że

$$f_a(x) \cdot f_a(y) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_a(v_n) \cdot \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_a(w_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \big(\tilde{f}_a(v_n) \cdot \tilde{f}_a(w_n)\big) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_a(v_n + w_n) = f(x+y).$$

Oczywiście $f_a(1) = \tilde{f}_a(1) = a$. Wykazaliśmy, że funkcja ciągła f_a ma obie własności.

Wykażemy, że jest tylko jedna funkcja ciągła spełniająca oba warunki. Z pierwszego warunku wynika, że $g(x)=g(\frac{x}{2}) \cdot g(\frac{x}{2}) \geqslant 0$. Jeśli $g(x) = 0$, to $a = g(1) = g(x)g(1-x) = 0$ wbrew temu, że $a > 0$. Wobec tego $g(x) > 0$ dla każdego x. Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość $g(1) = g(n \cdot \frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})^n$, zatem $g(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{a}$. Jeśli k, n są liczbami naturalnymi, to $g(\frac{k}{n}) = g(\frac{1}{n})^k$, zatem $g(\frac{k}{n}) = \sqrt[n]{a^k} = a^{k/n}$. $g(0) = g(0+0) = g(0)^2$, zatem $g(0) = 1$ (wiemy, że $g(0) > 0$). Stąd $1 = g(0) = g(x)g(-x)$, zatem $g(-x) = \frac{1}{g(x)}$ dla każdego x. W szczególności mamy $g(-\frac{k}{n}) = \frac{1}{g(\frac{k}{n})} = \frac{1}{a^{k/n}} = a^{-k/n}$. Wykazaliśmy więc, że dla każdej liczby wymiernej w zachodzi równość $g(w) = a^w = \tilde{f}_a(w)$. Stąd i z ciągłości g wynika, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $g(x) = f_a(x)$, co kończy dowód jednoznaczności.

Załóżmy teraz, że $a > 1$ i $x < y$. Istnieją takie ciągi liczb wymiernych (v_n) i (w_n), że $x = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ i $y = \lim\limits_{n\to\infty} w_n$. Dla dostatecznie dużych n mamy $v_n < w_n$, więc $f_a(v_n) < f_a(w_n)$, wobec tego $f_a(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_a(v_n) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} f_a(w_n) = f_a(y)$, więc $f_a(x) \leqslant f_a(y)$. Istnieją takie liczby wymierne v, w, że $x < v < < w < y$, zatem $f_a(x) \leqslant f_a(v) < f_a(w) \leqslant f_a(y)$, więc $f(x) < f(y)$.

W taki sam sposób dowodzimy, że funkcja f_1 jest stała, a dla $0 < a < 1$ funkcja f_a jest ściśle malejąca. ■

Definicja 18.8 (potęgi i funkcji wykładniczej)
Funkcję ciągłą f_a, która spełnia warunek $f_a(1) = a$ oraz warunek $f_a(x+y) = f_a(x)f_a(y)$ dla $x, y \in \mathbb{R}$, nazywamy funkcją wykładniczą o podstawie a. Jej wartość w punkcie x oznaczamy przez a^x i nazywamy potęgą liczby a o wykładniku x. ■

Uwaga 18.9 Zamiast zakładać ciągłość funkcji a^x można zakładać jej monotoniczność lub ograniczoność na pewnym otwartym przedziale zawierającym 0. Dowody wcale nie są trudniejsze od podanego przy założeniu ciągłości. ■

Uwaga 18.10 Jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą (albo monotoniczną), dla której równość $f(x+y) = f(x)f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$, to albo jest f jest funkcją zerową, albo istnieje taka liczba $a > 0$, że $f(x) = a^x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. ■

Uwaga 18.11 Można wykazać istnienie funkcji nieciągłych spełniających równanie $f(x+y) = f(x)f(y)$. ■

Przykład 18.2 Niech $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Wykazaliśmy już, że $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ (przykład 16.18) i że funkcja exp jest ciągła (przykład 17.31), więc $\exp(x) = \big(\exp(1)\big)^x$ dla $x \in \mathbb{R}$. ■

Przykład 18.3 Niech $\mathrm{Exp}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Udowodniliśmy w rozdziale pierwszym, że ta funkcja jest dobrze określona dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz, że $\mathrm{Exp}(x+y) = \mathrm{Exp}(x)\mathrm{Exp}(y)$. Dla każdego x i dla $n > -x$ zachodzi nierówność $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geqslant 1 + x$, która wynika z nierówności Bernoulliego, więc $\mathrm{Exp}(x) \geqslant 1+x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Stąd $\mathrm{Exp}(x) = \frac{1}{\mathrm{Exp}(-x)} \leqslant \frac{1}{1-x}$ dla $x < 1$. Wobec tego $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{Exp}(x) = \mathrm{Exp}(0) = 1$, zatem funkcja Exp jest ciągła, o czym przekonujemy się tak, jak o ciągłości funkcji exp w końcu przykładu 17.31. Stąd wynika, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $\mathrm{Exp}(x) = \big(\mathrm{Exp}(1)\big)^x = e^x$. Przypomnijmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \big(1+\frac{1}{n}\big)^n = e = \lim\limits_{n\to\infty} \big(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\big)$, zad. 15.30. ■

Przykład 18.4 Z rozumowania w poprzednim przykładzie wynika, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $e^x \geqslant 1+x$. Jeśli $x < 1$, to również $1+x \leqslant e^x = \frac{1}{e^{-x}} \leqslant \frac{1}{1+(-x)} = \frac{1}{1-x}$. ■

Twierdzenie 18.12

Dla dowolnych liczb dodatnich a, b i dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzą następujące wzory:
$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$, $\big(a^x\big)^y = a^{xy}$, $(ab)^x = a^x b^x$, $\big(\frac{a}{b}\big)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

Dowód. $a^{-x} \cdot a^x = a^0 = 1$, więc pierwszy został udowodniony. $a^{x-y} \cdot a^y = a^x$, co dowodzi drugi z kolei. Jeśli $x \in \mathbb{R}$, to $a^x > 0$. Ustalmy x. Niech $g(y) = \big(a^x\big)^y$ i $h(y) = a^{xy}$. Zachodzą równości $g(1) = \big(a^x\big)^1 = a^x = a^{x\cdot 1} = h(1)$. Mamy też

$$g(y+z) = \big(a^x\big)^{y+z} = \big(a^x\big)^y \cdot \big(a^x\big)^z = g(y)g(z) \text{ oraz}$$
$$h(y+z) = a^{x(y+z)} = a^{xy+xz} = a^{xy}a^{xz} = h(y)h(z).$$

Funkcja g jest ciągła jako wykładnicza o podstawie a^x, a funkcja h jako złożenie funkcji linowej i wykładniczej. Z twierdzenia o jednoznaczności funkcji wykładniczej wynika, że dla każdej liczby y zachodzi równość $g(y) = h(y)$, czyli $\big(a^x\big)^y = a^{xy}$. W taki sam sposób można udowodnić równość $(ab)^x = a^x b^x$. Z niej wynika, że $\big(\frac{a}{b}\big)^x = \frac{a^x}{b^x}$. ■

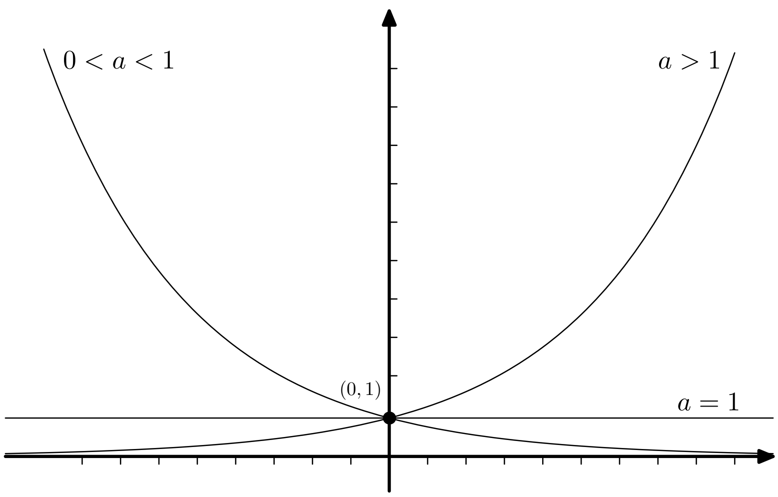
Twierdzenie 18.13

Jeśli $a > 1$, to $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ i $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$.
Jeśli $a < 1$, to $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \infty$ i $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$.

Dowód. Funkcja a^x jest monotoniczna, więc wszystkie granice istnieją. Jeśli $a > 1$, to $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$, zatem $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$. W pozostałych trzech przypadkach postępujemy podobnie. ■

Twierdzenie 18.14 (o wypukłości funkcji wykładniczej) Funkcja wykładnicza a^x jest wypukła, jeśli $0 < a \neq 1$, to jest ściśle wypukła.

Dowód. Jeśli $x \neq y$ i $0 < a \neq 1$, to $0 < \left(a^{x/2} - a^{y/2}\right)^2 = a^x + a^y - 2a^{(x+y)/2}$, zatem $a^{(x+y)/2} < \frac{1}{2}\left(a^x + a^y\right)$, co w świetle twierdzenia o wypukłości funkcji ciągłej kończy dowód ścisłej wypukłości, gdy $1 \neq a > 0$. ■



Wykresy funkcji $y = a^x$

Twierdzenie 18.15 (o obrazie funkcji wykładniczej) Jeśli $0 < a \neq 1$, to dla każdej liczby dodatniej y istnieje dokładnie jedna taka liczba rzeczywista x, że $y = a^x$.

Dowód. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $a > 1$. Mamy wtedy $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ i $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$, więc istnieją takie liczby x' i x'', że $a^{x'} < y < a^{x''}$. Funkcja wykładnicza jest ciągła, więc ma własność przyjmowania wartości pośrednich (Darboux), zatem istnieje taka liczba $x \in (x', x'')$, że $y = a^x$. Ze ścisłej monotoniczności funkcji wykładniczej wnioskujemy, że taka liczba x jest co najwyżej jedna. ■

Twierdzenie, które właśnie udowodniliśmy można wypowiedzieć w następujący sposób: obrazem funkcji wykładniczej o podstawie $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ jest półprosta $(0,\infty)$.

Definicja 18.16 (logarytmu)
Niech $0 < a \neq 1$. Logarytmem liczby $y > 0$ przy podstawie a nazywamy taką liczbę $x \in \mathbb{R}$ taką, że $y = a^x$. Piszemy wtedy $x = \log_a y$. Funkcję, która liczbie y przypisuje jej logarytm przy podstawie a nazywamy logarytmiczną. ■

Możemy więc napisać równość $a^{\log_a x} = x$. Funkcja logarytmiczna o podstawie a jest funkcją odwrotna do funkcji wykładniczej o tej samej podstawie. Z definicji logarytmu, z własności potęg i twierdzenia o ciągłości funkcji odwrotnej wynika

Twierdzenie 18.17 (o własnościach logarytmu)
Niech $a, b > 0$ i $a \neq 1 \neq b$. Wtedy

18.17.1 $\log_a 1 = 0$;

18.17.2 $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ dla dowolnych $x, y > 0$;

18.17.3 $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ dla dowolnych $x, y > 0$;

18.17.4 $\log_a \left(x^y\right) = y \log_a x$ dla dowolnego $x > 0$ i $y \in \mathbb{R}$;

18.17.5 $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$ dla dowolnego $x > 0$;

18.17.6 $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ dla dowolnego $x > 0$;

18.17.7 funkcja logarytmiczna jest ciągła na $(0,\infty)$;

18.17.8 jeśli $a > 1$, to funkcja wykładnicza $\log_a x$ jest ściśle rosnąca, a jeśli $0 < a < 1$ — ściśle malejąca. ■

Twierdzenie 18.18 (o wypukłości logarytmu)
Jeśli $0 < a < 1$, to funkcja $\log_a$ jest ściśle wypukła, jeśli $a > 1$, to funkcja $\log_a$ jest ściśle wklęsła.

Dowód. Niech $x \neq y$ będą dowolnymi liczbami dodatnimi i niech $0 < p < 1$. Ze ścisłej wypukłości funkcji a^x wynika, że

$$a^{p \log_a x + (1-p) \log_a y} < p a^{\log_a x} + (1-p) a^{\log_a y} = px + (1-p)y .$$

Jeśli $0 < a < 1$, to funkcja $\log_a$ jest ściśle malejąca, więc

$$p \log_a x + (1-p) \log_a y > \log_a(px + (1-p)y),$$

a jeśli $a > 1$, to funkcja $\log_a$ jest ściśle rosnąca, więc

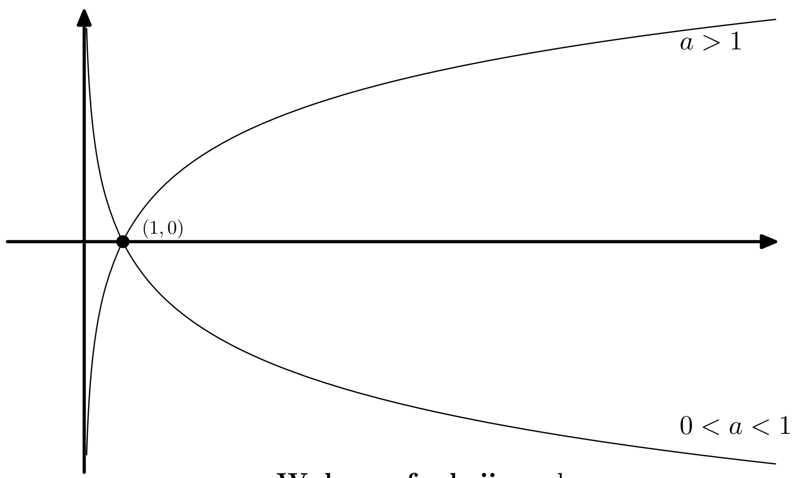
$$p \log_a x + (1-p) \log_a y < \log_a(px + (1-p)y).$$

Dowód został zakończony. ■

W twierdzeniu 18.13 podane są granice funkcji wykładniczej w $\pm\infty$. Z tego twierdzenia wynika od razu

Twierdzenie 18.19

Jeśli $a > 1$, to $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = \infty$ i $\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = -\infty$.
Jeśli $0 < a < 1$, to $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$ i $\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = \infty$. ■



Wykresy funkcji $y = \log_a x$

Uwaga 18.20 (po co nam logarytmy)

Logarytmami zaczęto zajmować się na początku XVII wieku. Celem było uproszczenie skomplikowanych obliczeń pojawiających się w różnych sytuacjach, głównie w astronomii. Nie było wtedy komputerów, kalkulatorów — obliczano wszystko ,,ręcznie". Opublikowanie tablic przez Johna Napiera w 1614 r logarytmicznych, a następnie w 1624 r tablic logarytmów dziesiętnych (czyli o podstawie 10) przez Henry Briggsa uprościło obliczenia: można było zastąpić mnożenie dodawaniem, pierwiastkowanie — dzieleniem logarytmu przez stopień pierwiastka itd. Chcąc znaleźć iloczyn xy można było znaleźć w tablicach logarytmów liczby

$\log_a x$ i $\log_a y$, następnie dodać je, bo $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, odszukać w tablicach liczbę $\log_a(xy)$, by odczytać czemu jest równy iloczyn. Podobnie można potęgować, pierwiastkować, dzielić.

Dziś rachunki przeprowadzają za nas urządzenia elektroniczne i mało kogo obchodzi, jak one to robią. Tym nie mniej jest drugi bardzo istotny powód używania logarytmów. W sytuacjach, w których mamy do czynienia z liczbami bardzo różnej wielkości warto te liczby zlogarytmować. Podstawowe przykłady to skala trzęsień ziemi, jasności gwiazd, występujący w chemii czynnik pH i wiele innych. Jeśli pojawiają się czasem liczby wielkości 10^{-7} a czasem liczby rzędu 10^7, to jest kłopot z kontrolą ich wielkości, z rysowaniem wykresów itp. Po zlogarytmowaniu (przy podstawie 10) mamy do czynienia z liczbami od -7 do 7, które znacznie łatwiej można kontrolować. Nie wydaje się, by w dającej się przewidzieć przyszłości zrezygnowano z logarytmów. ■

Bardzo ważną rolę w matematyce pełni funkcja wykładnicza o podstawie e i wraz z nią logarytmy o tej samej podstawie. Zwane są one naturalnymi. W istocie rzeczy one pojawiły się przed dziesiętnymi.

Definicja 18.21 (logarytmu naturalnego)
Logarytmem naturalnym liczby $x > 0$ nazywamy liczbę $\log_e x$, którą oznaczamy symbolem $\ln x$. ■

Ponieważ $e \approx 2{,}718281828 > 1$, więc funkcja ln jest ściśle rosnąca i ściśle wklęsła.

Zajmiemy się dalszymi własnościami funkcji wykładniczych i logarytmicznych.

Twierdzenie 18.22
Dla każdej liczby dodatniej a istnieje granica $\lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$.

Dowód. Istnienie skończonych granic jednostronnych wynika z wypukłości funkcji wykładniczej, co udowodniliśmy w poprzednim rozdziale (zob. twierdzenie 17.54). Wystarczy wykazać ich równość. Mamy $\lim\limits_{h\to 0} a^h = 1$ i $\frac{a^h-1}{h} = a^h\frac{1-a^{-h}}{h} = a^h\frac{a^{-h}-1}{-h}$. Z tych równości wynika od razu, że $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{a^h-1}{h} = 1\cdot\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{a^h-1}{h}$, co kończy dowód twierdzenia. ■

Przykład 18.5 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$. Wiemy już (przykład 18.4), jeśli $x<1$, to $1+x\leqslant e^x\leqslant\frac{1}{1+(-x)} = \frac{1}{1-x} = 1+x+\frac{x^2}{1-x}$, a stąd wnioskujemy, że $0\leqslant\frac{e^x-(1+x)}{|x|}\leqslant\frac{|x|}{1-x}\xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Stąd wynika, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{x} = 0$, bo $\frac{e^x-(1+x)}{x} = \frac{e^x-(1+x)}{|x|}\frac{|x|}{x}$ a funkcja $\frac{|x|}{x}$ jest ograniczona. ■

Przykład 18.6 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$. Dla $a=1$ obie strony równości są równe 0. Załóżmy, że $0<a\neq 1$. Wobec tego zachodzi równość $\frac{a^x-1}{x} = \frac{e^{x\ln a}-1}{x} = \frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a$. Z tej równości i tego, co wykazaliśmy w poprzednim przykładzie wynika dowodzony wzór. Dodatkowo $\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = a^x\ln a$. ■

Uwaga 18.23

Czytelnik zechce wykazać, że jeśli dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $a^x\geqslant 1+x$, to $a=e$. ■

Przykład 18.7 Jeśli $x>-1$, to $x\geqslant\ln(1+x)$ przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=0$. Tę nierówność otrzymujemy logarytmując znaną już nierówność $e^x\geqslant 1+x$. ■

Przykład 18.8 Jeśli $x>-1$, to $\ln(1+x)\geqslant\frac{x}{1+x}$.
Mamy $\frac{-x}{1+x} = -1+\frac{1}{1+x} > -1$, zatem $\frac{-x}{1+x}\geqslant\ln\left(1+\frac{-x}{1+x}\right) = \ln\frac{1}{1+x} = -\ln(1+x)$, czyli $\ln(1+x)\geqslant\frac{x}{1+x}$. ■

Przykład 18.9 Wykażemy, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Wynika to z nierówności $x\geqslant\ln(1+x)\geqslant\frac{x}{1+x} = x+\frac{-x^2}{1+x}$, bo z niej wynika, że $0\leqslant x-\ln(1+x)\leqslant\frac{x^2}{1+x}$. ■

Uwaga 18.24

Funkcje wykładnicze służą do opisywania wielu zjawisk. Rozważymy dwa przykłady: zmiana długości metalowego pręta pod wpływem zmiany jego temperatury i ubytek masy pierwiastka promieniotwórczego z upływem czasu. Jak wiadomo „ *przyrost* $\Delta\ell$ *długości metalowego pręta odpowiadający przyrostowi* Δt *jego temperatury jest proporcjonalny do jego długości* ℓ ". Podobnie *ubytek* Δm *masy pierwiastka promieniotwórczego w czasie* Δt *jest proporcjonalny do masy* m.

Oznaczmy przez $\ell(t)$ długość pręta w temperaturze t. Wtedy $\Delta\ell = \ell(t+\Delta t) - \ell(t)$. Jeśli współczynnik proporcjonalności oznaczymy przez k, to $\Delta\ell = k\ell(t)$. Oczywiście różnym przyrostom temperatury odpowiadają różne wartości współczynnika k, więc należy myśleć o k jak o funkcji zmiennej Δt. Ta funkcja oczywiście jest rosnąca — większy przyrost temperatury powoduje większe wydłużenie pręta. Jeśli h jest liczbą rzeczywistą, to

$$\ell(t+h) = \ell(t) + k(h)\cdot\ell(t) = \big(1+k(h)\big)\ell(t).$$

Dla dowolnych liczb h_1, h_2 mamy więc $\big(1+k(h_1+h_2)\big)\ell(t) = {=}\ell(t+h_1+h_2) = \big(1+k(h_2)\big)\ell(t+h_1) = \big(1+k(h_2)\big)\big(1+k(h_1)\big)\ell(t)$. Niech $f(h) = 1+k(h)$. Z otrzymanej równości wnioskujemy, że $f(h_1+h_2) = f(h_2)f(h_1)$, więc funkcja f jest funkcją wykładniczą (jest rosnąca!). Istnieje więc taka liczba $a > 1$, że dla dowolnego h zachodzi równość $f(h) = a^h$. [18.3] Niech $\lambda = \ln a$. Możemy napisać $f(h) = e^{\lambda h}$. Wtedy $\ell(t+h) = e^{\lambda h}\ell(t)$. Liczba λ nazywana jest współczynnikiem rozszerzalności cieplnej metalu. Dla żelaza mamy $\lambda \approx 1{,}2\cdot 10^{-5}\frac{1}{1^\circ C}$.

[18.3] W istocie rzeczy funkcja k, więc również funkcja f, jest określona jedynie w pewnym otoczeniu 0, bo w wysokich i w niskich temperaturach prawo fizyczne, do którego odwołaliśmy się już nie działa, np. w wysokiej temperaturze metal staje się płynny. Jednak można twierdzenie charakteryzujące funkcję wykładniczą udowodnić w przypadku funkcji określonych na przedziale postaci $(-\delta,\delta)$, wtedy równanie $f(x+y)=f(x)f(y)$ ma być spełnione, jeśli $x,y\in(-\delta,\delta)$ i $x+y\in(-\delta,\delta)$.

Jeśli $0 < \lambda h < 1$, to $0 < e^{\lambda h} - (1+\lambda h) < \frac{(\lambda h)^2}{1-\lambda h}$. Wzór $\frac{x^2}{1-x}$ definiuje funkcję ściśle rosnącą na przedziale $[0,1)$, bo licznik rośnie a mianownik maleje. Przyjmijmy, że różnicą temperatur między zimą i latem wynosi nie więcej niż 50° C, a długość szyny kolejowej jest równa zimą 20 m. Wtedy ($h=50$, $\ell(t)=20$)

$$(1+\lambda h)\ell(t) = (1+1{,}2\cdot 10^{-5}\cdot 50)\cdot 20m = 20m + 1{,}2\cdot 10^{-2}m\,,$$

zatem w przybliżeniu długość szyny latem jest większa o 12 mm niż zimą. Błąd, który popełniliśmy jest mniejszy niż

$$20\cdot\frac{(6\cdot 10^{-4})^2}{1-6\cdot 10^{-4}} < 20\cdot(6\cdot 10^{-4})^2\cdot(1+7\cdot 10^{-4}) =$$
$$= 7,2\cdot 10^{-6} + 5{,}04\cdot 10^{-9} < 7{,}3\cdot 10^{-6} < 10^{-5}\,.$$

To w metrach, więc ten błąd jest mniejszy niż $0,01$ mm. Taki błąd żadnego praktycznego znaczenia w tym przypadku nie ma, bo z taką dokładnością szyny nie są mierzone! Dlatego zamiast funkcji wykładniczej stosowana jest w takich sytuacjach **liniowa**, którą przybliżamy właściwą funkcję.

Zupełnie inaczej jest w przypadku rozpadu promieniotwórczego, chociaż wzór, który otrzymujemy, wygląda prawie tak samo: $m(t+h) = e^{\lambda h}m(t)$. Tym razem $\lambda < 0$, ale to nie jest główna różnica. Ważne jest to, że często interesuje nas tzw. okres połowicznego rozpadu, czyli takie $h > 0$, że $e^{\lambda h} = \frac{m(t+h)}{m(t)} = \frac{1}{2}$, czyli $\lambda h = -\ln 2 \approx -0{,}6931$. W tym wypadku otrzymujemy

$$e^{\lambda h} - (1+\lambda h) = \tfrac{1}{2} - (1-0{,}693) = 0{,}193\,,$$

a to oznacza, że wzoru przybliżonego stosować w tej sytuacji nie można. Obliczenia, w których $\lambda h \approx -\ln 2$ są często wykonywane. Przy ustalaniu wieku zabytków zawierających substancje organiczne mierzona jest zawartość radioaktywnego węgla ^{14}C, tzw. radiowęgla. Czas obliczany jest z wzoru $m(t+h) = e^{\lambda h}m(t)$ — znamy współczynnik λ, czas $t+h$, w którym dokonujemy pomiaru, masę radiowęgla $m(t+h)$ w chwili dokonywania pomiaru, $m(t)$ — masę radiowęgla w żywej substancji organicznej (w żywych organizmach stosunek masy radiowęgla do masy węgla jest stały, a po śmierci maleje, bo nowy węgiel radioaktywny już nie jest dostarczany i jego zawartość zmniejsza się dwukrotnie w ciągu około 5730 lat, tzn. $\lambda \approx -\frac{0{,}6931}{5730} \approx 1{,}2096 \cdot 10^{-4}$).

Definicja 18.25 (funkcji potęgowej)
Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Funkcję postaci x^a nazywamy funkcją potęgową. Gdy $a > 0$ jej dziedziną jest półprosta domknięta $[0, \infty)$, gdy $a \leqslant 0$ — półprosta $(0, \infty)$. ■

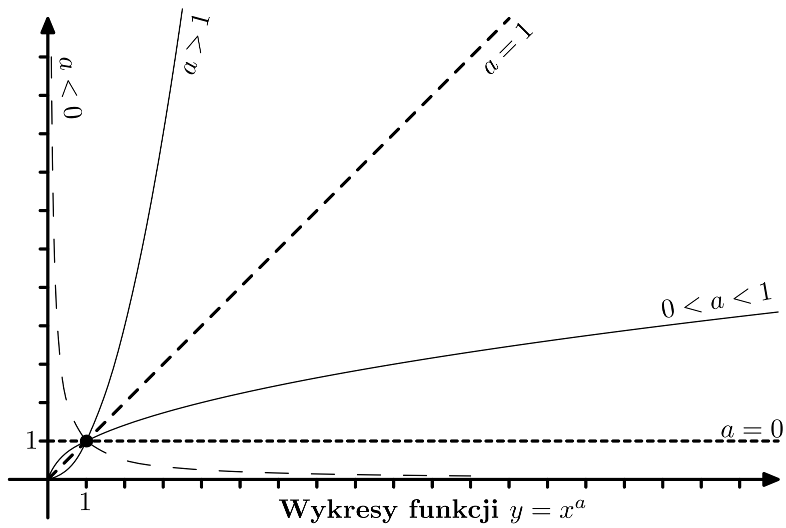
Czasem można przyjąć, że dziedzina jest większa, np. można uważać, że dziedziną funkcji $x^{-3/5} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$ jest zbiór liczb różnych od zera (można dopuścić ujemne argumenty). Trzeba jednak wtedy wszystko dokładnie kontrolować, bo ujemna podstawa potęgi może powodować niewykonalność niektórych operacji.

Twierdzenie 18.26 (o własnościach funkcji potęgowej)
Funkcja potęgowa x^a jest ciągła w całej swej dziedzinie;
jeśli $a > 0$, to jest ona ściśle rosnąca na półprostej $(0, \infty)$,
jeśli $a = 0$ — stała a jeśli $a < 0$ — malejąca.

Dowód. Mamy $x^a = e^{a \ln x}$, czyli funkcja potęgowa jest złożeniem funkcji $a \ln x$ i funkcji ściśle rosnącej e^z argumentu z. Z punktu widzenia monotoniczności nie różni się od znanej nam już funkcji $a \ln x$. ■

Twierdzenie 18.27
Jeśli $a < 0$, to $\lim\limits_{x\to\infty} x^a = 0$ i $\lim\limits_{x\to 0} x^a = \infty$;
jeśli $a = 0$, to $x^a = x^0 = 1$ dla każdego $x > 0$;
jeśli $a > 0$, to $\lim\limits_{x\to\infty} x^a = \infty$ i $\lim\limits_{x\to 0} x^a = 0$.

Dowód. Wynika to natychmiast z własności logarytmu naturalnego i funkcji wykładniczej. ■



Wykresy funkcji $y = x^a$

Zajmiemy się wypukłością funkcji potęgowej.

Lemat 18.28

Dla każdej liczby naturalnej n i dowolnych liczb dodatnich $a \neq b$ zachodzi nierówność $\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}} < \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}}$.

Dowód. Nierówność, która zamierzamy udowodnić jest równoważna następującej: $\left(a^n + b^n\right)^{n+1} < 2\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right)^n$. Udowodnimy ją indukcyjnie. Dla $n = 1$ mamy $(a+b)^2 < 2(a^2+b^2)$, czyli $2ab < a^2 + b^2$ tzn. $0 < (a-b)^2$, co jest prawdą, bo $a \neq b$.

Załóżmy następnie że dla pewnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\left(a^n + b^n\right)^{n+1} < 2\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right)^n$.

Mnożąc nierówność $2ab < a^2 + b^2$ przez $a^n b^n > 0$ otrzymujemy $2a^{n+1}b^{n+1} < a^n b^{n+2} + a^{n+2} b^n$, stąd mamy
$a^{2n+2} + 2a^{n+1}b^{n+1} + b^{2n+2} < a^{2n+2} + a^n b^{n+2} + a^{n+2} b^n + b^{2n+2}$, więc $\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right)^2 < \left(a^{n+2} + b^{n+2}\right)\left(a^n + b^n\right)$. Stąd otrzymujemy $\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right)^{2n+2} < \left(a^{n+2} + b^{n+2}\right)^{n+1}\left(a^n + b^n\right)^{n+1}$, więc $\frac{(a^{n+1} + b^{n+1})^{n+2}}{(a^n + b^n)^{n+1}} < \frac{(a^{n+2} + b^{n+2})^{n+1}}{\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right)^n}$. Ostatnio otrzymaną nierówność mnożymy przez tę z założenia indukcyjnego i otrzymujemy $\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right)^{n+2} < 2\left(a^{n+2} + b^{n+2}\right)^{n+1}$, czyli tezę indukcyjną. Dowód został zakończony. ■

Z udowodnionego lematu wynika

Wniosek 18.29
Jeśli $m < n$, $a \neq b$ i $a, b > 0$, to $\sqrt[m]{\frac{a^m+b^m}{2}} < \sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}}$. ■

Podstawiając w tym wniosku $a = \sqrt[n]{x}$ i $b = \sqrt[n]{y}$ i podnosząc nierówność obustronnie do potęgi m otrzymujemy nierówność

$$\tfrac{1}{2}\big(x^{m/n} + y^{m/n}\big) < \big(\tfrac{x+y}{2}\big)^{m/n}.$$

Przyjmując $x = u^{n/m}$, $y = v^{n/m}$ otrzymujemy

$$\tfrac{1}{2}\big(u + v\big) < \big(\tfrac{u^{n/m}+v^{n/m}}{2}\big)^{m/n},$$

co można przepisać w postaci $\big(\frac{u+v}{2}\big)^{n/m} < \frac{1}{2}\big(u^{n/m} + v^{n/m}\big)$. Stąd wynika następujący

Wniosek 18.30 Jeśli $0 < r < 1 < s$, $r, s \in \mathbb{Q}$, to funkcja x^r jest ściśle wklęsła, a funkcja x^s — ściśle wypukła. ■

Lemat 18.31 (o pochodnej funkcji potęgowej)
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{(t+h)^a - t^a}{h} = at^{a-1}$ dla każdego $t > 0$ i każdego $a \in \mathbb{R}$.

Dowód. Dla $a = 0$ teza jest oczywista. Dalej $a \neq 0$. Wtedy $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(t+h)^a - t^a}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{a\ln(t+h)} - e^{a\ln t}}{a\ln(t+h) - a\ln t} \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{a\ln(t+h) - a\ln t}{h} =$
$= e^{a\ln t} \cdot a \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{t})}{\frac{h}{t}} \cdot \frac{1}{t} = t^a \cdot a \cdot 1 \cdot \frac{1}{t} = at^{a-1}$ — wynika to z twierdzeń z przykładów 18.5, 18.6 i 18.9.

Twierdzenie 18.32 (o wypukłości funkcji potęgowej)
Jeśli $a > 1$, to funkcja x^a jest ściśle wypukła.
Jeśli $0 < a < 1$, to funkcja x^a jest ściśle wklęsła.
Jeśli $a < 0$, to funkcja x^a jest ściśle wypukła.

Dowód. Niech $0 < x < y$. Jeśli $a > 1$, to istnieje ciąg (s_n) liczb wymiernych, większych od 1 zbieżny do a. Z wniosku poprzedzającego to twierdzenie wynika, że dla każdego s_n zachodzi nierówność $\big(\frac{x+y}{2}\big)^{s_n} < \frac{1}{2}\big(x^{s_n} + y^{s_n}\big)$. Z ciągłości funkcji wykładniczej wynika, że spełniona jest nierówność

$$\big(\tfrac{x+y}{2}\big)^a = \lim_{n\to\infty} \big(\tfrac{x+y}{2}\big)^{s_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}\big(x^{s_n} + y^{s_n}\big) \leqslant \tfrac{1}{2}\big(x^a + y^a\big).$$

Z niej i z twierdzenia o wypukłości funkcji ciągłej wynika, że funkcja x^a jest wypukła.

Załóżmy, że nie jest ściśle wypukła. Istnieją wtedy takie liczby $0 < x < y$, że $\left(\frac{x+y}{2}\right)^a = \frac{1}{2}\left(x^a + y^a\right)$.

Wynika z tej równości, że $y^a - \left(\frac{x+y}{2}\right)^a = \left(\frac{x+y}{2}\right)^a - x^a = =\frac{1}{2}\left(y^a - x^a\right)$. Ponieważ funkcja x^a jest wypukła, więc funkcja $Q(t) := \frac{t^a - x^a}{t-x}$ zmiennej t jest niemalejąca (twierdzenie 17.53 z poprzedniego rozdziału). Z założenia o punktach x, y wynika, że $Q\left(\frac{x+y}{2}\right) = \dfrac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^a - x^a}{\frac{y-x}{2}} = \dfrac{y^a - x^a}{y - x} = Q(y)$. Stąd wynika, że funkcja Q jest stała na przedziale $\left[\frac{x+y}{2}, y\right]$, jej jedyną wartością na tym przedziale jest liczba $A := \frac{y^a - x^a}{y-x}$. Wynika stąd, że jeśli $t \in \left[\frac{x+y}{2}, y\right]$, to $\frac{t^a - x^a}{t-x} = A$, więc $t^a = A(t - x) + x^a$. Wobec tego $at^{a-1} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(t+h)^a - t^a}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{A(t+h-x)+x^a - A(t-x) - x^a}{h} = A$ dla każdego $t \in \left(\frac{x+y}{2}, y\right)$, co jest niemożliwe, bo funkcja at^{a-1} jest ściśle rosnąca, zatem nie jest stała na żadnym przedziale.

Podobnie dowodzimy, że funkcja x^a jest wklęsła, gdy w przypadku $a \in (0, 1)$. Jeśli $a < 0$, to funkcja $x^a = e^{a \ln x}$ jest złożeniem funkcji ściśle wypukłej $a \ln x$ i ściśle rosnącej funkcji ściśle wypukłej e^y, więc jest ściśle wypukła. ■

Podany tu dowód twierdzenia jest zaskakująco długi. Później będziemy w stanie podać znacznie krótszy (w dwóch wierszach), ale na razie brakuje dobrych narzędzi do zrealizowania tego celu.

Przykład 18.10 Uogólnimy nierówność Bernoulliego, mianowicie udowodnimy, że jeśli $x > -1$ i $x \neq 0$ oraz
jeśli $a < 0$ lub $a > 1$, to $(1 + x)^a > 1 + ax$;
jeśli $0 < a < 1$, to $(1 + x)^a < 1 + ax$.

Dowód. Mamy $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{a \ln(1+x)} - 1}{a \ln(1+x)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot a = a$, bo, jak udowodniliśmy wcześniej, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ i $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Jeśli $a < 0$ lub $a > 1$, to funkcja $(1 + x)^a$ jest ściśle wypukła na półprostej $(-1,\infty)$, więc funkcja $\frac{(1+x)^a-1}{x}$ jest ściśle rosnąca na zbiorze $(-1,0)\cup(0,\infty)$. Wynika stąd, że jeśli $x\in(-1,0)$, to zachodzi nierówność $\frac{(1+x)^a-1}{x}<\lim\limits_{x\to0^-}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$, zaś jeśli $x>0$, to — nierówność $\frac{(1+x)^a-1}{x}>\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$.

W przypadku $0<a<1$ rozumujemy tak samo korzystając ze ścisłej wklęsłości funkcji x^a. ■

Przykład 18.11 Dla dowolnych liczb $a_1,a_2,\ldots,a_n\geqslant 0$ zachodzi nierówność $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\leqslant\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$. Równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Możemy założyć, że liczby a_1, a_2, ..., a_n są dodatnie. bo jeśli jedna z nich jest równa 0, to lewa strona nierówności też jest zerem, więc nierówność jest spełniona. Dowodzona nierówność równoważna jest nierówności

$$\ln\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\geqslant\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n),$$

a to jest nierówność Jensena dla funkcji ściśle wklęsłej ln ze wszystkimi wagami równymi $\frac{1}{n}$. ■

Przykład 18.12 Z wypukłości funkcji potęgowej x^a dla $a>1$ i z nierówności Jensena wynika, że

$$(p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n)^a\leqslant p_1x_1^a+p_2x_2^a+\cdots+p_nx_n^a,$$

dla dowolnych nieujemnych liczb $x_1,x_2,\ldots,x_n$ i $p_1,p_2,\ldots,p_n$, jeśli $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$.

Niech $0<c<d$ i niech a_1, a_2, ..., a_n będą liczbami dodatnimi. Przyjmujemy $x_j=a_j^c$ dla $j=1,2,\ldots,n$ i $a=\frac{d}{c}$. Otrzymujemy

$$(p_1a_1^c+p_2a_2^c+\cdots+p_na_n^c)^{d/c}\leqslant p_1a_1^d+p_2a_2^d+\cdots+p_na_n^d,$$

co można zapisać jako

$$(p_1a_1^c+p_2a_2^c+\cdots+p_na_n^c)^{1/c}\leqslant(p_1a_1^d+p_2a_2^d+\cdots+p_na_n^d)^{1/d}.$$

W szczególności, gdy $p_1=p_2=\ldots=p_n=\frac{1}{n}$, otrzymujemy:

$$\left(\frac{a_1^c+a_2^c+\cdots+a_n^c}{n}\right)^{1/c}\leqslant\left(\frac{a_1^d+a_2^d+\cdots+a_n^d}{n}\right)^{1/d}. ■$$

Przykład 18.13 (Nierówność Höldera)
Dla dowolnych liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ i dowolnych takich liczb $p, q > 0$, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ zachodzi nierówność:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leq$$
$$\leqslant (a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p)^{1/p} (b_1^q + b_2^q + \cdots + b_n^q)^{1/q}.$$

Dowód. Z równości $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ wynika, że $p > 1$, $q > 1$ oraz $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$. Ponieważ $p > 1$, więc funkcja x^p jest ściśle wypukła, jak to wykazaliśmy wcześniej. Możemy zastosować do niej nierówność Jensena. Bez straty ogólności można założyć, że wszystkie liczby b_1, b_2,$\ldots, b_n$ są dodatnie, gdyby dla pewnego j było $b_j = 0$ wykazalibyśmy nierówność dla liczb a_1, $\ldots$, a_{j-1}, a_{j+1}, $\ldots$, a_n, b_1, $\ldots$, b_{j-1}, b_{j+1}, $\ldots$, b_n, a więc z tą samą lewą stroną a prawą być może mniejszą (gdy $a_j > 0$) niż docelowa. Przyjmijmy $p_j = \frac{b_j^{p/(p-1)}}{\sum b_i^{p/(p-1)}}$. Mamy wtedy

$$\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^p}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q\right)^{p/q}} = \left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{a_j}{b_j^{1/(p-1)}} b_j^{p/(p-1)}}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^{p/(p-1)}}\right)^p \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^{p/(p-1)} \leq$$

$$\leqslant \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{a_j^p}{b_j^{p/(p-1)}} b_j^{p/(p-1)}}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^{p/(p-1)}} \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^{p/(p-1)} = \sum_{j=1}^{n} a_j^p,$$

a ta nierówność jest równoważna dowodzonej.
Dla $p = q = 2$ otrzymujemy nierówność Schwarza, tzn. stwierdzenie, że iloczyn skalarny wektorów $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ jest nie większy niż iloczyn ich długości. ■

Zadania

Poniżej symbol log *oznacza* $\log_{10}$, *czyli logarytm dziesiętny.*

1. Znaleźć przybliżenie $\log 4$, $\log 5$, $\log 6$, $\log 8$, $\log 9$, $\log 15$

wiedząc, że: $\log 2 \approx 0{,}30103$, $\log 3 \approx 0{,}47712$, $\log 7 \approx 0{,}84509$.

2. Uprościć

a. $7^{\log_{49} 5 - 1}$; **b.** $125^{\log_{25} 16}$;

c. $\log_5 7 \cdot \log_{49} 5$; **d.** $\log_{16} 7 \cdot \log_7 32$.

3. Znaleźć $\log_{54} 168$, jeśli $a = \log_7 12$ i $b = \log_{12} 24$.

4. Znaleźć $\log_{30} 8$, jeśli $a = \log_{30} 3$ i $b = \log_{30} 5$.

5. Znaleźć $\log_9 20$, jeśli $a = \log_{10} 2$ i $b = \log_{10} 3$.

6. Wykazać bez tablic i urządzeń elektronicznych, że

a. $\frac{1}{3} > \log_{10} 2 > 0{,}3$;

b. $0{,}4 + \log_{10} 6 > \log_{10} 15 > 1{,}2 \log_{10} 12 - \log_{10} \sqrt[5]{4}$.

7. Rozwiązać równanie

a. $\log_4(x+2)\log_x 2 = 1$; **b.** $x^{\frac{\log x + 7}{4}} = 10^{\log x + 1}$;

c. $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$;

d. $\log(x^3 + 8) - \log(x+2) = 1$; **e.** $\log_x 7 + \log_{x^2} 7 = 6$;

f. $\log(5 - x) + 2\log\sqrt{3 - x} = 0$; **g.** $100x^{\log x} = x^3$;

h. $\log(152 + x^3) - 3\log(x+2) = 0$; **i.** $x^{1/\log x} = 10^{x^4}$;

j. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$; **k.** $9^x + 4^x = 2 \cdot 6^x$;

l. $x^{\log x} = \frac{100}{x}$ **ł.** $x^{\log x} = 10$;

m. $\log_4(x + 12)\log_x 2 = 1$

n. $$\left(\sqrt{\sqrt{x^2 - 8x + 9} + \sqrt{x^2 - 8x + 7}}\right)^x + \\ + \left(\sqrt{\sqrt{x^2 - 8x + 9} - \sqrt{x^2 - 8x + 7}}\right)^x = 2^{1 + 0{,}25x};$$

o. $\frac{\log(x^2)}{(\log x)^2} + \frac{\log(x^3)}{(\log x)^3} + \frac{\log(x^4)}{(\log x)^4} + \cdots = 8$;

p. $$x^{\log^2 x + \log(x^3) + 3} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{1+x}-1} - \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}}.$$

8. Rozwiązać równanie $1 + \log_b(2\log_{10} a - x) \cdot \log_x b = \frac{2}{\log_b x}$, jeśli $a > 0$ i $0 < b \neq 1$ są danymi liczbami rzeczywistymi.

9. Rozwiązać równanie $1 + \log_x \frac{4-x}{10} = \big(\log_{10}(\log_{10} a) - 1\big)\log_x 10$ zakładając, że $a > 0$ jest daną liczbą rzeczywistą.

10. Ile rozwiązań ma równanie $2^x = x + 3$. Znaleźć jego pierwiastki z dokładnością do $0{,}01$.

11. Rozwiązać układ równań

a. $\begin{cases} x^{x+y} = y^{12}, \\ y^{x+y} = x^3; \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 8^x = 10y, \\ 2^x = 5y; \end{cases}$

c. $\begin{cases} x^{y+1} = 27, \\ x^{2y-5} = \frac{1}{3}; \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} xy = 40, \\ x^{\log y} = 4; \end{cases}$

e. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \frac{26}{5}, \\ xy = 64. \end{cases}$ **f.** $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 648, \\ 3^x \cdot 2^y = 432; \end{cases}$

g. $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2, \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2, \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2; \end{cases}$ **h.** $\begin{cases} y^x = x^y, \\ y^3 = x^2; \end{cases}$

i. $\begin{cases} \log_x 10 + \log_y 10 = 5, \\ \log_{10} x + \log_{10} y = \frac{5}{4}; \end{cases}$ **j.** $\begin{cases} 3^x - 2^y = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y}{2}} = 7; \end{cases}$

k. $\begin{cases} x^{x-y} = 2y - 2\,, \\ \sqrt{x^2 + 5x + 2y - 3} + \sqrt{x^2 + x + y + 2} = \\ \qquad = \sqrt{x^2 + 4x + 3y - 2} + \sqrt{x^2 + 2y + 3}\,. \end{cases}$

12. Rozwiązać nierówność $\log_a x > 6 \log_x a - 1$, jeśli $0 < a < 1$.

13. Rozwiązać nierówność $\log_{x+p} 2 < \log_x 4$, jeśli $0 < p < \frac{1}{4}$.

14. Rozwiązać nierówność $\frac{\log_a(35-x^3)}{\log_a(5-x)} > 3$, jeśli $a > 1$.

15. Dowieść, że jeśli $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ i $a \neq b \neq c \neq a$, to $a^a b^b c^c > \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}$.

16. Dowieść, że jeśli $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ i $a \neq b \neq c \neq a$, to $a^a b^b c^c < \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^{a+b+c}$.

17. Dowieść, że jeśli $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ i $a \neq b \neq c \neq a$, to $(b+c)^a (c+a)^b (a+b)^c < \left(\frac{2}{3}(a+b+c)\right)^{a+b+c}$.

18. Dowieść, że jeśli $1 \neq a > 0$, $1 \neq b > 0$, $1 \neq c > 0$, $1 \neq x > 0$ i $abc \neq 1$, to
$\log_a x \log_b x + \log_b x \log_c x + \log_c x \log_a x = \frac{\log_a x \log_b x \log_c x}{\log_{abc} x}$.

19. Dowieść, że jeśli a_1, a_2, $\ldots$, a_n są liczbami dodatnimi i żadna z nich nie jest równa 1, to
$(\log_{a_1} a_2)(\log_{a_2} a_3)(\log_{a_3} a_4) \cdot \ldots \cdot (\log_{a_{n-1}} a_n)(\log_{a_n} a_)= 1$.

20. Niech $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. [18.4]
Udowodnić, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzą równości:
(a) $\sinh(x + y) = \sinh(x) \cdot \cosh(y) + \sinh(y) \cdot \cosh(x)$,
(b) $\cosh(x + y) = \cosh(x) \cdot \cosh(y) + \sinh(y) \cdot \sinh(x)$,
(c) $\cosh^2(x) - \sinh^2(y) = 1$,
(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sinh(x)}{x} = 1$.

21. Rozstrzygnąć, czy istnieje inna para funkcji spełniających warunki (a), (b), (c) i (d) z poprzedniego zadania.

22. W czterocyfrowych tablicach logarytmów dziesiętnych znaleźć liczbę $\log 2$ z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku.

23. Dowieść, że istnieją takie liczby niewymierne a, b, że liczba a^b jest wymierna.

24! Udowodnić, że $\log 2 \notin \mathbb{Q}$.

25. Niech $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}, c_1 \neq 0$. Dowieść, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ liczba 2^k zaczyna się od cyfr $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

26. Dowieść, że jeśli liczby $w_1, w_2, \ldots, w_n$ są wymierne, liczby $p_1, p_2, \ldots, p_n$ są pierwsze i parami różne, to z równości

$$w_1 \ln p_1 + w_2 \ln p_2 + \cdots + w_n \ln p_n = 0$$

wynika równość $w_1 = w_2 = \ldots = w_n = 0$.

27. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n + 1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

28. Dowieść, że istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$. [18.5]

29. Dowieść, że szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ jest rozbieżny.

30. Dowieść, że szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ jest zbieżny.

31! Dowieść, że $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ i $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$.

32! Dowieść, że jeśli $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 1$, to $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-b} a^x = \infty$.

[18.4] Te funkcje nazywane są sinusem hiperbolicznym i kosinusem hiperbolicznym

[18.5] Ta granica nazywana jest stałą Eulera. Nie wiadomo, czy jest wymierna.

33! Dowieść, że $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$ dla każdej liczby $a > 0$.

34! Dowieść, że $\lim\limits_{x\to 0} x^a \ln x = 0$ dla każdej liczby $a > 0$.

35! Dowieść, że jeśli $0 < a \neq 1$, to $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$.

36. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\Big(\big(1+\frac{1}{n}\big)^n + \big(1+\frac{1}{n}\big)^{n+1} - 2e\Big)$.

37. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, jeśli $f(x) =$

a. $(\ln x)^{1/x}$;

b. $\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{x^3/(1-x)}$;

c. $\left(\frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+5}\right)^{x}$

d. $\left(\frac{x^3+11x+20}{x^3-x^2+121}\right)^{x+7}$;

e. $\left(\frac{x+13}{x-13}\right)^{x^7-7}$;

f. $\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{x}$;

g. $\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{x\sqrt{x}}$

h. $\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)^{x}$.

38. Znaleźć: **a.** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^x-1}{x-1}$; **b.** $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$.

39. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \big(\ln n\big)^a$ jest zbieżny?

40. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \ln n$ jest zbieżny?

41. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{-an^2}$ jest zbieżny?

42. Niech $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ściśle monotoniczną, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ zachodzi wzór $f(mn) = f(m) + f(n)$. Dowieść, że istnieje taka liczba $a > 0$, $a \neq 1$, że równość $f(n) = \log_a n$ zachodzi dla każdej liczby naturalnej n.

43. Niech $a_1 = x > 0$ i $a_{n+1} = x^{a_n}$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Dla jakich liczb rzeczywistych $x > 0$ ciąg (a_n) ma granicę?

44. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\lfloor \ln n \rfloor} \frac{1}{n}$ jest zbieżny?

45. Udowodnić, że jeśli $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ a^x \geqslant 1 + x$, to $a = e$.

46. Udowodnić, że jeśli liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie, to zachodzi nierówność $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n$.

47. Dowieść, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b i dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\sqrt[n+1]{a \cdot b^n} \leqslant \frac{a+nb}{n+1}$. Dla jakich a, b, n zachodzi równość?

48. Udowodnić, że jeśli liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie, to zachodzi nierówność $(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$.

49. Udowodnić, że jeśli liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie oraz $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, to zachodzi nierówność

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \leqslant 1 + \tfrac{s}{1!} + \tfrac{s^2}{2!} + \cdots + + \tfrac{s^n}{n!}.$$

50. Dowieść, że jeśli $n \in \mathbb{N}$, to $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[8]{8}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2^n} \leqslant n+1$.

51. Znaleźć minimum funkcji $(x-1)^5(x+1)(2x+1)^2$ w przedziale $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ i w przedziale $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$. Można skorzystać z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną.

52. Wykazać, że $\ln x < -1 + \ln 10 + \frac{x}{10}$ dla $0 < x \neq 10$.

53. Wykazać, że $\ln x < \frac{1}{2}(x^2-1)$ dla $0 < x \neq 1$.

54. Dowieść, że funkcja $x \ln x$ jest ściśle wypukła na $(0, \infty)$.

55. Wykazać, że jeśli $x > 0$, $y > 0$ i $z > 0$, to zachodzi nierówność $x\ln x + 2y\ln y + 3z\ln z + (x+2y+3z)\ln 6 \geqslant$ $\geqslant (x+2y+3z)\ln(x+2y+3z)$. Kiedy zachodzi równość?

56. Wykazać, że nierówność $\left(\frac{x+2y}{3}\right)^{\frac{x+2y}{3}} < \frac{x^x+2y^y}{3}$ zachodzi dla dowolnych *różnych* liczb rzeczywistych dodatnich x, y.

57. Wykazać, że $(2-\sqrt{3})a^{2+\sqrt{3}} + (2+\sqrt{3})b^{2-\sqrt{3}} \geqslant 4\sqrt[4]{ab}$ dla dowolnych $a > 0$ i $b > 0$.

58. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b równanie $\ln x = ax + b$ ma dokładnie dwa rozwiązania, dokładnie jedno rozwiązanie lub nie ma rozwiązań w ogóle.

59. Dowieść, że $2^{1-p} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1$ dla dowolnych liczb $p > 1$ i $x \in [0,1]$.

60. Dowieść nierówności Minkowskiego ($p \geqslant 1$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$):

$$\big(|a_1+b_1|^p + |a_2+b_2|^p + \cdots + |a_n+b_n|^p\big)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \big(|a_1|^p+|a_2|^p+\cdots+|a_n|^p\big)^{1/p} + \big(|b_1|^p+|b_2|^p+\cdots+|b_n|^p\big)^{1/p}$$

61. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb dodatnich. Udowodnić, że następujące trzy warunki są równoważne:

(i) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;

(ii) ciąg (p_n) o wyrazie $p_n = (1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n)$ jest zbieżny;

(iii) istnieje taka liczba naturalna k, że ciąg (q_n) o wyrazie $q_n = (1 - a_k)(1 - a_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (1 - a_n)$ ma granicę dodatnią i skończoną.

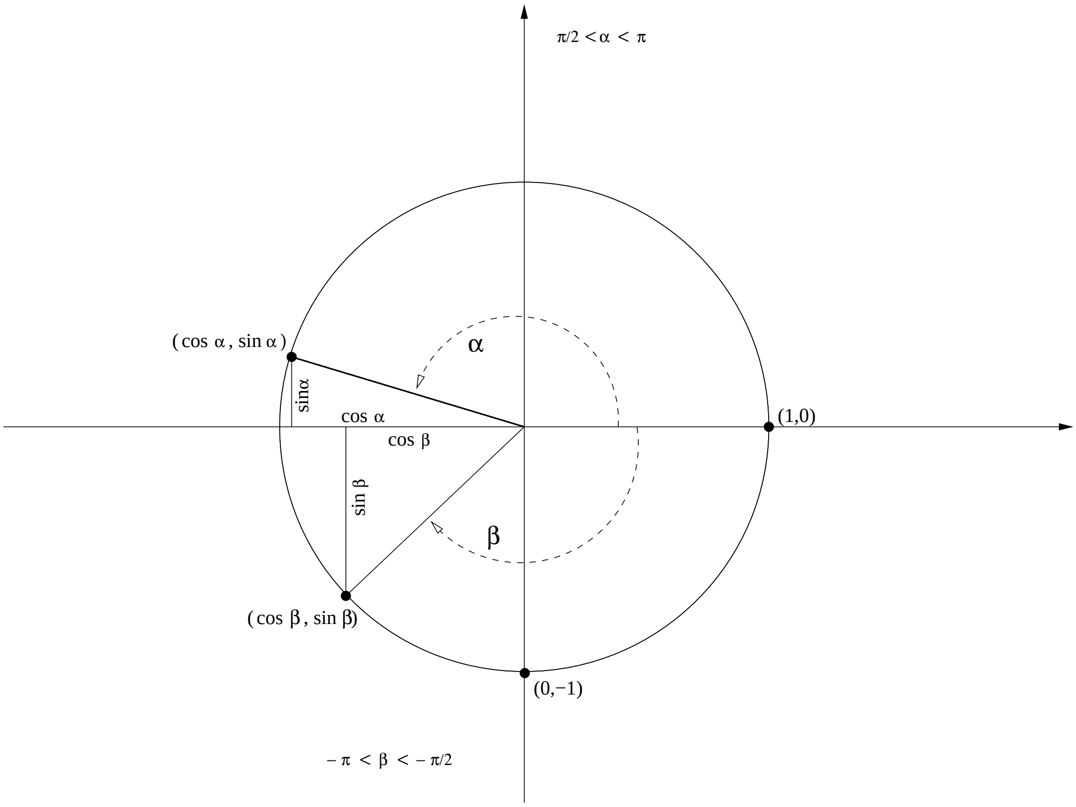
Uwaga. Jeśli $a_n \neq 1$ *dla każdego* n, *to można przyjąć, że* $k = 1$.

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE

Zaczniemy od klasycznej definicji sinusa i kosinusa dowolnego kąta. Przydługie rozważania będą oparte na pojęciach geometrycznych, których definicji nie przytoczymy. Niektóre pojęcia są dosyć trudne do sformalizowania, np. obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Doprowadzi nas do zidentyfikowania pewnych własności funkcji kosinus i sinus, a potem wykażemy, że wyznaczają one jednoznacznie tę parę funkcji. Następnie bez użycia geometrii wykażemy istnienie takich funkcji. W ten sposób ominiemy szereg trudności związanych z geometrią i zyskamy narzędzie, które pozwala je łatwo przezwyciężyć.

Umieszczamy [19.1] kąt zorientowany na płaszczyźnie tak, by jego pierwsze ramię (ponieważ jest zorientowany, więc wiadomo, które ramię jest pierwsze) pokryło się z dodatnią półosią OX, czyli ze zbiorem $\{(x,y)\colon \quad 0 \leqslant x \quad \text{i} \quad y=0\}$. Na drugim ramieniu leży pewien punkt $(x,y) \neq (0,0)$. Dodatnie kąty uzyskujemy przez obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, a ujemne — w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Kosinusem kąta nazywamy liczbę $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, a jego sinusem — liczbę $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Można powiedzieć, że wierzchołkiem kąta α jest punkt $(0,0)$, punkt $(1,0)$ leży na pierwszym ramieniu tego kąta, a punkt $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ leży na jego drugim ramieniu; oczywiście oba te punkty leżą na okręgu o środku w punkcie $O=(0,0)$, którego promień równy jest 1. Kąty mierzyć możemy w stopniach lub w radianach. Jeśli chcemy mierzyć kąty w radianach, to przyjmujemy, że miarą kąta dodatniego jest długość łuku okręgu jednostkowego zaczynającego się na pierwszym ramieniu kąta, który kończy się na drugim ramieniu. Np. jeśli mówimy o kącie, który równy jest $\frac{\pi}{2}$, to na jego pierwszym ramieniu leży punkt $(1,0)$, na drugim — punkt $(0,1)$, bo łuk o długości $\frac{\pi}{2}$, to ćwierć okręgu, zatem odpowiada on kątowi prostemu.

[19.1] Umieszczamy oznacza, że stosujemy tylko przesunięcia i obroty, nie stosujemy symetrii osiowych.



Na tym rysunku kąt α jest równy około 162° lub 2,83 radiana, kąt β ma około $-136^\circ 49'$, czyli około $-2{,}39$ radiana.

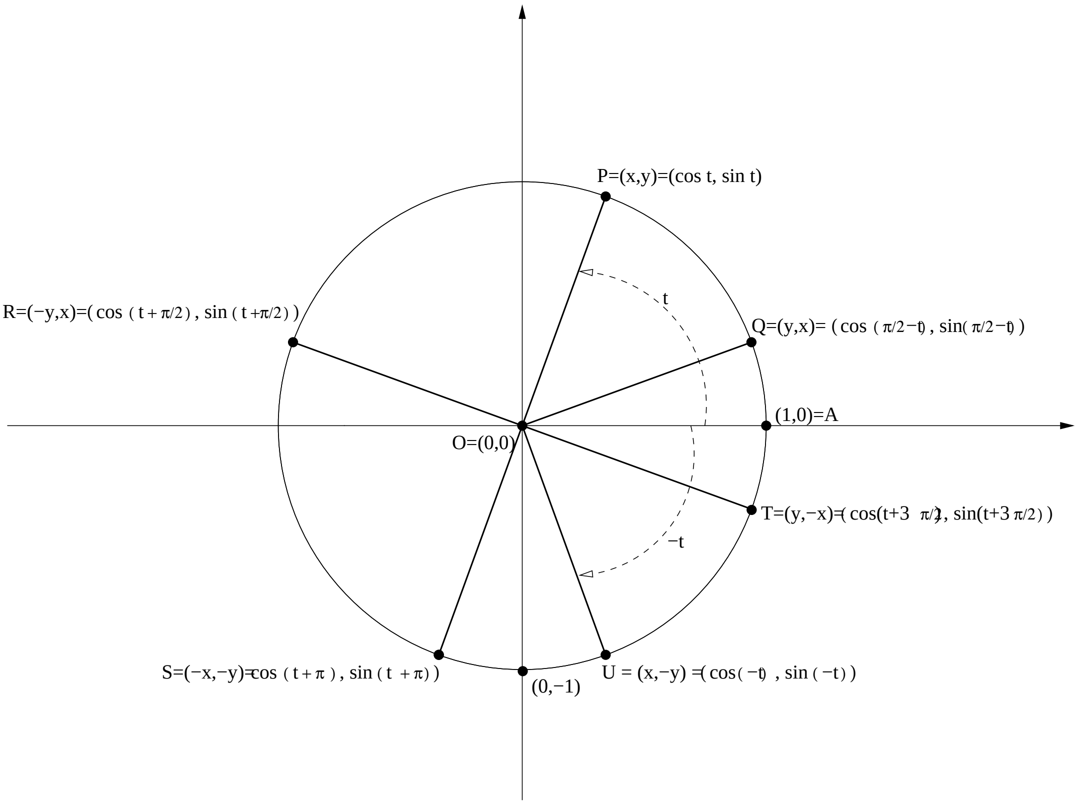
Miarą kąta ujemnego jest liczba przeciwna do długości odpowiedniego łuku. Jeśli wyrażamy kąt w radianach, to nazwa jednostki pozostaje w domyśle: np. pisząc, że kąt równy jest π myślimy, że jest on równy π radianów. Z definicji i z twierdzenia Pitagorasa wnioskujemy, że dla każdej liczby γ zachodzi równość $\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$.

Z definicji kąta ujemnego wynika od razu, że spełnione są równości $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ i $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

Zauważmy teraz, że obrazem punktu (x, y) w obrocie o kąt $\frac{\pi}{2}$ (dodatni, więc w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara) wokół punktu O jest punkt $(-y, x)$. Wynika to np. z tego, że w trójkącie o wierzchołkach $O = (0, 0)$, $(x, y) \neq O$, $(-y, x)$ kąt między bokami wychodzącymi z wierzchołka O jest prosty (stosujemy tw. Pitagorasa):

$$\left[(x-0)^2 + (y-0)^2\right] + \left[(-y-0)^2 + (x-0)^2\right] = 2x^2 + 2y^2 =$$
$$= \left[x - (-y)\right]^2 + \left[y - x\right]^2,$$

oraz z tego, że jeśli (x, y) znajduje się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych ($x, y \geqslant 0$), to punkt $(-y, x)$ znajduje się w drugiej ćwiartce $-y \leqslant 0 \leqslant x$; jeśli (x, y) znajduje się w drugiej ćwiartce układu współrzędnych ($x \leqslant 0 \leqslant y$), to punkt $(-y, x)$ znajduje się w trzeciej ćwiartce ($-y, x \leqslant 0$) itd.



Ze stwierdzeń poprzedzających rysunek wynika, że z równości $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ wynika $(-y, x) = \big(\cos(t + \frac{\pi}{2}), \sin(t + \frac{\pi}{2})\big)$. Mamy więc $\cos(t + \frac{\pi}{2}) = -y = -\sin t$, $\sin(t + \frac{\pi}{2}) = x = \cos t$.

Obróciwszy punkt (x, y) o kąt π wokół punktu O otrzymujemy punkt $(-x, -y)$, więc jeżeli $(x, y) = \big(\cos t, \sin t\big)$, to $(-x, -y) = \big(\cos(t + \pi), \sin(t + \pi)\big)$. Wynika stąd, że $\cos(t + \pi) = -\cos t$ i $\sin(t + \pi) = -\sin t$ dla każdej liczby $t \in \mathbb{R}$.

Analogicznie obrazem punktu (x, y) w obrocie wokół punktu O o kąt $\frac{3\pi}{2}$ jest punkt $(y, -x)$, zatem zachodzą równości $\cos(t + \frac{3\pi}{2}) = \sin t$ i $\sin(t + \frac{3\pi}{2}) = -\cos t$.

Wreszcie zauważmy, że punkt $\big(\cos(\frac{\pi}{2} - t), \sin(\frac{\pi}{2} - t)\big)$ można otrzymać z punktu $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ stosując kolejno symetrię względem osi OX, w wyniku której otrzymujemy punkt $(x, -y) = \big(\cos(-t), \sin(-t)\big)$, a potem obrót o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół punktu O , w wyniku którego otrzymujemy punkt $\big(\cos(\frac{\pi}{2}-t),\sin(\frac{\pi}{2}-t)\big)=$ $=\big(-(-y),x\big)=(y,x)$. Wobec tego dla każdej liczby $t\in\mathbb{R}$ mamy $\cos(\frac{\pi}{2}-t)=\sin t$ oraz $\sin(\frac{\pi}{2}-t)=\cos t$.

Dodamy jeszcze do tej listy dwa wzory $\cos(t+2\pi)=\cos t$ i $\sin(t+2\pi)=\sin t$, które wynikają od razu z tego, że obrót o kąt 2π nie rusza żadnych punktów, bo obroty o 2π i o 0 to to samo przekształcenie.

Wyprowadziliśmy, więc pewną liczbę wzorów zwanych redukcyjnymi i mamy nadzieję, że Czytelnicy tego tekstu, po przeanalizowaniu tego uzasadnienia, będą je w stanie samodzielnie ujrzeć na rysunku!

Zajmiemy się jeszcze wzorami na kosinus i sinus sumy i różnicy kątów. Załóżmy, że dane są dwa kąty α i β niekoniecznie takie jak na rysunku. Po obrocie o kąt β punkt $\big(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta)\big)$ trafia na punkt $(\cos\alpha,\sin\alpha)$, a punkt $(1,0)=(\cos 0,\sin 0)$ — na punkt $(\cos\beta,\sin\beta)$. Wynika stąd, że długość cięciwy łączącej punkty $\big(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta)\big)$ i $(1,0)=(\cos 0,\sin 0)$ jest równa długości cięciwy łączącej punkty $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ i $(\cos\beta,\sin\beta)$. Zapiszemy to za pomocą wzoru:

$$\big[\cos(\alpha-\beta)-1\big]^2+\big[\sin(\alpha-\beta)-0\big]^2=$$
$$=\big[\cos\alpha-\cos\beta\big]^2+\big[\sin\alpha-\sin\beta\big]^2$$

czyli

$$\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1+\sin^2(\alpha-\beta)=$$
$$=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta\,,$$

więc (trzy razy „jedynka trygonometryczna", potem redukcja)

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\,.$$

Ponieważ otrzymany wzór jest prawdziwy dla wszystkich kątów α,β, więc możemy napisać

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\big(\alpha-(-\beta)\big)=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=$$
$$\overset{\text{wzory}}{\underset{\text{redukcyjne}}{=\!=\!=\!=}}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\,.$$

Teraz przekształcimy nieco szybciej:

$\sin(\alpha+\beta)=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta)=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos\beta+\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\sin\beta=$ $=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ i wreszcie $\sin(\alpha-\beta)=\sin\big(\alpha+(-\beta)\big)=$

$= \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

Znajdziemy wzór na obrót wokół punktu O. Wiadomo, że przy obrocie wokół punktu O jedynym punktem, którego to przekształcenie nie rusza się jest punkt O. Nie dotyczy to oczywiście obrotu o kąt zerowy, który pozostawia na miejscu wszystkie punkty. W rozważaniach będziemy korzystać jedynie z tej własności i tego, że odległości punktów są równe odległościom ich obrazów w obrocie (czyli, że obrót jest izometrią). Zaczniemy od znalezienia postaci wszystkich izometrii, które nie poruszają punktu $(0,0)$.

Lemat 19.1 (o zachowaniu iloczynu skalarnego)
Jeśli $\mathcal{O}$ jest izometrią, która przekształca punkt $(0,0)$ na siebie, punkt (a,b) — na punkt (A,B), punkt (c,d) — na punkt (C,D), to $ac+bd = AC+BD$.

Dowód. Ponieważ $\mathcal{O}$ jest izometrią, więc odległości punktów równe są odległościom ich obrazów, zatem

$$a^2+b^2 = (a-0)^2+(b-0)^2 = (A-0)^2+(B-0)^2 = A^2+B^2,$$
$$c^2+d^2 = (c-0)^2+(d-0)^2 = (C-0)^2+(D-0)^2 = C^2+D^2,$$
$$(a-c)^2+(b-d)^2 = (A-C)^2+(B-D)^2.$$

Stąd $ac+bd = \frac{1}{2}\big(a^2+b^2+c^2+d^2-(a-c)^2-(b-d)^2\big) = \frac{1}{2}\big(A^2+B^2+C^2+D^2-(A-C)^2-(B-D)^2\big) = AC+BD$. ■

Definicja 19.2 (iloczynu skalarnego)
Iloczyn skalarny wektorów $[a,b]$ i $[c,d]$ to liczba $ac+bd$. [19.2] ■
Znaczenie geometryczne iloczynu skalarnego wyjaśnimy później.

Twierdzenie 19.3 (o liniowości izometrii)
Niech $\mathcal{O}$ będzie izometrią, która przekształca punkt $(0,0)$ na siebie, punkt (a,b) — na punkt (A,B), punkt (c,d) — na punkt (C,D), punkt (x,y) — na punkt (X,Y), to jeśli $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ i $x=\alpha a+\beta c$ i $y=\alpha b+\beta d$, to zachodzą równości

$$X=\alpha B+\beta C \quad \text{i} \quad Y=\alpha B+\beta D.$$

Dowód. Z poprzedniego lematu i jego dowodu wynika, że
$\big(X-(\alpha A+\beta C)\big)^2+\big(Y-(\alpha B+\beta D)\big)^2 =$

[19.2] Iloczyn skalarny wektorów $\mathbf{x}=[x_1,x_2,\ldots,x_n]\in\mathbb{R}^n$ i $\mathbf{y}=[y_1,y_2,\ldots,y_n]\in\mathbb{R}^n$ to liczba rzeczywista $x_1y_1+x_2y_2+c\ldots+x_ny_n=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$.

$= X^2 + Y^2 + \alpha^2(A^2 + B^2) + \beta^2(C^2 + D^2) -$
$- 2\alpha(XA + YB) - 2\beta(XC + YD) + 2\alpha\beta(AC + BD) =$
$= x^2 + y^2 + \alpha^2(a^2 + b^2) + \beta^2(c^2 + d^2) -$
$- 2\alpha(xa + yb) - 2\beta(xc + yd) + 2\alpha\beta(ac + bd) =$
$= \big(x - (\alpha a + \beta c)\big)^2 + \big(y - (\alpha b + \beta d)\big)^2 = 0^2 + 0^2 = 0\,,$
a stąd $X - (\alpha A + \beta C) = 0$ i $Y - (\alpha B + \beta D)$. ■

Twierdzenie 19.4 (charakteryzujące izometrie)
Przekształcenie $\mathcal{O}$ jest izometrią, która przekształca punkt $(0, 0)$ na siebie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie liczby $c, d, s, t \in \mathbb{R}$, że $c^2 + s^2 = 1$, $d^2 + t^2 = 1$ i $cd + st = 0$ oraz obrazem dowolnego punktu (x, y) jest punkt $(X, Y) = (cx + dy, sx + ty)$.

Dowód. Załóżmy, że obrazem punktu $(1, 0)$ w izometrii $\mathcal{O}$ jest punkt (c, s), a punktu $(0, 1)$ — punkt (d, t). Z lematu o zachowaniu iloczynu skalarnego wynika, że $cd + st = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ oraz $c^2 + s^2 = 1^2 + 0^2 = 1$ i $d^2 + t^2 = 0^2 + 1^2 = 1$. Na mocy twierdzenia o liniowości izometrii obrazem punktu $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$ jest punkt $x(c, s) + y(d, t) = (xc + yd, xs + yt)$. Udowodniliśmy twierdzenie w jedną stronę.

Załóżmy, że $c^2 + s^2 = 1$, $d^2 + t^2 = 1$, $cd + st = 0$. Kwadrat odległości punktów $(x_1c + y_1d, x_1s + y_1t)$ oraz $(x_2c + y_2d, x_2s + y_2t)$ jest równy $(x_1c + y_1d - x_2c - y_2d)^2 + (x_1s + y_1t - x_2s - y_2t)^2 =$
$= \big(c(x_1 - x_2) + d(y_1 - y_2)\big)^2 + \big(s(x_1 - x_2) + t(y_1 - y_2)\big)^2 =$
$= (c^2 + s^2)(x_1 - x_2)^2 + 2(cd + st)(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) +$
$+ (d^2 + t^2)(y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$, czyli kwadratowi odległości punktów (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2). Przekształcenie przypisujące punktowi (x, y) punkt $(cx + dy, sx + ty)$ nie zmienia odległości między punktami, więc jest izometrią. ■

Lemat 19.5
Jeśli $c, d, s, t \in \mathbb{R}$ oraz $c^2 + s^2 = 1$, $d^2 + t^2 = 1$ i $cd + st = 0$, to albo $ct - sd = -1$ albo $ct - sd = 1$. W pierwszym przypadku $t = -c$ i $d = s$, w drugim — $t = c$ i $d = -s$.

Dowód. Mamy $c^2d^2 = s^2t^2 = (1 - c^2)(1 - d^2) = 1 - (c^2 + d^2) +$

$+c^2d^2$, więc $c^2+d^2=1$.[19.3] Zachodzi równość $(ct-sd)^2= =c^2t^2-2cdst+s^2d^2 = c^2t^2+2c^2d^2+s^2d^2 = c^2(t^2+d^2)+ +d^2(c^2+s^2)=c^2+d^2=1$, więc $ct-sd=\mp 1$.

Załóżmy, że $ct-sd=-1$. Wtedy $-t=(-1)t+0\cdot d= =t(ct-sd)+d(cd+st)=c(t^2+d^2)=c$ i $d=t\cdot 0-d\cdot(-1)= =t(cd+st)-d(ct-sd)=s(t^2+d^2)=s$. W drugim przypadku dowód jest prawie taki sam. ■

Lemat 19.6 (o symetrii)
Jeśli $c,d,s,t\in\mathbb{R}$, $c^2+s^2=1$, $d^2+t^2=1$, $cd+st=0$, $ct-sd=-1$, $u=\sqrt{\frac{1+c}{2}}$, $v=\pm\sqrt{\frac{1-c}{2}}$ i $2uv=s$,[19.4] to izometria, która punkt (x,y) przekształca na $(cx+dy, sx+ty)$, pozostawia punkt $(u,v)\neq(0,0)$ na swym miejscu, a punkt $(v,-u)$ przekształca na punkt $(-v,u)$.

Dowód. Z poprzedniego lematu wynika, że $t=-c$ i $s=d$. Mamy $c=2u^2-1$, $s=2uv$. Stąd $cu+dv=u(2u^2-1)+ +2uv^2=2u(u^2+v^2)-u=u$ i $su+tv=2u^2v+v-2u^2v=v$. Wykazaliśmy, że obrazem punktu (u,v) w tym przekształceniu jest on sam. Mamy też $cv+d(-u)=-tv-su=-(tv+su)=-v$ a także $sv+t(-u)=dv-c(-u)=dv+cu=u$, więc obrazem punktu $(v,-u)$ jest punkt $(-v,u)=-(v,-u)$. ■

Czytelnik zechce sprawdzić, że przekształcenie z lematu o symetrii jest symetrią względem prostej przechodzącej przez punkty $(0,0)$ i (u,v).

Załóżmy, że w wyniku obrotu punkt $(1,0)$ przeszedł na punkt (c,s). Obrót oznaczymy przez $\mathcal{O}$. Nie mówimy o jaki kąt obracamy. Można powiedzieć, że o taki kąt α, że $c=\cos\alpha$, $s=\sin\alpha$. Ustalimy, na jaki punkt przejdzie w tym obrocie punkt (x,y).

Twierdzenie 19.7 (o postaci obrotu wokół punktu O)
Obrazem punktu (x,y) w obrocie $\mathcal{O}$ wokół punktu O przekształcającym punkt $(1,0)$ na punkt (c,s), jest punkt

$$(xc-ys, xs+yc).$$

[19.3] Również $s^2+t^2=1-c^2+1-d^2=1$.

[19.4] Można tak ustalić znak liczby v, bo $2\sqrt{\frac{1+c}{2}}\sqrt{\frac{1-c}{2}}=\sqrt{1-c^2}=|s|$.

Dowód. Z twierdzenia charakteryzującego izometrie i następującego po nim lematu wynika, że istnieją takie liczby $c, s \in \mathbb{R}$, że $c^2 + s^2 = 1$ i zachodzi jedna z dwu możliwości:

1° obrazem dowolnego punktu (x, y) jest $(cx + sy, sx - cy)$,

2° obrazem dowolnego punktu (x, y) jest $(cx - sy, sx + cy)$.

Załóżmy, że spełniony jest warunek $1°$. Wtedy zgodnie z lematem o symetrii punkt $\left(\sqrt{\frac{1+c}{2}}, \sqrt{\frac{1-c}{2}}\right) \neq (0,0)$ jest stały w odróżnieniu od punktu $\left(\sqrt{\frac{1-c}{2}}, -\sqrt{\frac{1+c}{2}}\right)$. Wobec tego przekształcenie nie jest obrotem. Zachodzi więc warunek $2°$. Dowód został zakończony. ■

Jeśli przekształcenie $\mathcal{O}(t_1)$ jest obrotem o kąt t_1 wokół punktu $(0,0)$, przekształcenie $\mathcal{O}(t_2)$ — obrotem o kąt t_2, to ich złożenie jest obrotem o kąt $t_1 + t_2$. Przy obrocie o kąt $t_1 + t_2$ punkt $(1,0)$ przechodzi na punkt $\big(c(t_1+t_2), s(t_1+t_2)\big)$. Przy obrocie o kąt t_1 punkt $(1,0)$ trafia na punkt $\big(c(t_1), s(t_1)\big)$, [19.5] ten zaś przy obrocie o kąt t_2 przechodzi na punkt

$$\big(c(t_1)c(t_2) - s(t_1)s(t_2),\ s(t_1)c(t_2) + c(t_1)s(t_2)\big)\,.$$

Wynik musi być ten sam, więc powinny być spełnione równości:

$$c(t_1+t_2) = c(t_1)c(t_2) - s(t_1)s(t_2)\,,$$
$$s(t_1+t_2) = s(t_1)c(t_2) + c(t_1)s(t_2)\,.$$

Otrzymane wzory żywo przypominają wzory na kosinus i sinus sumy dwóch kątów. Istotną luką formalną w tych rozważaniach jest brak dokładnej definicji miary kąta. Wspomnieliśmy o radianach, ale w definicji występuje długość łuku — też niezdefiniowana. Tym bardziej nie podaliśmy żadnych własności miary kątów. Pokażemy jak można tę lukę zapełnić. Podkreślić wypada, że sposób nie jest zapewne najprostszy, ale za to dość szybko doprowadzi nas do celu. Nie można przypisać kątom liczb (miar) w taki sposób, by sumie kątów odpowiadała suma ich miar, bo np. suma dwóch kątów półpełnych to kąt pełny, a temu przypisujemy miarę 0. Postąpimy odwrotnie: przypiszemy liczbom rze-

[19.5] Pisalibyśmy $\cos t_1$ zamiast $c(t_1)$, ale nie ustaliliśmy sposobu mierzenia kątów.

czywistym kąty tak, by sumie liczb odpowiadała suma kątów. Zauważmy jeszcze, że wystarczy powiedzieć na jaki punkt trafia punkt $(1,0)$, by zdefiniować obrót wokół punktu $O=(0,0)$.

Definicja 19.8 (miary kątów zorientowanych)
Miarą kątów zorientowanych, lub po prostu miarą kątów, nazywamy takie odwzorowanie $\mathcal{O}$ ze zbioru wszystkich liczb rzeczywistych w zbiór obrotów wokół punktu $O=(0,0)$, że jeśli punkt $\big(c(t),s(t)\big)$ jest obrazem punktu $(1,0)$ w obrocie $\mathcal{O}(t)$, to funkcje c i s spełniają następujące warunki:

0° $c^2(t)+s^2(t)=1$ dla każdego $t\in\mathbb{R}$,

1° $c(t_1+t_2)=c(t_1)c(t_2)-s(t_1)s(t_2)$ i
$s(t_1+t_2)=s(t_1)c(t_2)+c(t_1)s(t_2)$ dla $t_1,t_2\in\mathbb{R}$,

2° funkcje c i s są ciągłe,

3° funkcje c i s nie są stałe. ■

Warunek 0° musi być spełniony: bo punkt $(1,0)$ jest odległy o 1 od punktu $(0,0)$, więc jego obraz też jest odległy o 1 od punktu $(0,0)$, zatem $c^2(t)+s^2(t)=1$ dla każdego $t\in\mathbb{R}$.

W ostatnim warunku chodzi o to, by uniknąć degeneracji miary, bo jedna z możliwych definicji pary funkcji (c,s) to: $c(t)=1$ i $s(t)=0$ dla każdego t.

Uwaga 19.9
Jeśli obie liczby $c(t)$ i $s(t)$ są dodatnie, to — zgodnie ze znaną z poprzedniej nauki definicją — $c(t)$ jest kosinusem kąta ostrego o wierzchołku $(0,0)$ w trójkącie równoramiennym, którego pozostałymi wierzchołkami są punkty $(1,0)$ i $\big(c(t),s(t)\big)$. Liczba $s(t)$ jest sinusem właśnie opisanego kąta. ■

Uwaga 19.10
Później udowodnimy, że istnieje miara $\mathcal{O}$ spełniające warunki 0°, 1°, 2° i 3°. Te warunki nie wyznaczają miary kątów jednoznacznie, bo jeśli $a\neq 0$ i $\mathcal{O}$ jest miarą kątów i $\mathcal{O}_a(t)=\mathcal{O}\,(at)$, to również $\mathcal{O}_a$ jest miarą kątów. Jasne jest że $\mathcal{O}=\mathcal{O}_a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a=1$. Później udowodnimy, że jeśli $\mathcal{O}$ jest miarą kątów, to każda inna miara kątów jest postaci $\mathcal{O}_a$. ■

Oczywiście manipulowanie liczbą a odpowiada zmianie jednostki miary kątów: wielu ludzi jest przyzwyczajonych do stopni, ale używane są też inne jednostki. Stopień to $\frac{1}{360}$ kąta pełnego, gradus to $\frac{1}{400}$, rumb to $\frac{1}{32}$. Wspomnieliśmy też o radianach. Rozpisywać się na ten temat nie będziemy.

Na podaną definicję miary kątów spojrzymy „kinematycznie". Po okręgu porusza się jednostajnie punkt. W chwili t znajduje się w położeniu $\big(c(t), s(t)\big)$, $c(0) = 1$, $s(0) = 0$. Jednostajność ruchu oznacza, że: odległości punktów $\big(c(t_1 + t_3), s(t_1 + t_3)\big)$ i $\big(c(t_1), s(t_1)\big)$ oraz punktów $\big(c(t_2+t_3), s(t_2+t_3)\big)$ i $\big(c(t_2), s(t_2)\big)$ są równe czyli, że w równych odcinkach czas punkt przebywa równe te same odległości. Tu nawet można powiedzieć nieco więcej: obrót $\mathcal{O}(t_2-t_1)$ przekształca drogę przebytą w czasie od t_1 do t_1+t_3 na drogę przebytą w czasie od t_2 do t_2+t_3. Z warunku 1° wynika, że te odległości są równe $\sqrt{\big(c(t_3) - 1\big)^2 + s^2(t_3)}$.

Później wykażemy, że dla każdej miary kątów istnieje dokładnie jedna taka liczba $p > 0$, że $\mathcal{O}(2p) = \mathcal{O}(0)$ oraz $\mathcal{O}(t) \neq \mathcal{O}(0)$ dla $0 < t < 2p$. Liczba $2p$ to czas pierwszego powrotu do punktu wyjścia. Liczba $2p$ będzie nazywana okresem podstawowym miary kątów. Oczywiście będą spełnione równości $c(t + 2p) = c(2p)$ i $s(t + 2p) = s(2p)$ dla każdego t.

Wreszcie udowodnimy istnienie granic $v_1(t) = \lim\limits_{t_1\to t} \frac{c(t_1)-c(t)}{t_1-t}$ i $v_2(t) = \lim\limits_{t_1\to t} \frac{s(t_1)-s(t)}{t_1-t}$. Wektor $\overrightarrow{\big(v_1(t), v_2(t)\big)}$ należy traktować jako wektor chwilowej prędkości w tym ruchu — liczba $\frac{c(t_1)-c(t)}{t_1-t}$ to średnia prędkość w czasie od t do t_1 rzutu poruszającego się punktu na oś poziomą, zatem $v_1(t)$, to prędkość chwilowa tego rzutu, czyli pozioma składowa wektora prędkości chwilowej. Analogicznie $v_2(t)$ to składowa pionowa tego wektora prędkości w chwili t. Wykażemy potem, że długość wektora prędkości, czyli prędkość skalarna $\sqrt{v_1^2(t) + v_2^2(t)}$ jest stałą. Przekonamy się, że wektor $\overrightarrow{\big(v_1(t), v_2(t)\big)}$ jest styczny do okręgu w punkcie $\big(c(t), s(t)\big)$, w szczególności $v_1(0) = 0$.

Udowodnimy następnie, że istnieje dokładnie jedna taka miara kątów, że $v_2(0) = \lim_{t\to 0}\frac{s(t)}{t} = 1$. Ta miara to opis jednostajnego ruchu po okręgu z prędkością 1 w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Nazywać ją będziemy miarą łukową. Wykażemy też, że długość łuku przebytego w czasie od t_1 do t_2 jest równa $|t_2 - t_1|$, długość łuku to kres górny długości łamanych wpisanych w ten łuk.

Miara łukowa kąta półpełnego oznaczana będzie literą π. Jednostka miary łukowej nazywana jest radianem. Oznacza to że kąt półpełny ma π radianów. Jeden radian to taki kąt, że długość łuku okręgu o środku w wierzchołku kąta, którego końce leżą na ramionach kąta jest równa promieniowi okręgu.

Podamy definicję podstawowych funkcji trygonometrycznych.

Definicja 19.11 (kosinusa i sinusa)
Funkcjami kosinus i sinus nazywamy taką parę funkcji $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $\sin\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że

19.11.1 $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ dla każdej liczby $t \in \mathbb{R}$,

19.11.2 $\cos(t_1 + t_2) = \cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2$ i $\sin(t_1 + t_2) = \sin t_1 \cos t_2 + \sin t_2 \cos t_1$ dla dowolnych liczb rzeczywistych t_1, t_2;

19.11.3 funkcje cos i sin są ciągłe;

19.11.4 funkcje cos i sin nie są stałe;

19.11.5 $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ — istnienie tej granicy wynika z pierwszych trzech warunków. ■

Aby definicja była poprawna należy udowodnić, że istnieje dokładnie jedna para funkcji, które spełniają wypisane warunki. Istnienie wynika z tego, co pokazaliśmy w rozdziale o szeregach: można przyjąć, że

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{i} \qquad \sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

Sprawdziliśmy wcześniej korzystając z twierdzenia o mnożeniu szeregów, że spełniona jest pierwsza równość. Sprawdzenie równości z drugiego warunku pozostawiliśmy Czytelnikom. Sprawdzenie ciągłości trudne nie jest, ostatni warunek też został sprawdzony. Na końcu rozdziału pojawi się dowod jednoznaczności. Podamy też inny dowód istnienia kosinusa i sinusa.

Teraz wyprowadzimy z warunków 19.5.1 — 19.5.5 wiele ważnych własności funkcji trygonometrycznych.

Twierdzenie 19.12
Dla każdej liczby rzeczywistej t zachodzą równości:

19.12.1 $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t\,;$

19.12.2 $\sin(2t) = 2\sin t\cos t\,;$

19.12.3 $\cos 0 = 1\,,\ \sin 0 = 0\,;$

19.12.4 $\cos(-t) = \cos t$ i $\sin(-t) = -\sin t\,.$

Dowód. Dwa pierwsze wzory wynikają od razu z drugiego warunku definicji kosinusa i sinusa. Przyjmując $t = 0$ otrzymujemy $\cos 0 = \cos^2 0 - \sin^2 0$ i $\sin 0 = 2\sin 0\cos 0$. Mnożąc pierwszą równość przez $\cos 0$, drugą przez $\sin 0$ a potem dodając je stronami otrzymujemy $1 = \cos^2 0 + \sin^2 0 = \cos^3 0 - \sin^2 0\cos 0 + {}$ $+2\sin^2 0\cos 0 = \cos 0\big(\cos^2 0 + \sin^2 0\big) = \cos 0$. Mamy wobec tego $1 = \cos^2 0 + \sin^2 0 = 1 + \sin^2 0$, zatem $\sin 0 = 0$.

$1 = \cos 0 = \cos\big(t + (-t)\big) = \cos t\cos(-t) - \sin t\sin(-t)$ oraz $0 = \sin 0 = \sin\big(t + (-t)\big) = \sin t\cos(-t) + \sin(-t)\cos t$. Mnożymy pierwszą z tych równości przez $\cos t$, drugą przez $\sin t$, a potem dodajemy stronami. W wyniku otrzymujemy $\cos(-t) = \cos t$. Mnożąc teraz drugą równość przez $\cos t$, a pierwszą przez $-\sin t$ i dodając stronami otrzymujemy $\sin(-t) = -\sin t$. Dowód został zakończony. ■

Definicja 19.13 (funkcji parzystych i nieparzystych)
Jeśli $D \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem symetrycznym względem punktu 0, to funkcja $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywana jest parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy $f(-x) = f(x)$ dla każdego $x \in D$, a nieparzystą wtedy i tylko wtedy, gdy $f(-x) = -f(x)$ dla każdego $x \in D$. ■

Funkcja jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy jej wykres jest symetryczny względem **osi** OY. Funkcja jest nieparzysta, gdy jej wykres jest symetryczny względem **punktu** $(0, 0)$.

Przykład 19.1 Kosinus jest funkcją parzystą, x^2 jest funkcją parzystą, funkcja $\frac{x^2}{x^2-16}$ jest parzysta. ■

Przykład 19.2 Sinus jest funkcją nieparzystą, $x^{17}+2x^{21}$ jest funkcją nieparzystą, funkcja $\frac{x}{x^2-1}$ jest nieparzysta. ■

Przykład 19.3 Wielomian x^2-x nie jest ani funkcją parzystą, ani nieparzystą, bo $2=f(-1)\neq 0=\pm f(1)$. ■

Twierdzenie 19.14 (o funkcjach różnicy)
Dla dowolnych liczb $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ zachodzą wzory

19.14.1 $\cos(t_1-t_2)=\cos t_1\cos t_2+\sin t_1\sin t_2$,

19.14.2 $\sin(t_1-t_2)=\sin t_1\cos t_2-\sin t_2\cos t_1$.

Dowód. Twierdzenie wynika od razu z drugiego warunku definicji kosinusa i sinusa oraz z czwartej części tezy poprzedniego twierdzenia. ■

Twierdzenie 19.15 (o zamianie na postać iloczynową)
Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,y\in\mathbb{R}$ zachodzą wzory

19.15.1 $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$;

19.15.2 $\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$;

19.15.3 $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$;

19.15.1 $\cos x-\cos y=2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}$.

Dowód. $\sin(t_1+t_2)+\sin(t_1-t_2)=\sin t_1\cos t_2+\sin t_2\cos t_1+$ $+\sin t_1\cos t_2-\sin t_2\cos t_1=2\sin t_1\cos t_2$. Przyjmując $t_1=\frac{x+y}{2}$, $t_2=\frac{x-y}{2}$, czyli $x=t_1+t_2$, $y=t_1-t_2$ otrzymujemy pierwszy z dowodzonych wzorów. Dowody następnych są podobne. ■

Uwaga 19.16
Trzy ostatnie twierdzenia korzystały jedynie z pierwszych dwóch warunków definicji kosinusa i sinusa. Pozostają one więc w mocy dla dowolnej pary funkcji c i s, która spełnia te dwa warunki. Dziedziną takich funkcji nie musi być zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Wystarczy, by wraz z liczbami x,y dziedzina zawierała liczby $x\pm y$ oraz $\frac{x\pm y}{2}$. ■

Lemat 19.17
Istnieje taka liczba $\tau > 0$, że jeśli $|t| \leqslant \tau$ i $\cos t = 1$, to $t = 0$ oraz jeśli $|t| \leqslant \tau$ i $\sin t = 0$, to $t = 0$.

Dowód. Rozumujemy nie wprost. Załóżmy, że dla każdej liczby $\tau > 0$ istnieje takie $t \in [-\tau, \tau] \setminus \{0\}$, że $\cos t = 1$. Niech $0 < |t_n| < \frac{1}{n}$ i $\cos t_n = 1$. Ponieważ $\cos^2 t_n + \sin^2 t_n = 1$, więc $\sin t_n = 0$. Prosta indukcja pozwala udowodnić, że wtedy dla każdej liczby naturalnej k zachodzą równości $\cos(kt_n) = 1$ oraz $\sin(kt_n) = 0$. Stąd, z parzystości kosinusa i nieparzystości sinusa wynika, że również $\cos(-kt_n) = 1$ i $\sin(-kt_n) = 0$. Wobec tego $\cos(kt_n) = 1$ dla każdej liczby **całkowitej** k. Udowodnimy, że z tego wynika, że $\cos x = 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc również $\sin x = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, wbrew temu, że funkcja kosinus i sinus nie są stałe.

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$, więc dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi wzór $\lim\limits_{n\to\infty} \left\lfloor \frac{x}{t_n} \right\rfloor t_n = x$. Mamy też $\cos\left(\left\lfloor \frac{x}{t_n} \right\rfloor t_n\right) = 1$ dla $n \in \mathbb{N}$. Z ciągłości funkcji kosinus wynika: $\cos x = \lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\left\lfloor \frac{x}{t_n} \right\rfloor t_n\right) = 1$.

Druga część tezy wynika z pierwszej i z tego, że jeśli $\sin t = 0$, to $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t = 1$. ■

Lemat 19.18
Istnieje taka liczba t, że $\cos t = 0$.

Dowód. Załóżmy, że teza nie jest prawdziwa. Ponieważ funkcja kosinus jest ciągła i $\cos 0 = 1$, więc jeśli $\cos t \neq 0$ dla każdego t, to $\cos t > 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Istnieje taka liczba $x \in \mathbb{R}$, że $\cos x \neq 1$, więc $0 < \cos x < 1$. Niech $a_n = \cos(2^{n-1}x)$. Z wzoru na kosinus kąta podwojonego wynika, że $a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$, zatem $a_{n+1} - a_n = 2a_n^2 - 1 - a_n = (a_n - 1)(2a_n + 1) \leqslant 0$, bo $a_n \leqslant 1$ i $2a_n + 1 > 1$. Ciąg (a_n) jest więc nierosnący i ograniczony z dołu przez 0, więc ma skończoną granicę. Niech $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Wtedy $0 \leqslant g \leqslant a_1 < 1$ i $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (2a_n^2 - 1) = 2g^2 - 1$, zatem $g = 1$ lub $g = -\frac{1}{2}$, wbrew nierówności $0 \leqslant g < 1$. ■

Lemat 19.19
Jeśli $\cos t = 0$, to $\cos(2t) = -1$, $\cos(4t) = 1$ i $\sin(4t) = 0$.

Dowód. Mamy $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = -1$, stąd $\cos(4t) = = 2\cos^2(2t) - 1 = 2(-1)^2 - 1 = 1$. Wobec tego $\sin(4t) = 0$. ■

Uwaga 19.20
Lemat jest prawdziwy dla pary funkcji spełniających dwa pierwsze warunki definicji kosinusa i sinusa, określonych w zbiorze, w którym wykonalne jest dodawanie i dzielenie przez 2. ■

Lemat 19.21
W zbiorze $\{x > 0\colon \quad \cos x = -1\}$ istnieje liczba najmniejsza.

Dowód. Z poprzedniego lematu i parzystości kosinusa wynika, że zbiór $\{x > 0\colon \quad \cos x = -1\}$ jest niepusty. Niech π oznacza jego kres dolny. Z definicji kresu dolnego wynika, że istnieje taki ciąg (x_n) zbieżny do π, że $\cos x_n = -1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Z ciągłości wynika, że $\cos \pi = -1$. ■

Definicja 19.22 (liczby π)
π jest najmniejszą liczbą dodatnią, dla której zachodzi równość $\cos \pi = -1$. ■

Symbol π wprowadził w 1707 W. Jones, a spopularyzował L.Euler. Greckie słowo oznaczające obwód zaczyna się od litery π.

Uwaga 19.23
Później wykażemy, że długość okręgu o promieniu 1 jest równa 2π oraz że pole koła o promieniu 1 jest równe π. ■

Lemat 19.24
Liczba 2π jest najmniejsza taką liczbą dodatnią, że $\cos(2\pi) = 1$.

Dowód. Ponieważ $\cos \pi = -1$, więc $\cos(2\pi) = 1$. Załóżmy, że α jest najmniejszą liczbą dodatnią, dla której $\cos \alpha = 1$. Taka liczba α istnieje, bo istnieje taki przedział $(0, \tau)$, że jeśli $x \in (0, \tau)$, to $\cos x < 1$ (lemat 19.17). Oczywiście $\alpha \leqslant 2\pi$. Jeżeli $1 = \cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$, to $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$, a ponieważ $0 < \frac{\alpha}{2} < \alpha$, więc $\cos \alpha = -1$. Stąd wynika, że $\frac{\alpha}{2} \geqslant \pi$. W połączeniu z poprzednią nierównością mamy $\frac{\alpha}{2} = \pi$, czyli $\alpha = \pi$. ■

Twierdzenie 19.25 (o różnowartościowości i okresowości)
Prawdziwe są wzory: $\cos(t + 2\pi) = \cos t$ i $\sin(t + 2\pi) = \sin t$ dla każdej liczby $t \in \mathbb{R}$. Jeśli $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$ oraz $\cos t_1 = \cos t_2$

i $\sin t_1 = \sin t_2$, to $t_1 = t_2$.

Dowód. Mamy $\cos(2\pi) = 1$ i $\sin(2\pi) = 0$. Stąd $\cos(t + 2\pi) = = \cos t \cos(2\pi) - \sin t \sin(2\pi) = \cos t$ i $\sin(t + 2\pi) = \sin t \cos(2\pi) + + \sin(2\pi) \cos t = \sin t$ dla dowolnej liczby rzeczywistej t.

Niech $0 \leqslant t_1 < t_2 < 2\pi$ i $\cos t_1 = \cos t_2$, $\sin t_1 = \sin t_2$. Wtedy $\cos(t_2 - t_1) = \cos t_2 \cos t_1 + \sin t_2 \sin t_1 = \cos^2 t_2 + \sin^2 t_2 = 1$ wbrew temu, że 2π to najmniejsza liczba dodatnia, której kosinus jest równy 1. ■

Definicja 19.26 (funkcji okresowej)
Funkcja $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywana jest okresową wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba $T > 0$, że $t \in D \Leftrightarrow t + T \in D$ oraz $f(t + T) = f(t)$ dla każdego $t \in D$. Liczbę T nazywamy wtedy okresem funkcji f. Jeśli wśród dodatnich okresów funkcji f istnieje najmniejszy, to nazywamy go okresem podstawowym. ■

Uwaga 19.27
Funkcje kosinus i sinus są okresowe. Liczba 2π jest okresem podstawowym funkcji kosinus. Okaże się, że funkcji sinus też. ■

Uwaga 19.28 (o liczbie π)
Liczba π jest niewymierna. Udowodnił to w 1761 r niemiecki matematyk J.Lambert. Inny Niemiec, F.Lindemann, w 1882 r wykazał, że π jest liczbą przestępną, tzn. nie jest pierwiastkiem wielomianu dodatniego stopnia o współczynnikach całkowitych. ■

Uwaga 19.29
W dowodzie okresowości funkcji kosinus i sinus korzystaliśmy tylko z pierwszych czterech warunków definicji tych funkcji. Oznacza to, że dowolna para c, s funkcji spełniających cztery pierwsze warunki tej definicji składa się z funkcji okresowych, ale nie ma żadnego powodu, by 2π było ich okresem. ■

Lemat 19.30
$\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Dowód. Wynika to z równości $-1 = \cos \pi = 2 \cos^2 \frac{\pi}{2} - 1$. ■

Twierdzenie 19.31
Funkcja kosinus jest dodatnia na przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Dowód. Załóżmy, że twierdzenie jest nieprawdziwe. Wobec tego istnieje taka liczba $t_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, że $\cos t_1 \leqslant 0$. Z twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich wynika, że istnieje taka liczba $t_0 \in (0, t_1]$, że $\cos t_0 = 0$. Wtedy $4t_0$ jest okresem funkcji kosinus, ale to jest niemożliwe, bo $4t_0 < 2\pi$. ∎

Lemat 19.32
Funkcja sinus ma na przedziale otwartym $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ stały znak.

Dowód. Załóżmy, że tak nie jest. Z twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich wynika, że istnieje takie $t_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, że $\sin t_0 = 0$. Wtedy $\cos t_0 = \pm 1$, więc $\cos(2t_0) = 1$, wbrew temu, że $0 < 2t_0 < 2\pi$. ∎

Twierdzenie 19.33 (o znaku $\sin x$)
Jeśli $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, to $0 < \sin x < 1$. $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Dowód. Z poprzedzającego to twierdzenie lematu wynika, że na przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ funkcja sinus jest dodatnia albo ujemna. Musi być dodatnia, bo $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 > 0$. Ponieważ $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, więc $\sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$. Z ciągłości funkcji sinus i jej dodatniości na przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ wynika, że $\sin\frac{\pi}{2} \geqslant 0$, zatem $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Uwaga 19.34
Pierwszy raz skorzystaliśmy z ostatniego warunku definicji funkcji kosinus i sinus. Bez niego twierdzenia nie da się udowodnić. Można zdefiniować następne dwie funkcje $c(t) = \cos t = \cos(-t)$ oraz $s(t) = -\sin t = \sin(-t)$. Spełniają one wszystkie warunki definicji z wyjątkiem ostatniego. Oczywiście jeśli $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, to $\sin(-t) < 0$. Zamiast zakładać, że $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ można założyć tylko dodatniość granicy (istnienie niedługo wykażemy). ∎

Twierdzenie 19.35 (wzory redukcyjne)
Dla każdej liczby rzeczywistej t zachodzą wzory

$$\begin{array}{lll}
\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t, & \sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t, & \cos(\frac{\pi}{2} + t) = -\sin t, \\
\sin(\frac{\pi}{2} + t) = \cos t, & \cos(\pi - t) = -\cos t, & \cos(\pi + t) = -\cos t, \\
\sin(\pi - t) = \sin t, & \sin(\pi + t) = -\sin t, & \cos(\frac{3\pi}{2} - t) = -\sin t, \\
\cos(\frac{3\pi}{2} + t) = \sin t, & \sin(\frac{3\pi}{2} - t) = -\cos t, & \sin(\frac{3\pi}{2} + t) = -\cos t, \\
\cos(2\pi - t) = \cos t & \sin(2\pi - t) = -\sin t, & \cos(2\pi + t) = \cos t,
\end{array}$$

oraz $\sin(2\pi+t)=\sin t$.

Dowód. Można skorzystać z wzorów na kosinus i sinus sumy lub różnicy dwu liczb. Rachunki są bardzo proste, więc pozostawiamy je Czytelnikowi, który poza udowodnieniem powinien ,,zobaczyć" je na rysunkach, bo to ważniejsze od formalnego uzasadnienia. ■

Twierdzenie 19.36 (o monotoniczności kosinusa i sinusa)
Na przedziale $[0,\pi]$ funkcja kosinus maleje, na przedziale $[\pi,2\pi]$ — rośnie. Na przedziale $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ funkcja sinus rośnie, na przedziale $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ — maleje.

Dowód. Z równości $\sin(\pi-t)=\sin t$ wynika, że na przedziale $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ sinus ma taki sam znak jak na przedziale $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$, więc sinus jest dodatni na przedziale $(0,\pi)$.

Niech $0\leqslant t_1<t_2\leqslant\pi$. Zachodzi równość $\cos t_2-\cos t_1= =-2\sin\frac{t_2-t_1}{2}\sin\frac{t_2+t_1}{2}$. Mamy $0<\frac{t_2-t_1}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$ i $0<\frac{t_2+t_1}{2}<\pi$, zatem $\cos t_2<\cos t_1$. Z wzoru $\cos t=-\cos(t-\pi)$ wynika, że na przedziale $[\pi,2\pi]$ kosinus rośnie. Z wzoru $\sin t=-\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$ wynika, że na przedziale $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sinus rośnie, a na przedziale $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ — maleje. ■

Wniosek 19.37 (znaki kosinusa i sinusa)
Jeśli $0<t<\frac{\pi}{2}$, to $\sin t>0$ i $\cos t>0$;
jeśli $\frac{\pi}{2}<t<\pi$, to $\sin t>0$ i $\cos t<0$;
jeśli $\pi<t<\frac{3\pi}{2}$, to $\sin t<0$ i $\cos t<0$;
jeśli $\frac{3\pi}{2}<t<2\pi$, to $\sin t<0$ i $\cos t>0$.

Twierdzenie 19.38 (o zbiorze wartości)
Jeśli $x,y\in\mathbb{R}$ i $x^2+y^2=1$, to istnieje dokładnie jedna taka liczba rzeczywista $t\in[0,2\pi)$, że $x=\cos t$ i $y=\sin t$.
Jeśli $\cos t_2=\cos t_1$ i $\sin t_2=\sin t_1$ dla pewnych liczb rzeczywistych t_1,t_2, to istnieje taka liczba całkowita n, że $t_2-t_1=2n\pi$.

Dowód. Jeśli $y\geqslant 0$, to $y=\sqrt{1-x^2}$. Funkcja kosinus jest ciągła i i ściśle malejąca na $[0,\pi]$, $\cos\pi=-1\leqslant x\leqslant 1=\cos 0$, więc istnieje dokładnie jedno takie $t\in[0,\pi]$, że $x=\cos t$. Ponieważ $\sin t\geqslant 0$, więc $\sin t=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{1-x^2}=y$. Drugiego t należałoby szukać w przedziale $(\pi,2\pi)$, ale dla $t\in(\pi,2\pi)$ zachodzi nierówność $\sin t < 0$. Jeśli $y < 0$, to $y = -\sqrt{1-x^2}$. Kosinus jest ciągły i rośnie na przedziale $(\pi, 2\pi)$, więc istnieje dokładnie jedno takie $t \in (\pi, 2\pi)$, że $x = \cos t$. Ponieważ $\sin t < 0$, więc $\sin t = -\sqrt{1-\cos^2 t} = -\sqrt{1-x^2} = y$. Jednoznaczność wyboru t jest oczywista. Udowodniliśmy pierwszą część tezy.

Z równości $\cos t_2 = \cos t_1$ i $\sin t_2 = \sin t_1$ wynika wzór $\cos(t_2 - t_1) = \cos t_2 \cos t_1 + \sin t_2 \sin t_1 = \cos^2 t_2 + \sin^2 t_2 = 1$. Istnieje dokładnie jedna taka liczba całkowita n, że

$$t_2 - t_1 - 2n\pi \in [0, 2\pi).$$

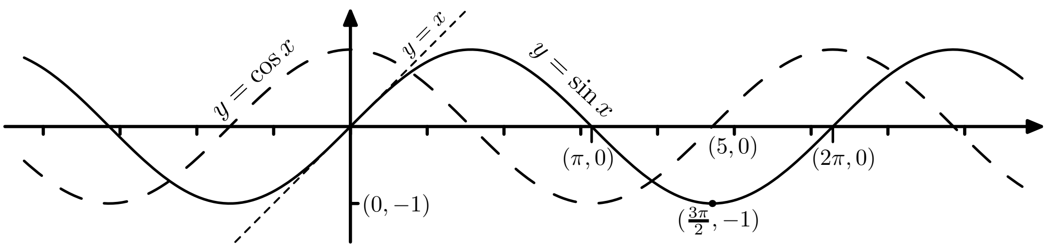
Z okresowości wynika, że $1 = \cos(t_2 - t_1) = \cos(t_2 - t_1 - 2n\pi)$ i oczywiście $0 = \sin(t_2 - t_1 - 2n\pi)$. Stąd i z udowodnionej części twierdzenia wynika, że $t_2 - t_1 - 2n\pi = 0$, a to kończy dowód. ■

Twierdzenie 19.39 (o wypukłości)
Funkcja sinus jest ściśle wklęsła na przedziale $[0, \pi]$, ściśle wypukła — na $[\pi, 2\pi]$. Kosinus jest funkcją ściśle wklęsła na przedziale $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ściśle wypukłą — na $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Dowód. Udowodnimy, że sinus jest ściśle wklęsły na przedziale $[0, \pi]$, resztę Czytelnik wywnioskuje z wzorów redukcyjnych.
Jeśli $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \pi$, to

$$\tfrac{1}{2}\big(\sin t_1 + \sin t_2\big) = \sin \tfrac{t_1+t_2}{2} \cos \tfrac{t_1-t_2}{2} < \sin \tfrac{t_1+t_2}{2},$$

bo $\cos \frac{t_2-t_1}{2} < 1$ i $0 < \sin \frac{t_1+t_2}{2}$. Stąd i z twierdzenia o wypukłości funkcji ciągłej wynika, że funkcja sinus jest ściśle wklęsła na przedziale $[0, \pi]$. ■

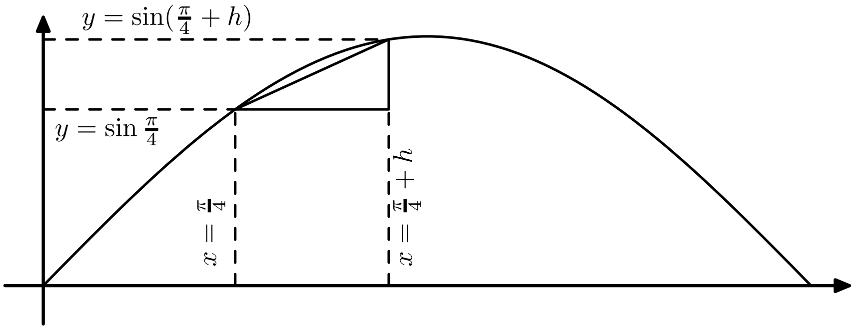


Lemat 19.40
$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dowód. Zachodzą równości $\sin \frac{\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4}$ oraz $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1$. Z nich wynika, że $\sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{4}$, a ponieważ $\sin \frac{\pi}{4} > 0$, więc $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ■

Z ostatniego twierdzenia z rozdziału o funkcjach wynika

Lemat 19.41 (o istnieniu granicy ilorazu różnicowego)
Na każdym z przedziałów $\big(0,\frac{\pi}{4}\big]$, $\big[-\frac{\pi}{4},0\big)$ funkcja $\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+h)-\sin\frac{\pi}{4}}{h}$ jest ściśle malejąca oraz $0<\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+h)-\sin\frac{\pi}{4}}{h}<+\infty$.



Dowód. Nierówność wynika z tego, że jeśli $0<h<\frac{\pi}{4}$, to $\frac{4}{\pi}\big(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\big)=\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})-\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}<\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+h)-\sin\frac{\pi}{4}}{h}<\frac{\sin 0-\sin\frac{\pi}{4}}{-\frac{\pi}{4}}=$ $=\frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}$. Dowód został zakończony. ■

Nie udowodniliśmy jeszcze istnienia granicy obustronnej.

Twierdzenie 19.42 (o granicy ilorazu różnicowego)
Istnieje skończona i dodatnia granica $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$.

Dowód. Niech $0<x<\frac{\pi}{4}$. Mamy wtedy $\sin\big(\frac{\pi}{4}+x\big)-\sin\frac{\pi}{4}=$ $=\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x-1)=$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\frac{\cos^2x-1)}{\cos x+1})=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x(1-\frac{\sin x}{\cos x+1})$, zatem

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin\big(\frac{\pi}{4}+x\big)-\sin\frac{\pi}{4}}{x}\cdot\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{\sin x}{1+\cos x}}.$$

Stąd, z równości $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{1+\cos x}=0$ i z poprzedniego lematu wynika, że $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=\sqrt{2}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+x)-\sin\frac{\pi}{4}}{x}$. Z równości $\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}$ wynika od razu, że $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}$, więc granica $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ istnieje, jest skończona i dodatnia. ■

Uwaga 19.43
Jeśli para funkcji c,s spełnia warunki pierwsze cztery warunki definicji kosinusa i sinusa oraz $c_a(t)=c(at)$ i $s_a(t)=s(at)$, to para c_a,s_a też spełnia te warunki i $\lim\limits_{t\to0}\frac{s_a(t)}{t}=a\lim\limits_{t\to0}\frac{s(t)}{t}$ dla każdej

liczby $a \neq 0$. ■

Uwaga 19.44

$$\lim_{x\to\alpha} \tfrac{\cos x - \cos\alpha}{x-\alpha} = -\lim_{x\to\alpha} \tfrac{2\sin\frac{x-\alpha}{2}\sin\frac{x+\alpha}{2}}{x-\alpha} =$$

$$-\lim_{x\to\alpha} \tfrac{\sin\frac{x-\alpha}{2}}{\frac{x-\alpha}{2}} \sin\tfrac{x+\alpha}{2} = -\sin\alpha\,,$$

$$\lim_{x\to\alpha} \tfrac{\sin x - \sin\alpha}{x-\alpha} = -\lim_{x\to\alpha} \tfrac{\cos(\pi/2-x)-\cos(\pi/2-\alpha)}{(\pi/2-x)-(\pi/2-\alpha)} =$$

$$= \sin(\pi/2-\alpha) = \cos\alpha\,.$$

Ponieważ $\sqrt{(-\sin\alpha)^2 + \cos^2\alpha} = 1$, więc chwilowa prędkość skalarna w ruchu po okręgu, w którym poruszające się ciało znajduje się w chwili α w punkcie $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, jest równa 1. ■

Twierdzenie 19.45 Dla każdej liczby $x > 0$ zachodzi nierówność $\sin x < x$. Zachodzi nierówność $\pi > 2$.

Dowód. Funkcja sinus jest ściśle wklęsła na przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$, zatem funkcja $\frac{\sin x}{x}$ jest ściśle malejąca na przedziale $(0, \frac{\pi}{2}]$. Kres górny ilorazu $\frac{\sin x}{x}$ na tym przedziale, to $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, więc $\frac{\sin x}{x} < 1$ dla $0 < x \leqslant \pi$. W szczególności $1 = \sin\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$, czyli $\pi > 2$. Nierówność $\sin x < x$ zachodzi również dla $x > 1$, bo $\sin^2 x \leqslant 1$, więc $\sin x \leqslant 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. ■

Uwaga 19.46

$\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin(2\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha\cos(2\alpha) =$
$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) - \sin^3\alpha =$
$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$. Niech $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Wtedy zachodzi następująca równość $1 = \sin\frac{\pi}{2} = 3\sin\frac{\pi}{6} - 4\sin^3\frac{\pi}{6}$. Oznacza to, że liczba $\sin\frac{\pi}{6} > 0$ jest pierwiastkiem równania

$$0 = 4y^3 - 3y + 1 = (y+1)(4y^2 - 4y + 1) = (y+1)(2y-1)^2\,.$$

Stąd $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, więc $\frac{1}{2} < \frac{\pi}{6}$, tzn. $3 < \pi$. ■

Definicja 19.47 (tangensa i kotangensa)

Tangensem nazywamy funkcję określoną wzorem $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ w zbiorze tych wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których nierówność $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ zachodzi dla każdej liczby całkowitej k; kotangensem nazywamy funkcję określoną wzorem $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$

w zbiorze tych wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których nierówność $x \neq k\pi$ zachodzi dla każdej liczby całkowitej k. ■

Jasne jest, że tangens zdefiniowaliśmy w zbiorze, w którym kosinus nie przyjmuje wartości 0, a kotangens — w zbiorze, w którym sinus nie przyjmuje wartości 0.

Twierdzenie 19.48 (wzory redukcyjne)
Jeśli $\cos x \neq 0 \neq \sin x$, to $\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{tg} x = 1$,

$\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{tg} x$,	$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{ctg} x$,	$\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + x) = -\operatorname{tg} x$,
$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + x) = -\operatorname{ctg} x$,	$\operatorname{ctg}(\pi - x) = -\operatorname{ctg} x$,	$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$,
$\operatorname{ctg}(\pi + x) = \operatorname{ctg} x$,	$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$,	$\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2} - x) = \operatorname{tg} x$,
$\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} - x) = \operatorname{ctg} x$,	$\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2} + x) = -\operatorname{tg} x$,	$\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} + x) = -\operatorname{ctg} x$,
$\operatorname{ctg}(2\pi - x) = -\operatorname{ctg} x$,	$\operatorname{tg}(2\pi - x) = -\operatorname{tg} x$,	$\operatorname{ctg}(2\pi + x) = \operatorname{ctg} x$,
$\operatorname{tg}(2\pi + x) = \operatorname{tg} x$,	$\operatorname{tg} 0 = 0$,	$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$,
$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$,	$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$.	

Dowód. Dowód wynika z odpowiednich własności funkcji kosinus i sinus. ■

Wniosek 19.49 (o okresowości kotangensa i tangensa)
Funkcje kotangens i tangens są okresowe, ich wspólnym okresem podstawowym jest π. ■

Twierdzenie 19.50
Jeżeli $\cos x \neq 0$, $\cos y \neq 0$ i $\cos(x+y) \neq 0$, to zachodzi równość

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Jeśli $\sin x \neq 0$, $\sin y \neq 0$ i $\sin(x+y) \neq 0$, to zachodzi równość

$$\operatorname{ctg}(x+y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}.$$

Dowód. $$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} =$$

$$= \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\sin y \cos x}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Drugi wzór dowodzimy w taki sam sposób. Można go też wywnioskować z pierwszego. ■

Wniosek 19.51
$\operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, $\operatorname{ctg}(2x) = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}$ dla każdego x należącego odpowiednio do dziedziny funkcji $\operatorname{tg}(2x)$ lub $\operatorname{ctg}(2x)$. ■

Twierdzenie 19.52 (wzory połówkowe)

$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$,
jeśli tylko x jest taką liczbą rzeczywistą, dla której wypisane we wzorze wyrażenia mają sens. ■

Bardzo prosty dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

Ostatnie twierdzenie jest przydatne w wielu sytuacjach. Wyrażenie wszystkich funkcji trygonometrycznych za pomocą $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ pomaga w rozwiązywaniu równań, w całkowaniu itp.

Twierdzenie 19.53 (o postaci iloczynowej)

Jeśli $\cos x \neq 0 \neq \cos y$, to $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x \cos y}$.

Jeśli $\sin x \neq 0 \neq \sin y$, to $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y\pm x)}{\sin x \sin y}$. ■

Twierdzenie 19.54 (o monotoniczności tangensa i kotangensa)

Funkcja tangens jest ściśle rosnąca na przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, a funkcja kotangens — ściśle malejąca na przedziale $(0, \pi)$.

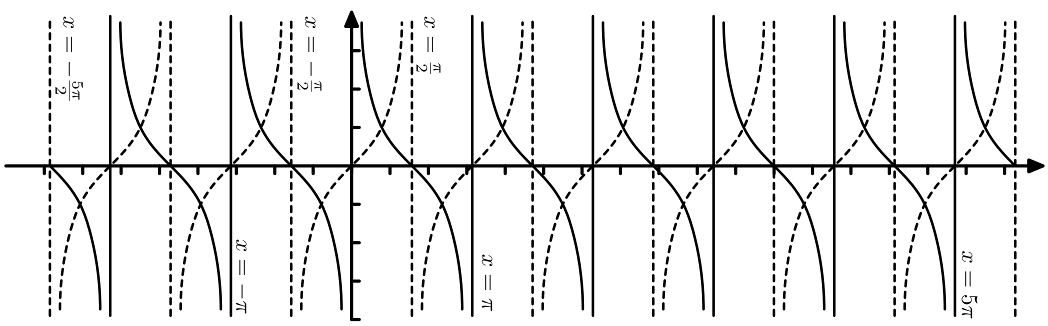
Dowód. Jeśli $-\frac{\pi}{2} < x < y < \frac{\pi}{2}$, to $\sin(y-x) > 0$, $\cos x > 0$ i $\cos y > 0$. Teza wynika więc z wzoru $\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x = \frac{\sin(y-x)}{\cos x \cos y}$. Dowód monotoniczności funkcji kotangens jest taki sam. ■

Twierdzenie 19.55

Każda z funkcji tangens i kotangens jest ciągła w każdym punkcie swej dziedziny. Zachodzą równości $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \infty$,

$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to \pi^-} \operatorname{ctg} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{ctg} x = \infty$.

Dowód. Każdy z tych wzorów wynika natychmiast z odpowiednich własności sinusa i kosinusa. ■



Wykresy funkcji tangens (przerywaną linią) i kotangens (ciągłą linią)

Twierdzenie 19.56 (o wypukłości)
Funkcja tangens jest ściśle wypukła na przedziale $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, a na przedziale $\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$ — ściśle wklęsła.

Dowód. Załóżmy, że $0\leqslant x<y<\frac{\pi}{2}$. Wtedy

$$\tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y)=\frac{\sin(x+y)}{2\cos x\cos y}=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}>$$

$$>\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)+1}=\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{2\cos^2\frac{x+y}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}\,.$$

Ścisła wypukłość na przedziale $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ wynika więc z twierdzenia o wypukłości funkcji ciągłej. Stąd i z wzoru $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x$ wynika ścisła wklęsłość na przedziale $\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$. ■

Wniosek 19.57
Funkcja $\frac{\operatorname{tg}x}{x}$ jest ściśle rosnąca na przedziale otwartym $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. ■

Wniosek 19.58
Jeśli $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, to $x<\operatorname{tg}x$.

Dowód. $\frac{\operatorname{tg}x}{x}>\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\operatorname{tg}t}{t}=1$. ■

Wniosek 19.59
$\pi<2\sqrt{3}$.

Dowód. $\frac{\pi}{6}<\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt3}=\frac{\sqrt3}{3}$. ■

Wzór $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ możemy przepisać w następującej postaci $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\alpha=0$. Mnożąc przez $\operatorname{ctg}\alpha$ otrzymujemy $0=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-1=(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\alpha)^2-\operatorname{ctg}^2\alpha-1$. Stąd $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\operatorname{ctg}\alpha+\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}$, jeśli $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\geqslant0$. Mamy $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt3$, więc można napisać $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=-\sqrt3+\sqrt{3+1}=2-\sqrt3$. Wobec tego $\pi<12(2-\sqrt3)<3{,}22$. Szacować z dołu można przyglądając się wartościom sinusa w pobliżu zera. Np. $\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=$ $=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac12=\frac14(\sqrt6-\sqrt2)$. Stąd wynika, że $\pi>3(\sqrt6-\sqrt2)>3{,}1$. Nie są to bardzo dobre oszacowania, ale lepsze od poprzednich.[19.6] Można je poprawić znajdując $\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}$. Potem można zająć się kątem $\frac{\pi}{48}$ itd. Nie będziemy

[19.6] $3{,}46<2\sqrt3<3{,}47$

ukrywać, że istnieją znacznie skuteczniejsze metody przybliżania liczby π liczbami wymiernymi, ale o tym opowiemy później.

Uwaga 19.60

Jeśli $0 < x < \frac{\pi}{2}$, to $\sin x < x < \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{1-2\sin^2\frac{x}{2}} < \frac{\sin x}{1-\frac{x^2}{2}}$.

Wynika stąd od razu, że $x\big(1-\frac{x^2}{2}\big) < \sin x < x$. Z tej nierówności wnioskujemy, że $0 < x - \sin x < \frac{x^3}{2}$.[19.7] Nierówność ta usprawiedliwia stosowanie wzoru przybliżonego $\sin x \approx x$ używanego w optyce (równania cienkich soczewek i niektórych zwierciadeł), w mechanice (równanie wahadła matematycznego przy małej amplitudzie) itp.

Trzeba podkreślić, że tę przybliżoną równość można stosować jedynie dla ,,dostatecznie małych" x. Mamy $0{,}7071 < \sin\frac{\pi}{4} < 0{,}70711$, $0{,}78539 < \frac{\pi}{4} < 0{,}7854$, zatem $\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} > 0{,}78539 - 0{,}70711 = 0{,}07828 > \frac{0{,}07828}{0{,}7072}\sin\frac{\pi}{4} > 0{,}11\sin\frac{\pi}{4}$. Oznacza to, że w tym przypadku wzór przybliżony daje błąd większy niż 11% wartości sinusa, więc dokładność jest niewielka. Jeśli dla odmiany $0 < x < 0{,}1$, to $0 < x - \sin x < \frac{x^3}{2} = \frac{x^3\sin x}{2\sin x} < \frac{x^3\sin x}{2(x-x^3/2)} = \frac{x^2}{2-x^2}\sin x < \frac{0{,}01}{1{,}99}\sin x < 0{,}0051\sin x$. Tym razem błąd jest mniejszy niż 0,51% wartości sinusa, więc jest znikomo mały. Warto dodać, że 0,1 radiana, to około $5{,}7^\circ$. ■

Udowodnimy twierdzenie gwarantujące istnienie funkcji spełniających warunki nałożone w definicji sinusa i kosinusa, ale nie będziemy używać szeregów. Dowód ma podtekst geometryczny.

Twierdzenie 19.61 (o istnieniu)

Dla każdej liczby dodatniej $p \in \mathbb{R}$ istnieją takie funkcje c, s, że

19.61.1 $c^2(t) + s^2(t) = 1$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$;

19.61.2 $c(t_1+t_2) = c(t_1)c(t_2) - s(t_1)s(t_2)$,
$s(t_1+t_2) = s(t_1)c(t_2) + s(t_1)s(t_2)$ gdy $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$;

19.61.3 funkcje c i s są ciągłe;

19.61.4 funkcje c i s nie są stałe;

19.61.5 $c(t+2p) = c(t)$ i $s(t+2p) = s(t)$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

[19.7] Można udowodnić, że $0<x-\sin x<x^3/6$, ale jest to teraz nieco trudniejsze.

Dowód. Niech $n \geqslant 0$ będzie liczbą całkowitą. Definiujemy zbiór: $P_n = \left\{\frac{kp}{2^n}: \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$. Niech $P = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \ldots$. Oczywiście $P_{n+1} \supset P_n$. Każda liczba $x \in \mathbb{R}$ jest granicą pewnego ciągu (a_n) o wyrazach ze zbioru P, bo jeśli $k_n = \lfloor 2^n \frac{x}{p} \rfloor$ oraz $a_n = \frac{k_n p}{2^n}$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$. Przystąpimy do definiowania.

Zdefiniujemy funkcje c i s w punktach p, $\frac{p}{2}$, $\frac{p}{4}$, ... Następnie w zbiorach P_0, P_1, ... i wreszcie przedłużymy je na zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

Niech $c(p) = -1$, $s(p) = 0$. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już liczby $c\left(\frac{p}{2^n}\right)$ i $s\left(\frac{p}{2^n}\right)$. Definiujemy $c\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{\frac{1+c(\frac{p}{2^n})}{2}}$ oraz $s\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{\frac{1-c(\frac{p}{2^n})}{2}}$. Z definicji wynika od razu, że równość $c^2\left(\frac{p}{2^n}\right) + s^2\left(\frac{p}{2^n}\right) = 1$ zachodzi dla każdego $n = 0, 1, 2, \ldots$. Prawdziwe są wzory $c\left(\frac{p}{2}\right) = 0$, $s\left(\frac{p}{2}\right) = 1$, $c\left(\frac{p}{4}\right) = s\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Zachodzą nierówności $c(p) < c\left(\frac{p}{2}\right) < c\left(\frac{p}{4}\right) < \ldots$ i wreszcie $c\left(\frac{p}{2^n}\right) = 2c^2\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right) - 1$ i $s\left(\frac{p}{2^n}\right) = 2s\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right)c\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right)$.

Przyjmujemy $c\big(kp\big) = (-1)^k$ i $s(kp) = 0$ dla każdej liczby całkowitej k. Dla każdego $t \in P_0$ zachodzi wzór $c^2(t) + s^2(t) = 1$. Jeśli $x, y \in P_0$, to $c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$ i $s(x+y) = {=}s(x)c(y) + s(y)c(x)$ — mamy bowiem $(-1)^{k+m} = (-1)^k(-1)^m$.

Załóżmy, że funkcje c i s zostały już zdefiniowane na zbiorze P_n i to w taki sposób, że spełnione są warunki 19.61.1 i 19.61.2 dla argumentów w zbiorze P_n. Niech $t \in P_{n+1} \setminus P_n$. Istnieje wtedy dokładnie jedna taka liczba $t' \in P_n$, że $t = t' + \frac{p}{2^{n+1}}$. Definujemy

$$c(t) = c(t')c\left(\tfrac{p}{2^{n+1}}\right) - s(t')s\left(\tfrac{p}{2^{n+1}}\right),$$
$$s(t) = s(t')c\left(\tfrac{p}{2^{n+1}}\right) + c(t')s\left(\tfrac{p}{2^{n+1}}\right).$$

Mamy więc $c^2(t) + s^2(t) = \left[c(t')c\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right) - s(t')s\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right)\right]^2 +$ $+\left[s(t')c\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right) + c(t')s\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right)\right]^2 = c^2(t')\left(c^2\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right) + s^2\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right)\right) +$ $+s^2(t')\left(c^2\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right) + s^2\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right)\right) = c^2(t') + s^2(t') = 1$, zatem warunek 19.61.1 jest spełniony dla $t \in P_{n+1}$.

Sprawdzimy teraz, że jeśli $x, y \in P_{n+1}$, to zachodzą równości $c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$ i $s(x+y) = s(x)c(y) + s(y)c(x)$.

Są trzy przypadki: $x,y\in P_n$, $x\in P_n$ i $y\notin P_n$, $x,y\notin P_n$. W pierwszym z nich obie równości zachodzą na mocy założenia indukcyjnego. Zajmiemy się drugim. Niech $y=y'+\frac{p}{2^{n+1}}$. Wtedy

$$c(x+y)=c\big(x+y'+\tfrac{p}{2^{n+1}}\big)=c(x+y')c\big(\tfrac{p}{2^{n+1}}\big)-s(x+y')s\big(\tfrac{p}{2^{n+1}}\big)=$$
$$=c(x)c(y')c\big(\tfrac{p}{2^{n+1}}\big)-s(x)s(y')c\big(\tfrac{p}{2^{n+1}}\big)-$$
$$-s(x)c(y')s\big(\tfrac{p}{2^{n+1}}\big)-s(y')c(x)s\big(\tfrac{p}{2^{n+1}}\big)=$$
$$=c(x)\big[c(y')c\big(\tfrac{p}{2^{n+1}}\big)-s(y')s\big(\tfrac{p}{2^{n+1}}\big)\big]-$$
$$-s(x)\big[s(y')c\big(\tfrac{p}{2^{n+1}}\big)+c(y')s\big(\tfrac{p}{2^{n+1}}\big)\big]=$$
$$=c(x)c\big(y'+\tfrac{p}{2^{n+1}}\big)-s(x)s\big(y'+\tfrac{p}{2^{n+1}}\big)=c(x)c(y)-s(x)s(y)$$

— druga równość wynika z definicji funkcji c na zbiorze P_{n+1}, trzecia z założenia indukcyjnego, czwarta z własności dodawania i mnożenia, piąta z definicji funkcji c,s na zbiorze P_{n+1}. W taki sam sposób sprawdzamy, że wzór $s(x+y)=s(x)c(y)+s(y)c(x)$ jest prawdziwy, gdy $x\in P_n$, $y\in P_{n+1}\setminus P_n$. Wreszcie sprawdzamy, że zachodzą też, gdy $x,y\in P_{n+1}\setminus P_n$.

Zdefiniowaliśmy funkcje c i s na zbiorze P w taki sposób, że spełnione są warunki 19.61.1, 19.61.2 i oczywiście te funkcje nie są stałe. Wykażemy, że są jednostajnie ciągłe na zbiorze P. Dokładniej, udowodnimy, że jeśli $x,y\in P$, to $|c(x)-c(y)|\leqslant\frac{4}{p}|x-y|$ i $|s(x)-s(y)|\leqslant\frac{4}{p}|x-y|$. Najpierw wykażemy, że jeśli $t\in P$, to

$$|s(t)|\leqslant\tfrac{4}{p}|t|\,.$$

Załóżmy, że $n\geqslant 2$. Mamy

$$\frac{s\big(\frac{p}{2^{n+1}}\big)}{c\big(\frac{p}{2^{n+1}}\big)}=\sqrt{\frac{1-c\big(\frac{p}{2^n}\big)}{1+c\big(\frac{p}{2^n}\big)}}=\sqrt{\frac{1-c^2\big(\frac{p}{2^n}\big)}{\big(1+c\big(\frac{p}{2^n}\big)\big)^2}}=\frac{s\big(\frac{p}{2^n}\big)}{1+c\big(\frac{p}{2^n}\big)}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{s\big(\frac{p}{2^n}\big)}{c\big(\frac{p}{2^n}\big)}\,.$$

Stosując tę nierówność $n-1$ razy otrzymujemy

$$\frac{s\big(\frac{p}{2^{n+1}}\big)}{c\big(\frac{p}{2^{n+1}}\big)}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}\,\frac{s\big(\frac{p}{4}\big)}{c\big(\frac{p}{4}\big)}=\frac{1}{2^{n-1}}\,,$$

bo $s\big(\frac{p}{4}\big)=c\big(\frac{p}{4}\big)$. Ponieważ $0<c\big(\frac{p}{2^{n+1}}\big)<1$, więc mamy

$$s\big(\tfrac{p}{2^{n+1}}\big)<\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{4}{p}\cdot\frac{p}{2^{n+1}}\,.$$

Wykazaliśmy, że nierówność $|s(t)|\leqslant\frac{4}{p}\,|t|$ ma miejsce dla każdego t postaci $\frac{p}{2^n}$. Ponieważ $s(-t)=-s(t)$, więc wystarczy dowieść, że $|s(t)| \leqslant \frac{4}{p}t$ dla $t > 0$. Jeśli $k > 0$ jest liczbą całkowitą, to

$$\left|s\left(\tfrac{(k+1)p}{2^n}\right)\right| = \left|s\left(\tfrac{kp}{2^n}\right)c\left(\tfrac{p}{2^n}\right) + c\left(\tfrac{kp}{2^n}\right)s\left(\tfrac{p}{2^n}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|s\left(\tfrac{kp}{2^n}\right)\right| \cdot \left|c\left(\tfrac{p}{2^n}\right)\right| + \left|c\left(\tfrac{kp}{2^n}\right)\right| \cdot \left|s\left(\tfrac{p}{2^n}\right)\right| \leqslant \left|s\left(\tfrac{kp}{2^n}\right)\right| + \left|s\left(\tfrac{p}{2^n}\right)\right|.$$

Z tej nierówności, stosując indukcję względem k, wnioskujemy, że $|s(t)| \leqslant \frac{4}{p}t$ dla każdego t postaci $\frac{kp}{2^n}$, gdzie $k > 0$ jest liczbą całkowitą, więc $|s(t)| \leqslant \frac{4}{p}|t|$ dla $t \in P$.

Z warunków 19.61.1 i 19.61.2 wynikają wzory $c(x) - c(y) = = -2s\left(\frac{x-y}{2}\right)s\left(\frac{x+y}{2}\right)$ i $s(x) - s(y) = 2s\left(\frac{x-y}{2}\right)c\left(\frac{x+y}{2}\right)$ dla $x, y \in P$. Wobec tego $|c(x) - c(y)| \leqslant 2\left|s\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leqslant 2 \cdot \frac{4}{p} \cdot \left|\frac{x-y}{2}\right| = \frac{4}{p}|x-y|$ oraz $|s(x) - s(y)| \leqslant 2\left|s\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leqslant 2 \cdot \frac{4}{p} \cdot \left|\frac{x-y}{2}\right| = \frac{4}{p}|x-y|$.

Funkcje c i s są więc jednostajnie ciągłe w zbiorze P. Zgodnie z twierdzeniem o przedłużaniu funkcji jednostajnie ciągłej każda ma dokładnie jedno przedłużenie ciągłe określone na $\mathbb{R}$.

Jeśli $x \in \mathbb{R}$, to istnieje taki ciąg (t_n), że $t_n \in P$ dla każdej liczby naturalnej n i $x = \lim\limits_{n\to\infty} t_n$. Ponieważ funkcje c i s są ciągłe w punkcie x oraz $c^2(t_n) + s^2(t_n) = 1$, więc

$$c^2(x) + s^2(x) = \lim_{n\to\infty}\left(c^2(t_n) + s^2(t_n)\right) = 1.$$

Oznacza to, że skonstruowane funkcje spełniają warunek 19.61.1 na $\mathbb{R}$. W dokładnie taki sam sposób sprawdzamy, że na $\mathbb{R}$ spełniony jest warunek 19.61.2. Jasne jest więc, że funkcje c, s spełniają warunki 19.61.1, 19.61.2, 19.61.3, 19.61.4. Z wzoru $c(p) = -1$ wynika, że $c(2p) = 2c^2(p) - 1 = 1$, zatem $s(2p) = 0$. Stąd i z warunku 19.61.2 wynika, że $c(x+2p) = c(2p)$ oraz $s(x+2p) = s(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. ■

Uwaga 19.62 Łatwo można wykazać, że skonstruowana funkcja s jest dodatnia na przedziale $(0, p)$. ■

Twierdzenie 19.63 (o istnieniu)
Istnieje para funkcji c, s, które spełniają wszystkie warunki definicji kosinusa i sinusa.

Dowód. Wynika to z poprzedniego twierdzenia i uwagi 19.43: zastępujemy parę c, s taką parą c_a, s_a, że $\lim\limits_{t\to 0}\frac{s_a(t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{s(at)}{t} =$

$=a\lim\limits_{t\to 0}\frac{s(at)}{at}=1$. ■

Twierdzenie 19.64 (o jednoznaczności)
Dla każdej liczby rzeczywistej g istnieje dokładnie jedna para funkcji c, s, które spełniają warunki 19.61.1, 19.61.2 i 19.61.3 oraz $\lim\limits_{x\to 0}\frac{s(x)}{x}=g$.

Dowód. Istnienie uzasadniamy powtarzając dowód poprzedniego twierdzenia.

Załóżmy teraz, że funkcje c, s spełniają warunki 19.61.1, 19.61.2 i 19.61.3 oraz $\lim\limits_{x\to 0}\frac{s(x)}{x}=g$ i że funkcje C, S też te warunki spełniają. Wykażemy, że $c(t)=C(t)$ dla każdego $t\in\mathbb{R}$, równość $s=S$ wyniknie z wzorów redukcyjnych, w których liczbę π zastąpimy połową okresu podstawowego funkcji c. Mamy

$$|c(t)-C(t)|=\left|2c^2\left(\tfrac{t}{2}\right)-1-\left(2C^2\left(\tfrac{t}{2}\right)-1\right)\right|=$$
$$=2\left|c\left(\tfrac{t}{2}\right)-C\left(\tfrac{t}{2}\right)\right|\cdot\left|c\left(\tfrac{t}{2}\right)+C\left(\tfrac{t}{2}\right)\right|\leqslant 4\left|c\left(\tfrac{t}{2}\right)-C\left(\tfrac{t}{2}\right)\right|.$$

Przez indukcję dowodzimy, że

$$|c(t)-C(t)|\leqslant 4^n\left|c\left(\tfrac{t}{2^n}\right)-C\left(\tfrac{t}{2^n}\right)\right|=$$
$$=4^n\cdot 2\left|S\left(\tfrac{t}{2^{n+1}}\right)-s\left(\tfrac{t}{2^{n+1}}\right)\right|\cdot\left|S\left(\tfrac{t}{2^{n+1}}\right)+s\left(\tfrac{t}{2^{n+1}}\right)\right|=$$
$$=\frac{t^2}{2}\left|\frac{S\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)}{\frac{t}{2^{n+1}}}-\frac{s\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)}{\frac{t}{2^{n+1}}}\right|\cdot\left|\frac{S\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)}{\frac{t}{2^{n+1}}}+\frac{s\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)}{\frac{t}{2^{n+1}}}\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{t^2}{2}\ |g-g|\cdot|g+g|=0.$$

Stąd mamy $c(t)=C(t)$ dla każdego $t\in\mathbb{R}$, co kończy dowód. ■

Zadania

1. Dowieść, że $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

2. Dowieść, że $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}=2+\sqrt{3}$.

3. Dowieść, że $\sin\frac{\pi}{24}=\sqrt{\frac{1}{8}(4-\sqrt{2}-\sqrt{6})}$.

4. Dowieść, że $\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}=\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$.

5. Dowieść, że dla każdego $\alpha\in\mathbb{R}$ prawdziwe są oba wzory:

$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\,,\ \cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,.$

6. Niech $x = \sin\frac{\pi}{10}$. Dowieść (bez użycia tablic i sprzętu elektronicznego), że $3x - 4x^3 = 1 - 2x^2$ i znaleźć wszystkie pierwiastki rzeczywiste tego równania. Znaleźć $\sin\frac{\pi}{10}$.

7. Znaleźć wszystkie liczby α, dla których $\sin(3\alpha) = \cos(2\alpha)$.

8. Dowieść, że $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$.

9. Dowieść, że $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$.

10. Dowieść, że $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\cos\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

11. Wykazać, że liczba $\cos\frac{\pi}{9}$ **nie** jest pierwiastkiem żadnego wielomianu kwadratowego o współczynnikach całkowitych.

12. Udowodnić, że jeśli $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, to wszystkie wyrazy ciągu $\big(\cos(2^n\alpha)\big)$ są różne.

13. Wykazać, że jeśli $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, to $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

14. Udowodnić, że jeśli $\cos\alpha = \frac{1}{4}(\sqrt{13}-1)$, to $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

15. Udowodnić, że jeśli $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, to wszystkie wyrazy ciągu $\big(\cos(n\alpha)\big)$ są różne.

16. Rozwiązać: $\cos^2 x + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) + \cos^2(4x) = 2$.

17. Rozwiązać równanie i zilustrować jego rozwiązanie na okręgu jednostkowym:

a. $4\sin x\sin(2x)\sin(3x) = \sin(4x)$; **b.** $2^{\sin^2 x} = \sin x$;

c. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 4$; **d.** $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{4}{\sqrt{3}}$;

e. $\sin(3x) = \cos x$; **f.** $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$;

g. $\log_{\cos x}\sin x + \log_{\sin x}\cos x = 2$; **h.** $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$;

i. $\log_3\left[\operatorname{tg}(\varphi + \frac{\pi}{6})\right] = \frac{1}{2}$; **j.** $2\sin^3 x = 4\cos^2 x$;

k. $2\sin(3x)\sin(2x) = \sin(11x)\sin(10x)$;

l. $\sin x + \cos(nx) = \cos\big((n+1)x\big)$.

18. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{3}{2}, \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

19. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

20. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4}, \\ 3 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y. \end{cases}$

21. Rozwiązać nierówność:

a. $|\cos t| < \frac{1}{2}$**;** **b.** $\sin t > \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$**;**

c. $\sin x + \sqrt{3}\cos x > \sqrt{3}$**;** **d.** $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x > 1 + \operatorname{tg} x$;

e. $\sin^4 x + \cos^4 x > a\,,\ a \in \mathbb{R}$**;** **f.** $\sin(\pi x) > \cos(\pi\sqrt{x})$**;**

g. $|\cos t + \sin t| < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$**;** **h.** $\sin t + \cos t < 1$**;**

i. $2(1+\log_2(\cos\varphi)) > \log_2 3$**;** **j.** $2\cos^4 t - 3\cos^2 t + 1 > 0$;

k. $8\sin^4 t - 10\sin^2 t + 3 > 0$; **l.** $\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t > \frac{4\sqrt{3}}{3}$**.**

22. Dowieść, że jeśli $x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, to zachodzi nierówność:

a. $\sin(x+y+z) < \sin x + \sin y + \sin z$**;**

b. $\alpha - \sin\alpha < \beta - \sin\beta$**;** **c.** $\operatorname{tg}\alpha - \alpha < \operatorname{tg}\beta - \beta$**;**

23. Dowieść, że jeśli $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, to $0 < \alpha+\beta+\gamma < \frac{\pi}{2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha < 1$.

24. Niech $\alpha, \beta, \gamma > 0$ i $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Dowieść, że wtedy:

a. $\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}$**;** **b.** $\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$;

c. $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \geqslant \frac{3}{4}$;

d. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geqslant \sin(2\alpha) + \sin(2\beta) + \sin(2\gamma)$.

Wyjaśnić, kiedy zachodzi równość.

25. Obliczyć:

a. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{9} \cdot \operatorname{tg}\frac{2\pi}{9} \cdot \operatorname{tg}\frac{3\pi}{9} \cdot \operatorname{tg}\frac{4\pi}{9}$; **b.** $-\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9}$;

c. $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$; **d.** $\cos^{16}\frac{\pi}{16} + \cos^{16}\frac{\pi}{16}$.

26. Wykazać, że $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{7}\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{7}\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{7} = 7$.

27. Dowieść, że $\sin\frac{\pi}{18} \cdot \sin\frac{3\pi}{18} \cdot \sin\frac{5\pi}{18} \cdot \sin\frac{7\pi}{18} = \frac{1}{16}$.

28! Wyjaśnić, dla jakich liczb rzeczywistych α, β zachodzi równość $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha + \sin\beta$?

29. Dla jakich liczby $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ liczby $\cos x$ i $\frac{x}{\pi}$ są wymierne?

30. Dowieść, że $\cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(-\alpha+\beta+\gamma) +$
$$+ \cos(\alpha-\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\beta-\gamma) = 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

31. Dowieść, że jeśli $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ i $\frac{\alpha-\pi}{2\pi}, \frac{\beta-\pi}{2\pi}, \frac{\gamma-\pi}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$, to $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1$.

32. Dowieść, że jeśli $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, to $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

33. Dowieść, że jeśli $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, to $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=$ $=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+1=1+\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$, o ile mian. $\neq 0$.

34. Dowieść, że jeśli $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, to $\sin^3\alpha+\sin^3\beta+\sin^3\gamma=$ $=3\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos\frac{3\beta}{2}+\cos\frac{3\gamma}{2}$.

35. Dowieść, że jeśli $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, to $\cos(2\alpha)+\cos(2\beta)+\cos(2\gamma)=-1-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

36. Dowieść, że jeśli $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ i $\frac{2\alpha-\pi}{2\pi},\frac{2\beta-\pi}{2\pi},\frac{2\gamma-\pi}{2\pi}\notin\mathbb{Z}$, to $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

37. Dowieść, że jeśli $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$, to $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}$.

38. Dowieść, że $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi\Rightarrow\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+$ $+\sin^2\delta=2(1+\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta)$.

39. Dowieść, że dla każdych $x\in\mathbb{R}$ i $n\in\mathbb{N}$ zachodzi nierówność $|\cos x|+|\cos(2x)|+|\cos(4x)|+\cdots+|\cos(2^n x)|\geqslant\frac{n}{2}$.

40. Wykazać, że dla każdego $n\in\mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{6\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}.$$

41. Dowieść, że jeśli $\alpha,\beta,\gamma>0$ i $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, to $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma<\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)+\sin\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)$.

42. Rozwiązać równanie $\operatorname{tg}(7x)-\sin(6x)=\cos(4x)-\operatorname{ctg}(7x)$.

43. Niech $m\in\mathbb{N}$, $x,h\in\mathbb{R}$. Zsumować:

a. $\sum_{n=0}^{m}\operatorname{tg}\big((n-1)x\big)\operatorname{tg}(nx)$; **b.** $\sum_{n=0}^{m}\sin(x+nh)$

c. $\sum_{n=0}^{m}\cos(x+nh)$; **d.** $\sum_{n=0}^{m}\sin^2(x+nh)$;

e. $\sum_{n=0}^{m}\cos^2(x+nh)$; **f.** $\sum_{n=0}^{m}\sin^3(x+nh)$;

g. $\sum_{n=0}^{m}\cos^3(x+nh)$; **h.** $\sum_{n=0}^{m}\sin^4(x+nh)$;

i. $\sum_{n=0}^{m}\cos^4(x+nh)$; **j.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}n\sin(x+nh)$;

k. $\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{\sin(2^n x)}$; **l.** $\sum_{n=0}^{m}n\cos(x+nh)$;

44. Dowieść, że jeśli $x\in\mathbb{R}$ i $n\in\mathbb{N}$, to

$$\sin(nx)=\binom{n}{1}\cos^{n-1}x\sin x-\binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^3x+$$
$$+\binom{n}{5}\cos^{n-5}x\sin^5x-\binom{n}{7}\cos^{n-7}x\sin^7x+\cdots.$$

45. Dowieść, że jeśli $x\in\mathbb{R}$ i $n\in\mathbb{N}$, to

$$\cos(nx)=\binom{n}{0}\cos^n x-\binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2x+$$
$$+\binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^4x-\binom{n}{6}\cos^{n-6}x\sin^6x+\cdots.$$

46. Dowieść, że pierwiastkami równania $0 = \binom{2m+1}{1}(1-x)^m - \binom{2m+1}{3}(1-x)^{m-1}x + \binom{2m+1}{5}(1-x)^{m-2}x^2 - \dots + (-1)^m x^m$ są liczby $\sin^2 \frac{\pi}{2m+1}$, $\sin^2 \frac{2\pi}{2m+1}$, ... , $\sin^2 \frac{m\pi}{2m+1}$.

47. Dowieść, że $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sin^2 \frac{n\pi}{2m+1}} = \frac{2m(m+1)}{3}$.

48. Dowieść, że pierwiastkami równania

$$0 = \binom{2m+1}{1}x^m - \binom{2m+1}{3}x^{m-1} + \binom{2m+1}{5}x^{m-2} - \dots + (-1)^m$$

są liczby $\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2m+1}$, $\operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2m+1}$, ... , $\operatorname{ctg}^2 \frac{m\pi}{2m+1}$.

49. Dowieść, że $\sum_{n=1}^{m} \operatorname{ctg}^2 \frac{n\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3}$.

50. Korzystając z nierówności $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ spełnionej dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$ i rezultatów poprzednich zadań udowodnić, że

$$\left(1 - \frac{1}{2m+1}\right)\left(1 - \frac{2}{2m+1}\right)\frac{\pi^2}{6} \leqslant 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{m^2} \leqslant \left(1 - \frac{1}{2m+1}\right)\left(1 + \frac{1}{2m+1}\right)\frac{\pi^2}{6}.$$

Wywnioskować stąd, że $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$.

51. Obliczyć $\sin \frac{\pi}{2m} \cdot \sin \frac{2\pi}{2m} \cdot \sin \frac{3\pi}{2m} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{(m-1)\pi}{2m}$.

52. Obliczyć $\cos \frac{\pi}{2m} \cdot \cos \frac{2\pi}{2m} \cdot \cos \frac{3\pi}{2m} \cdot \ldots \cdot \cos \frac{(m-1)\pi}{2m}$.

53. Obliczyć $\sin \frac{\pi}{2m+1} \cdot \sin \frac{2\pi}{2m+1} \cdot \sin \frac{3\pi}{2m+1} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{m\pi}{2m+1}$.

54. Obliczyć $\cos \frac{\pi}{2m+1} \cdot \cos \frac{2\pi}{2m+1} \cdot \cos \frac{3\pi}{2m+1} \cdot \ldots \cdot \cos \frac{m\pi}{2m+1}$.

55. Dowieść, że jeśli liczby a, b, c są długościami boków trójkąta a α, β, γ — kątami leżącymi naprzeciw kolejnych boków, to zachodzi nierówność $\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c} < \frac{\pi}{2}$.

56. Rozwiązać nierówność

$$\cos x \leqslant \left|\sqrt{1+\sin(2x)} - \sqrt{1-\sin(2x)}\right| \leqslant \sqrt{2}.$$

57. Czy istnieje taka liczba $x \in \mathbb{R}$, że $\frac{1}{3} \leqslant \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{tg} x} \leqslant 3$?

58. Wykazać, że ciąg o wyrazie $\cos^n \frac{2\pi n}{3}$ nie ma granicy i znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^n \frac{2\pi n}{3}$.

59. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos n\pi}{5^{n-1}}$.

60. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(5+\cos n\pi)^n}$.

61. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{(2n+1)\pi}{4}$ jest zbieżny? Jeśli tak, to czy bezwzględnie?

62. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ jest rozbieżny.

63. Czy ciąg $\big(\operatorname{tg} n\big)$ ma granicę?

64. Czy ciąg $\big(\sin^2 n\big)$ ma granicę?

65. Czy ciąg $\big(\sin(n^2)\big)$ ma granicę?

66.* Czy ciąg $\big(\sin(n^k)\big)$ ma granicę dla $k \in \mathbb{N}$?

67.* Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n^2)$ jest zbieżny?

68. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{\pi}{2^n}\big)$

69. Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$.

70. Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/\sin^2 x}$.

71. Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \big(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\big)^{\sin^{-3} x}$.

72. Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 0^+} \big(\cos\sqrt{x}\big)^{1/x}$.

73. Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to\infty} \big(\sin(\ln(x+1)) - \sin(\ln x)\big)$.

74. Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to\infty} \big(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\big)^x$.

75. Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

76. Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

77. Niech L_1 i L_2 będą półprostymi o początku $O = (0,0)$ przechodzącymi odpowiednio przez punkty $(x_1, y_1) \neq (0,0)$ i $(x_2, y_2) \neq (0,0)$. Niech t_1, t_2 będą takimi liczbami, że $(\cos t_1, \sin t_1) \in L_1$, $(\cos t_2, \sin t_2) \in L_2$. Udowodnić, że $\cos(t_2-t_1) = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$ i $\sin(t_2-t_1) = \frac{x_1y_2-y_1x_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

Uwaga 19.65 (o iloczynie skalarnym)

Iloczyn skalarny $x_1x_2 + y_1y_2$ wektorów $\overrightarrow{(x_1, y_1)}$ i $\overrightarrow{(x_2, y_2)}$ jest równy kosinusowi kąta między tymi wektorami, czyli liczby t_2-t_1, pomnożonemu przez iloczyn długości tych wektorów. ■

78. Niech a, b, c będą bokami trójkąta i niech α oznacza kąt leżący naprzeciwko boku a. Dowieść, że $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ oraz $\sin\alpha = \frac{1}{2bc}\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}$.

79. Korzystając z wklęsłości funkcji sinus na przedziale $[0,\pi]$ udowodnić, że spośród n–kątów wpisanych w dany okrąg, największy obwód ma n–kąt foremny.

80. Korzystając z wypukłości funkcji tangens na przedziale $[0,\frac{\pi}{2})$ dowieść, że spośród n–kątów opisanych na danym okręgu, najmniejszy obwód ma n–kąt foremny.

81. Dowieść, że spośród n–kątów wpisanych w dany okrąg, największe pole ma n–kąt foremny.

82. Dowieść, że spośród n–kątów opisanych na danym okręgu, najmniejsze pole ma n–kąt foremny.

83! Dowieść, że kresem górnym obwodów wielokątów wpisanych w okrąg o promieniu $r > 0$ jest liczba $2\pi r$, a kresem górnym ich pól jest liczba πr^2.

84! Dowieść, że kresem dolnym obwodów wielokątów opisanych na okręgu o promieniu $r > 0$ jest liczba $2\pi r$, a kresem dolnym ich pól wielokątów jest liczba πr^2.

85! Dowieść, że jeśli $0 < \beta - \alpha < 2\pi$ i $\sigma \leqslant \alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n \leqslant \beta$, to $\mathrm{L}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) :=$
$= \sqrt{(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0)^2 + (\sin\alpha_1 - \sin\alpha_0)^2} +$
$+ \sqrt{(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)^2 + (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)^2} + \cdots +$
$+ \sqrt{(\cos\alpha_n - \cos\alpha_{n-1})^2 + (\sin\alpha_n - \sin\alpha_{n-1})^2} < \beta - \alpha$ oraz że kresem górnym liczb $\mathrm{L}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest liczba $\beta - \alpha$. *Twierdzenie to oznacza, że kresem górnym długości łamanych wpisanych w łuk* $\text{Ł} = \{(\cos t, \sin t)\colon \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ *jest liczba* $\beta - \alpha$ *i że każda taka łamana ma długość mniejszą niż łuk.*

86. Niech odwzorowanie $F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ będzie izometrią płaszczyzny, tzn. dla każdych dwóch punktów $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ich odległość, tj. liczba $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, jest równa odległości ich obrazów, czyli punktów $F(x_1, y_1)$ i $F(x_2, y_2)$.

(a) Udowodnić, że istnieją wtedy takie liczby $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$, że dla każdego punktu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zachodzi równość

$$F(x, y) = (ax + by + p, cx + dy + q) \,. \tag{A}$$

(b) Udowodnić, że wybór liczb $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$ jest jednoznaczny oraz że

$$a^2 + c^2 = 1 = b^2 + d^2 \text{ i } ab + cd = 0 \tag{B}$$

oraz że jeśli liczby $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$ spełniają warunek (B), to przekształcenie zdefiniowane wzorem (A) jest izometrią. Dowieść, że warunek (B) jest równoważny temu, że

$$a^2 + b^2 = 1 = c^2 + d^2 \text{ i } ac + bd = 0 \,. \tag{B'}$$

Dowieść, że z warunku (B) wynika, że $ad - bc = \pm 1$.

(c) Udowodnić, że F jest przesunięciem wtedy i tylko wtedy, gdy $a = d = 1$ i $b = c = 0$.

(d) Udowodnić, że F jest obrotem wokół punktu O wtedy i tylko wtedy, gdy $a = d$ i $b = -c$ i $p = q = 0$. Dowieść, że istnieje wtedy taka liczba $\alpha \in \mathbb{R}$, że $a = d = \cos\alpha$ i $c = -b = \sin\alpha$ i mamy do czynienia z obrotem o kąt α.

(e) Udowodnić, że F jest symetrią względem prostej przechodzącej przez punkt O wtedy i tylko wtedy, gdy $p = q = 0$ i $a = -d$ oraz $b = c$. Istnieje wtedy taka liczba $\alpha \in \mathbb{R}$, że $a = -d = \cos(2\alpha)$ i $b = c = \sin(2\alpha)$. Dowieść, że oś symetrii ma równanie $x \sin\alpha = y \cos\alpha$.

(f) Dowieść, że jeśli $0 \neq a = d$, $b = -c$ i spełniony jest warunek (B), to przekształcenie F jest obrotem wokół pewnego punktu płaszczyzny.

(g) Dowieść, że jeśli $a = -d = \cos(2\alpha)$, $b = c = \sin(2\alpha)$ i wektor (p, q) jest prostopadły do wektora $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, to przekształcenie F jest symetrią względem pewnej prostej.

(h) Dowieść, że jeśli $a = -d = \cos(2\alpha)$, $b = c = \sin(2\alpha)$ i wektor (p, q) **nie** jest prostopadły do wektora $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, to przekształcenie F jest *symetrią z poślizgiem* względem pewnej prostej, tzn. istnieje prosta ℓ, którą izometria F przekształca na siebie i na której F działa jak przesunięcie.

(i) Dowieść, że jeśli spełniony jest warunek (B) i $ad - bc > 0$, to izometrię F można przedstawić jako złożenie dwu symetrii. Mówimy wtedy, że F jest izometrią parzystą.

(j) Dowieść, że jeśli spełniony jest warunek (B) i $ad - bc < 0$, to izometrię F można przedstawić jako złożenie trzech symetrii. Mówimy wtedy, że F jest izometrią nieparzystą.

(k) Dowieść, że złożenie dwu symetrii parzystych lub dwu nieparzystych jest symetrią parzystą, a złożenie symetrii parzystej i nieparzystej (w dowolnej kolejności) — nieparzystą.

(l) Dowieść, że F jest symetrią parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie funkcje ciągłe
$A\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $B\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $C\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,
$D\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $P\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,
że dla każdego $t \in [0,1]$ funkcja $F_t\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dana wzorem $F_t(x,y) = \big(A(t)x + B(t)y + P(t), C(t)x + D(t)y + Q(t)\big)$ jest izometrią, przy czym $F_0(x,y) = (x,y)$ i $F_1(x,y) = F(x,y)$ dla każdego punktu $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Uwaga: W tym wielopunktowym zadaniu zawarliśmy informacje o izometriach płaszczyzny. W punkcie (l) chodzi o to, że izometrię parzystą można zrealizować jako ruch na płaszczyźnie: $F_t(x,y)$ *to położenie punktu* (x,y) *w momencie* t. *Symetrii względem prostej nie da się tak zrealizować bez ,,wychodzenia z płaszczyzny". To niby oczywiste, ale pokazaliśmy tu, jak można to precyzyjnie powiedzieć.*

CIĄGI I SZEREGI FUNKCYJNE I

W wielu przypadkach mamy do czynienia z ciągami, których wyrazami są w istocie rzeczy funkcje. Opowiemy teraz pokrótce o dwóch najważniejszych rodzajach zbieżności. Rodzajów zbieżności ciągów funkcyjnych jest więcej, ale na razie wystarczy nam problemów z dwoma.

Niech A będzie niepustym zbiorem i niech dla każdej liczby naturalnej n będzie określona funkcja $f_n\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$. Dla każdego $x \in A$ jest więc określony ciąg liczbowy $\big(f_n(x)\big)$. Mówimy wtedy o *ciągu funkcyjnym* (f_n).

Możemy też mówić o szeregu funkcyjnym $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Dla każdego $x \in A$ określony jest wtedy szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Jeśli (f_n) i (g_n) są ciągami funkcyjnymi określonymi na tym samym zbiorze A, $h\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją, to ciągi $(f_n + g_n)$ $(f_n - g_n)$, $(f_n \cdot g_n)$ nazywamy odpowiednio sumą, różnicą i iloczynem ciągów (f_n) i (g_n), ciąg (hf_n) — iloczynem ciągu (f_n) przez funkcję h. Jeżeli dla każdego $x \in A$ i każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $g_n(x) \neq 0$, to możemy określić iloraz $\left(\frac{f_n}{g_n}\right)$ ciągów (f_n) i (g_n).

Podobnie określamy sumę $\sum(f_n + g_n)$ i różnicę $\sum(f_n - g_n)$ szeregów $\sum f_n$ i $\sum g_n$ oraz iloczyn $\sum hf_n$ szeregu $\sum f_n$ przez funkcję h.

Definicja 20.1 (punktowej zbieżności)
Niech (f_n) będzie ciągiem funkcyjnym określonym na zbiorze A i niech $x \in A$. Mówimy, że ciąg (f_n) jest zbieżny w punkcie x, jeśli ciąg liczbowy $f_n(x)$ jest zbieżny. Granicą ciągu (f_n) jest taka funkcja $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, że $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ dla każdego $x \in A$. Funkcję f nazywamy wtedy punktową granicą ciągu (f_n).

Szereg funkcyjny $\sum f_n$ jest zbieżny w punkcie x wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum f_n(x)$ jest zbieżny. Jeżeli dla każdego $x \in A$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny i jego sumą jest liczba $s(x)$, to mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest punktowo zbieżny do sumy s

na zbiorze A. Piszemy wtedy $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, a funkcję $s\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. ■

Jest jasne, że jeśli granica ciągu funkcyjnego istnieje, to tylko jedna.

Przykład 20.1 Niech $f_n(x) = x^n(1-x)$ dla $x \in [0,1]$. Jasne jest, że dla każdego $x \in [0,1]$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Oznacza to, że na przedziale $[0,1]$ ciąg (f_n) jest zbieżny do funkcji zerowej.

Przykład 20.2 Niech $f_n(x) = n!x - \lfloor n!x \rfloor$ dla $x \in \mathbb{R}$. Jasne jest, że jeśli x jest liczbą wymierną, to dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n liczba $n!x$ jest całkowita, zatem zachodzi równość $f_n(x) = 0$. Czytelnik sprawdzi, że $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(e) = 0$. Można bez trudu udowodnić, że $\frac{e}{2} = 1 + \frac{2}{3!} + \frac{3}{5!} + \frac{4}{7!} + \frac{5}{9!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)!}$ i stąd wywnioskować, że $\lim\limits_{n\to\infty} f_{2n-1}\big(\frac{e}{2}\big) = 0$ i jednocześnie $\lim\limits_{n\to\infty} f_{2n}\big(\frac{e}{2}\big) = \frac{1}{2}$. Można również zauważyć, że jeśli $x = a_1 + \frac{1}{2!}a_2 + \frac{1}{3!}a_3 + \cdots$, gdzie $a_j \in \mathbb{Z}$ dla $j = 1,2,\ldots$ przy czym $0 \leqslant a_j \leqslant j-1$ dla $j = 2,3,\ldots$ oraz że nierówność $a_j \leqslant j-1$ jest ostra dla nieskończenie wielu j (por. zad 16.68), to granica $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{n+1}$. Granice te są równe. ■

Przykład 20.3 Niech $x \in [-1,1]$ i niech $f_1(x) = 0$ oraz $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\big(x^2 - f_n^2(x)\big)$. Wykażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = |x|$ dla każdego $x \in [-1,1]$.

Wykażemy najpierw, że $0 \leqslant f_n(x) \leqslant |x|$ i $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ dla każdego $x \in [-1,1]$ i każdego $n = 0,1,2,\ldots$. Zastosujemy indukcję. Dla $n = 0$ nierówności zachodzą: $0 \leqslant f_0(x) = 0 \leqslant |x|$ i $f_0(x) \leqslant f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$. Jeśli są spełnione dla pewnego n, to $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\big(|x| - f_n(x)\big)\big(|x| + f_n(x)\big) \geqslant f_n(x)$, bo na mocy założenia indukcyjnego $|x| + f_n(x) \geqslant |x| - f_n(x) \geqslant 0$. Stąd $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\big(|x| - f_n(x)\big)\big(|x| + f_n(x)\big) \leqslant$

$$\leqslant f_n(x) + \tfrac{1}{2}\big(|x| - f_n(x)\big)\cdot 2|x| \leqslant f_n(x) + |x| - f_n(x) = |x|\,,$$

a to jest teza indukcyjna. Z tego, co udowodniliśmy wynika, że dla każdego $x \in [-1,1]$ ciąg $(f_n(x))$ jest niemalejący i ograniczony: z góry przez $|x|$, z dołu — przez 0. Ma więc granicę.

Niech $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Oczywiście $g(x) \geqslant 0$. Z wzoru $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\big(x^2 - f_n^2(x)\big)$ i twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy wynika, że $g(x) = g(x) + \frac{1}{2}\big(x^2 - g^2(x)\big)$. Stąd wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g(x) = |x|$. Zauważmy jeszcze, że funkcja f_n jest wielomianem zmiennej x (stopnia 2^n). ■

Przykład 20.4 Niech $f_n(x) = \sin(n\pi x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Udowodnimy, że ciąg $(f_n(x))$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy x jest liczbą całkowitą. Jeśli $x \in \mathbb{Z}$, to $f_n(x) = \sin(n\pi x) = 0$. Jeśli $x = \frac{p}{q}$, gdzie $g \geqslant 1$ i p są liczbami całkowitymi. Wtedy ciąg $(f_n(x))$ jest okresowy, jego okresem jest $2q$. Taki ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest stały, a to ma miejsce jedynie wtedy, gdy $q = 1$ (zakładamy, że $\mathrm{nwd}(p,q) = 1$). Jeśli $x \notin \mathbb{Q}$, to każda liczba z przedziału $[0,1]$ jest granicą pewnego podciągu ciągu $\big(nx - \lfloor nx\rfloor\big)$. Stąd, z wzorów redukcyjnych i ciągłości funkcji sinus wynika, że każda liczba z przedziału $[-1,1]$ jest granicą pewnego podciągu ciągu $\big(\sin(n\pi x)\big)$. ■

Na zakończenie zapiszemy, że funkcja f jest granicą punktową ciągu (f_n) za pomocą kwantyfikatorów:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \iff \forall_{x\in A}\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_{x,\varepsilon}}\forall_{n>n_{x,\varepsilon}}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Liczbę $n_{x,\varepsilon}$ dobieramy do x i do ε. Jeśli można ją dobierać do liczby ε niezależnie od x, to mówimy, że ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji f.

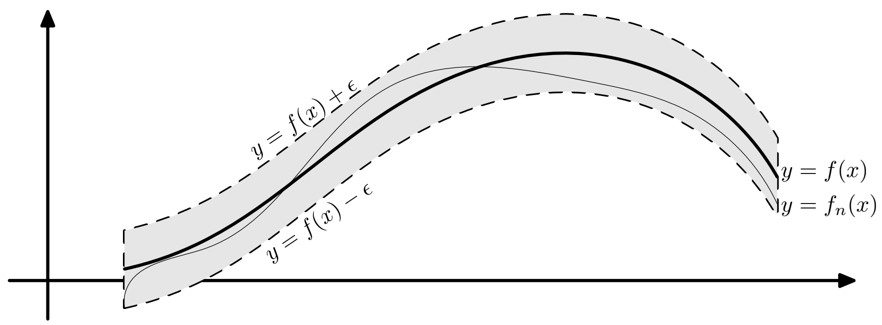
Definicja 20.2 (jednostajnej zbieżności)
Ciąg funkcyjny (f_n) określony na zbiorze A jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_\varepsilon}\forall_{n>n_\varepsilon}\forall_{x\in A}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Mówimy, że szereg funkcyjny $\sum \varphi_n$ jest jednostajnie zbieżny, gdy ciąg jego sum częściowych jest zbieżny jednostajnie. ■

Czasem zamiast pisać, że ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji f piszemy $f_n \rightrightarrows f$ lub $f_n \underset{A}{\rightrightarrows} f$, gdy chcemy podkreślić, że chodzi o zbieżność na zbiorze A. Czytelnik widzi, że definicje zbieżności punktowej i zbieżności jednostajnej różnią się jedynie kolejnością występowania kwantyfikatorów.

Zbieżność jednostajną można zinterpretować geometrycznie: w krzywoliniowym pasie ograniczonym wykresami funkcji $f(x)-\varepsilon$ i $f(x)+\varepsilon$ leżą wykresy prawie wszystkich funkcji $f_1, f_2, \ldots$



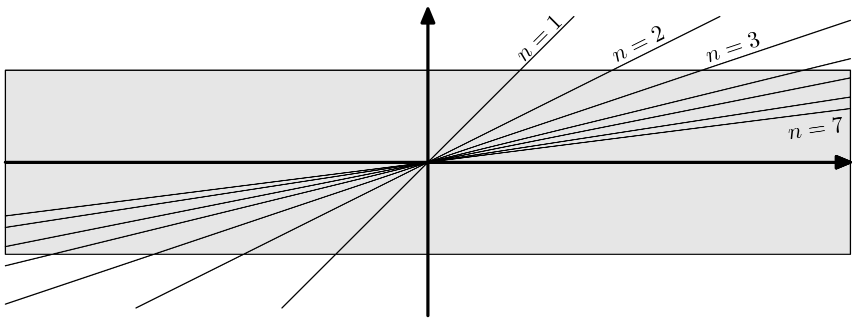
Uwaga 20.3
Jeśli ciąg funkcyjny (f_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji f, to jest też zbieżny punktowo do funkcji f. ■

Wniosek 20.4
Jeśli istnieje taki ciąg liczb dodatnich (ε_n) zbieżny do 0, że dla każdej liczby $x \in A$ spełniona jest nierówność $|f_n(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon_n$, to $f_n \rightrightarrows f$. ■

Uwaga 20.5
Ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji f na zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x)-f(x)|\colon\ x \in A\} = 0$. ■

Przykład 20.5 Ciąg funkcyjny $\left(\frac{x}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ określony na $\mathbb{R}$ jest zbieżny punktowo do funkcji zerowej, ale nie jest zbieżny jednostajnie.

Oczywiście dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$. Ze zbieżności jednostajnej wynikałoby istnienie takiej liczby n_1, że dla każdego $n > n_1$ i każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodziłaby nierówność $\left|f_n(x)-0\right| = \left|\frac{x}{n}\right| < 1$. Dla $x = 2n$ otrzymalibyśmy $2 = \frac{2n}{n} < 1$.



Proste $y = \frac{x}{n}$ dla kolejnych n

Po prostu odchodząc dostatecznie daleko od punktu $x = 0$ punkt na wykresie funkcji $\frac{x}{n}$ znajdzie się w odległości większej od 1 od osi OX, więc wykres funkcji $\frac{x}{n}$ nie zmieści się w pasie ograniczonym prostymi równoległymi do osi OX.

Ciąg $\left(\frac{x}{n}\right)$ jest jednostajnie zbieżny na każdym przedziale postaci $[-r,r]$, $r > 0$, bo jeśli $x \in [-r,r]$. to $\left|\frac{x}{n}\right| \leqslant \frac{r}{n} < \varepsilon$, dla każdego $n > \frac{r}{\varepsilon}$. Wynika stąd, że ciąg $\left(\frac{x}{n}\right)$ jest zbieżny na każdym ograniczonym przedziale $[a,b]$, bo każdy taki przedział jest zawartym w przedziale postaci $[-r,r]$, $r > 0$. ■

Przykład 20.6 Ciąg funkcyjny $\big(x^n(1-x^n)\big)$ jest zbieżny do funkcji zerowej na przedziale $[0,1]$, ale nie jest do niej zbieżny jednostajnie. Zbieżność wynika z nierówności $0 \leqslant x^n(1-x^n) \leqslant x^n$ dla $0 \leqslant x < 1$ oraz tego, że w punkcie 1 wszystkie funkcje tego ciągu zerują się. Ciąg nie jest zbieżny jednostajnie, bo dla $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ i dowolnego naturalnego n, mamy $x^n(1-x^n) = \frac{1}{4}$. ■

Przykład 20.7 Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ jest zbieżny punktowo na przedziale $(-1,1)$ do funkcji $\frac{1}{1-x}$. Zbieżność ta nie jest jednostajna, ale na każdym przedziale **domkniętym** zawartym w $(-1,1)$ zbieżność jest jednostajna.

Mamy $\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{k+1}}{1-x} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{1-x}$, bowiem $\lim\limits_{k\to\infty} x^{k+1} = 0$, gdy $|x| < 1$.

Jeśli $|x| \leqslant c < 1$, to $\left|\frac{x^{k+1}}{1-x}\right| \leqslant \frac{c^{k+1}}{1-c} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, co dowodzi jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego na przedziale $[-c,c]$, a każdy domknięty przedział zawarty w przedziale $(-1,1)$ jest zawarty w pewnym przedziale postaci $[-c,c]$, $c > 0$.

Z jednostajnej zbieżności szeregu na przedziale $(-1,1)$ wynikałoby, że $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\{\frac{x^{k+1}}{1-x}: \quad x\in(-1,1)\} = 0$. Tak jednak nie jest, bo przy ustalonym $k\in\mathbb{N}$ mamy $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{x^{k+1}}{1-x} = \infty$. ■

Uwaga 20.6 W końcówce poprzedniego przykładu można było podstawić np. $x = 1-\frac{1}{2(k+1)}$. Wtedy (nierówność Bernoulliego) $\frac{x^{k+1}}{1-x} = 2(k+1)\big(1-\frac{1}{2(k+1)}\big)^{k+1} \geqslant 2(k+1)\big(1-\frac{1}{2}\big) = k+1$. ■

Podobnie jak w przypadku ciągu liczbowego w badaniu jednostajnej zbieżności ważną rolę pełni

Twierdzenie 20.7 (warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej) Ciąg funkcyjny (f_n) jest jednostajnie zbieżny na zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_\varepsilon}\forall_{m>n_\varepsilon}\forall_{n>n_\varepsilon}\forall_{x\in A}|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon\,.$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ jest jednostajnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_\varepsilon}\forall_{m\in\mathbb{N}}\forall_{n>n_\varepsilon}\forall_{x\in A}|\textstyle\sum_{k=n}^{m} g_k(x)|<\varepsilon\,.$$

Dowód. Jeśli (f_n) jest ciągiem funkcyjnym jednostajnie zbieżnym na zbiorze A do funkcji f i $\varepsilon>0$, to istnieje taka liczba $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$, że jeśli $n>n_\varepsilon$, to $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Jeśli również $m>n_\varepsilon$, to zachodzi nierówność

$$|f_m(x)-f_n(x)| \leqslant |f_m(x)-f(x)|+|f(x)-f_n(x)| < \tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,.$$

Wykazaliśmy, że jednostajnie zbieżny ciąg funkcyjny spełnia warunek Cauchy'ego.

Załóżmy, że ciąg funkcyjny (f_n) spełnia warunek Cauchy'ego. Wtedy dla każdego $x\in A$ ciąg liczbowy $(f_n(x))$ spełnia warunek Cauchy'ego, więc ma granicę skończoną. Niech $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Zdefiniowaliśmy funkcję $f\colon A\longrightarrow\mathbb{R}$. To kandydatka na granicę jednostajną ciągu (f_n). Niech $\varepsilon>0$. Istnieje takie $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$, że

$$\text{jeśli } m,n>n_\varepsilon\text{, to } |f_m(x)-f_n(x)|<\tfrac{5}{6}\varepsilon\,.$$

Wobec tego $|f(x)-f_n(x)| = \lim\limits_{m\to\infty}|f_m(x)-f_n(x)| \leqslant \frac{5}{6}\varepsilon<\varepsilon$, co dowodzi tej części tezy.

Dla szeregów twierdzenie wynika z tego, że ciąg sum częściowych musi spełniać warunek Cauchy'ego dla ciągów. ■

Z tego twierdzenia wynika

Twierdzenie 20.8 (kryterium Weierstrassa zbieżności jednostajnej) Niech $\sum g_n$ będzie szeregiem funkcyjnym określonym na zbiorze A. Jeśli istnieje taki szereg zbieżny $\sum a_n$, że dla każdego $x \in A$ i każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $|g_n(x)| \leqslant a_n$, to szereg $\sum g_n$ jest jednostajnie zbieżny na zbiorze A. Jest też zbieżny bezwzględnie w każdym punkcie zbioru A. ■

Przykład 20.8 Jeśli szereg funkcyjny [20.1] $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny w punkcie $\mathbf{x} \neq 0$ i $0 < r < |x_0|$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie na przedziale $[-r, r]$.

Ciąg $\left(a_n x_0^n\right)$ jest zbieżny do 0, więc jest ograniczony, tzn. istnieje taka liczba $M > 0$, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $\left|a_n x_0^n\right| \leqslant M$. Jeżeli $|x| \leqslant r < |x_0|$, to $\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqslant M \cdot \left|\frac{r}{x_0}\right|^n$, więc jednostajna zbieżność szeregu $\sum a_n x^n$ na przedziale $[-r, r]$ wynika z kryterium Weierstrassa. ■

Twierdzenie 20.9 (o ciągłości granicy)
Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych w punkcie x_0 jest ciągła w punkcie x_0.

Dowód. Niech (f_n) będzie ciągiem jednostajnie zbieżnym do funkcji f na zbiorze A. Niech ε będzie liczbą dodatnią. Mamy

$$|f(x_0) - f(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x)|.$$

Dla każdej dostatecznie dużej liczby naturalnej n, dla wszystkich $x \in A$ zachodzi nierówność $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Niech n będzie dostatecznie dużą liczbą naturalną. Ponieważ funkcja f_n jest ciągła w punkcie x_0, więc istnieje taka liczba $\delta_n > 0$, że jeśli $|x - x_0| < \delta_n$, to $|f_n(x_0) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Stąd i z poprzedniej nierówności otrzymujemy $|f(x_0) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, więc dowód ciągłości funkcji f w punkcie x_0 został zakończony. ■

Przykład 20.9 Ciąg (x^n) jest zbieżny na przedziale $[0, 1]$ do

[20.1] Szeregi, o jakich mówimy w tym przykładzie, nazywane są potęgowymi.

funkcji f, zdefiniowanej wzorami $f(1) = 1$ oraz $f(x) = 0$ dla $x \in [0,1)$. Granica jest nieciągła w punkcie 1, więc zbieżność nie jest jednostajna. ■

Twierdzenie 20.10
Suma jednostajnie zbieżnego szeregu funkcji ciągłych jest ciągła. ■

Wniosek 20.11
Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ jest zbieżny w punkcie $x_0 \neq 0$, to funkcja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest ciągła w każdym punkcie przedziału $(-|x_0|, |x_0|)$

Dowód. Niech $x_1 \in (-|x_0|, |x_0|)$. Niech $r \in (|x_1|, |x_0|)$. Każda z funkcji $a_n x^n$ jest ciągła w punkcie $x_1 \in (-r, r)$, a szereg tych funkcji jest jednostajnie zbieżny na przedziale $[-r, r]$. Stąd wynika teza. ■

Uwaga 20.12 Z dowodu twierdzenia o ciągłości granicy wynika, że jeśli ciąg funkcji **jednostajnie** ciągłych jest jednostajnie zbieżny, to jego granica jednostajnie ciągła. ■

Pokazaliśmy już przykład punktowo zbieżnego ciągu funkcji ciągłych, którego granica ma punkt nieciągłości. Wyjaśnienie jakie funkcje są granicami ciągów punktowo zbieżnych na przedziale jest problemem dosyć złożonym i wykracza poza ramy tej książki. Istnieją funkcje, które granicami punktowo zbieżnych ciągów funkcji ciągłych nie są. Można np. dowieść, że granica punktowo zbieżnego ciągu funkcji ciągłych na pewnym przedziale ma punkty ciągłości, więc np. funkcja Dirichleta, która punktów ciągłości nie ma, nie może być przedstawiona jako granica punktowo zbieżnego ciągu funkcji ciągłych. Funkcje monotoniczne są granicami punktowo zbieżnych ciągów funkcji ciągłych.

Przykład 20.10 Niech $f_n(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \big(\cos(n!\pi x)\big)^{2m}$. Wszystkie funkcje $\big(\cos(n!\pi x)\big)^{2m}$ są ciągłe. Funkcja f_n ma punkty nieciągłości, bo przyjmuje jedynie wartości 0 (np. dla $x = 0$) i 1 (np. dla $x = \sqrt{2}$). Czytelnik sprawdzi, że granicą ciągu (f_n) jest funkcja Dirichleta, która punktów ciągłości nie ma. ■

Zajmiemy się się teraz przybliżaniem funkcji ciągłych prostymi funkcjami. Najpierw udowodnimy, że każda funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji przedziałami liniowych, a później, że jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów.

Zaczniemy od podania definicji.

Definicja 20.13 (funkcji przedziałami liniowej)
Funkcję $L\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy przedziałami liniową wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie punkty

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,,$$

że równość $L(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1})$ zachodzi dla każdego $x \in [x_{i-1}, x_i]$, czyli że na każdym przedziale $[x_{i-1}, x_i]$ funkcja L jest wielomianem stopnia nie większego niż 1, a takie wielomiany często nazywamy funkcjami liniowymi. ■

Z definicji wynika od razu, że funkcja przedziałami liniowa jest ciągła w każdym punkcie przedziału $[a,b]$.

Przykład 20.11 Funkcje $|x|$, $x-17+2|x-\sqrt{7}|$ są przedziałami linowe na każdym przedziale. ■

Można łatwo stwierdzić, że suma funkcji przedziałami liniowych oraz iloczyn funkcji przedziałami liniowej przez liczbę są funkcjami przedziałami liniowymi. Wynika stąd, że każda funkcja postaci $ax + b + a_1|x - x_1| + a_2|x - x_2| + \cdots + a_n|x - x_n|$ jest przedziałami liniowa. Czytelnik zechce wykazać, że każda funkcja przedziałami liniowa na przedziale domkniętym jest tej postaci.

Jeśli $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ są punktami przedziału $[a,b]$ a $y_0, y_1, \ldots, y_n$ — dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to istnieje taka przedziałami liniowa funkcja L, że $L(x_i) = y_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Określamy ją za pomocą wzoru $L(x) = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1})$ dla $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Z tego stwierdzenia wynika, że jeśli $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ są punktami przedziału $[a,b]$, to istnieje taka funkcja przedziałami liniowa L, że $L(x_i) = f(x_i)$ dla $i - 0, 1, \ldots, n$. Pozwala to na przedstawienie dowolnej funkcji ciągłej na przedziale domkniętym jako granicy jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji przedziałami liniowych.

Lemat 20.14 (**o przybliżaniu funkcjami przedziałami liniowymi**) Jeśli $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to istnieje ciąg (L_n) funkcji przedziałami liniowych jednostajnie zbieżny do funkcji f.

Dowód. Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ i dowolnej liczby $i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ zdefiniujemy $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$. Zdefiniowane właśnie punkty dzielą przedział $[a,b]$ na n równych przedziałów. Niech $f_n(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1})$ dla $i = 1,2,\ldots,n$. Wykażemy, że $f_n \rightrightarrows f$ na przedziale $[a,b]$. Niech ε będzie liczbą dodatnią. Funkcja f jest ciągła na domkniętym przedziale, więc jest też jednostajnie ciągła. Istnieje więc taka liczba $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, że jeśli $n > n_\varepsilon$ i $|x' - x''| < \frac{b-a}{n}$ oraz $x', x'' \in a, b$, to zachodzi nierówność $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Wykażemy, że $|L_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Załóżmy, że $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$. Niech $t = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}$. Mamy wtedy $x = t x_{i-1} + (1-t)x_i$. Ponieważ funkcja L_n jest liniowa na przedziale $[x_{i-1}, x_i]$, więc

$$L_n(x) = tL_n(x_{i-1}) + (1-t)L_n(x_i) = tf(x_{i-1}) + (1-t)f(x_i).$$

Mamy też $f(x) = tf(x) + (1-t)f(x)$. Wobec tego

$$|L_n(x) - f(x)| = \big|t\big(f(x_{i-1}) - f(x)\big) + (1-t)\big(f(x_i) - f(x)\big)\big| \leqslant$$
$$\leqslant t\big|f(x_{i-1}) - f(x)\big| + (1-t)\big|f(x_i) - f(x)\big| < t\varepsilon + (1-t)\varepsilon = \varepsilon,$$

bo $|x - x_{i-1}| \leqslant \frac{b-a}{n}$ i $|x - x_i| \leqslant \frac{b-a}{n}$. Otrzymana nierówność kończy dowód jednostajnej zbieżności ciągu (L_n) do funkcji f. ■

W praktyce często wykonywane są przybliżone wykresy bardzo złożonych funkcji. Najprostsza metoda to: znajdujemy pewną liczbę punktów na wykresie i łączymy je odcinkami prostych (we właściwej kolejności). Powstała łamana przybliża poszukiwany wykres, jeśli mamy do czynienia z funkcją ciągłą. Przybliżenie jest tym dokładniejsze im ,,gęściej" wybierzemy punkty na wykresie — wynika to z dowodu twierdzenia o przybliżaniu funkcjami przedziałami liniowymi.

Można zastąpić funkcje przedziałami liniowe innymi, np. wielomianami. Jeśli $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$ i $y_0, y_1, \ldots, y_n$ są liczbami rzeczywistymi, to istnieje dokładnie jeden taki wielomian w_n stopnia nie większego niż n, że $y_i = w_n(x_i)$ dla każdego $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Nazywany jest n–tym wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a. Czytelnik bez trudu stwierdzi, że może on być zdefiniowany wzorem:

$$w_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \tfrac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1}\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}\ldots(x_i-x_n)}\,.$$

Dowód jednoznaczności tego wielomianu to całkiem dobre ćwiczenie. Jeśli chcemy przybliżać funkcję ciągłą, to wybieramy punkty $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$ w dziedzinie funkcji i przyjmujemy $y_i = f(x_i)$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$.

Niestety istnieją funkcje ciągłe, dla których ciąg wielomianów Lagrange'a nie jest zbieżny do przybliżanej funkcji, choć przy dostatecznie silnych założeniach o funkcji przybliżanej takich kłopotów już nie ma. Pokażemy niebawem, że każda funkcja ciągła na przedziale **domkniętym** jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów. Takie ciągi można określać wieloma sposobami. Pokażemy dwa.

Lemat 20.15
Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji ciągłych na przedziale $[a, b]$ jednostajnie zbieżnym do funkcji $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Załóżmy, że dla każdego n dany jest ciąg $(f_{n,k})_{k=1}^{\infty}$ funkcji ciągłych na przedziale $[a, b]$ jednostajnie zbieżny do funkcji f_n. Istnieje wtedy taki rosnący ciąg (k_n), że ciąg funkcyjny $(f_{n,k_n})_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji f.

Dowód. Niech $a_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|\colon \quad x \in [a, b]\}$ oraz $a_{n,k} = \sup\{|f_{n,k}(x) - f_n(x)|\colon \quad x \in [a, b]\}$. Z założeń o ciągach (f_n) i $(f_{n,k})$ wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ i $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n,k} = 0$ dla każdej liczby naturalnej n. Wynika stąd, że istnieje taki rosnący ciąg liczb naturalnych k_n, że $a_{n,k_n} < \frac{1}{n}$. Dla każdego $x \in [a, b]$ zachodzi nierówność

$$|f_{n,k_n}(x) - f(x)| \leqslant |f_{n,k}(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_{n,k_n} + a_n\,.$$

Stąd $\sup\{|f_{n,k_n}(x) - f(x)|\colon \quad x \in [a, b]\} \leqslant a_{n,k_n} + a_n < \frac{1}{n} + a_n$. Z otrzymanej nierówności teza wynika od razu. ■

Lemat 20.16
Istnieje ciąg $(w_n)_{n=0}^{\infty}$ wielomianów jednostajnie zbieżny na przedziale $[-1,1]$ do funkcji $|x|$.

Dowód. Niech $w_0(x) = 0$, $w_{n+1} = w_n(x) + \frac{1}{2}\big(x^2 - w_n^2(x)\big)$. Udowodniliśmy poprzednio (przykład 20.3), że ten ciąg jest niemalejący i zbieżny punktowo na przedziale $[-1,1]$ do funkcji $|x|$. Teraz wykażemy, że zbieżność ta jest jednostajna, czyli że

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_\varepsilon}\forall_{n>n_\varepsilon}\forall_{x\in[-1,1]}\, |x| - w_n(x) < \varepsilon\,.$$

Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy istnieje taki rosnący ciąg liczb naturalnych (n_k) i taki ciąg (x_{n_k}) liczb z przedziału $[-1,1]$, że $|x_{n_k}| - w_{n_k}(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon$. Zastępując w razie potrzeby ciąg (x_{n_k}) jego podciągiem możemy założyć, że istnieje granica $g = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Oczywiście $-1 \leqslant g \leqslant 1$. Ponieważ dla każdego $x \in [-1,1]$ ciąg $\big(w_n(x)\big)$ jest niemalejący, więc jeżeli $k < \ell$, to

$$w_{n_k}(x_{n_\ell}) \leqslant w_{n_\ell}(x_{n_\ell})\,.$$

Stąd wynika, że jeśli $k < \ell$, to

$$|x_{n_\ell}| - w_{n_k}(x_{n_\ell}) \geqslant |x_{n_\ell}| - w_{n_\ell}(x_{n_\ell}) \geqslant \varepsilon\,,$$

zatem $|x_{n_\ell}| - w_{n_k}(x_{n_\ell}) \geqslant \varepsilon$ Z ciągłości funkcji w_{n_k} wynika, że zachodzi nierówność $|g| - w_{n_k}(g) \geqslant \varepsilon$. Ta nierówność przeczy temu, że $\lim\limits_{k\to n_k} w_{n_k}(g) = |g|$. Lemat został udowodniony. ■

Uwaga 20.17
Powtarzając dowód lematu w nieco ogólniejszej wersji można udowodnić, że: jeśli ciąg (f_n) funkcji ciągłych na przedziale domkniętym $[a,b]$ jest w każdym punkcie tego przedziału niemalejący lub nierosnący i punktowo zbieżny do funkcji ciągłej, to zbieżność jest jednostajna. ■

Czytelnik z łatwością zauważy, że funkcję $|x|$ można przybliżać jednostajnie na dowolnym przedziale domkniętym. Stąd wynika, że każdą funkcję postaci

$$ax + b + a_1|x - x_1| + a_2|x - x_2| + \cdots + a_n|x - x_n|$$

można przedstawić jako granicę jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów. Z tego stwierdzenia, z lematu o przybliżaniu funkcjami przedziałami liniowymi i z lematu 20.15 wynika

Twierdzenie 20.18 (Weierstrassa o aproksymacji)
Każda funkcja ciągła określona na przedziale domkniętym jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów. ■

Dowód został tak przeprowadzony, że dosyć trudno z niego uzyskać konkretny ciąg wielomianów jednostajnie zbieżny do danej funkcji. Prosty sposób został podany przez N.S.Bernsteina.

Twierdzenie 20.19 (Bernsteina)
Niech $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i niech dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby rzeczywistej $x \in [0,1]$ spełniona będzie równość

$$b_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\tfrac{i}{n}\right)\tbinom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}\,.$$

Wtedy b_n jest wielomianem [20.2] stopnia nie większego niż n i ciąg (b_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji f.

Dowód. Wykażemy, że jeśli liczba n jest dostatecznie duża, to przyjęcie $w(t) = b_n(t)$ powoduje, że dla każdego $t \in [0,1]$ zachodzi nierówność $|f(t) - w(t)| = |f(t) - b_n(t)| < \varepsilon$.

Zaczniemy od trzech pomocniczych równości i nierówności.

$$\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = 1 \tag{W1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\tbinom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = nt \tag{W2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} t^k k^2 (1-t)^{n-k} = n(n-1)t^2 + nt \tag{W3}$$

$$\forall_{\delta>0} \sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|\geqslant\delta} \tbinom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leqslant \tfrac{1}{n}\cdot\tfrac{t(1-t)}{\delta^2} \leqslant \tfrac{1}{4n\delta^2} \tag{W4}$$

Równość (W1) zachodzi, bo $1 = \big(t + (1-t)\big)^n = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$.
Równość (W2) podobnie:

$$\sum_{k=0}^{n} k\tbinom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = nt\sum_{k=1}^{n} \tbinom{n-1}{k-1} t^{k-1} (1-t)^{n-1-(k-1)} =$$

$$= nt\sum_{k=0}^{n-1} \tbinom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-1-k} = nt\big(t + (1-t)\big)^{n-1} = nt\,.$$

Kolej na (W3).

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\tbinom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\tbinom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} +$$

[20.2] zwany n–tym wielomianem Bernsteina funkcji f.

$$+\sum_{k=1}^{n}k\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}=$$

$$=n(n-1)t^2\sum_{k=2}^{n}\tbinom{n-2}{k-2}t^{k-2}(1-t)^{n-2-(k-2)}+nt=$$

$$=n(n-1)t^2\sum_{k=0}^{n-2}\tbinom{n-2}{k}t^{k}(1-t)^{n-2-k}+nt=$$

$$=n(n-1)t^2\big(t+(1-t)\big)^{n-2}+nt=n(n-1)t^2+nt\,.$$

Teraz kolej na najważniejsze z tych czterech stwierdzeń, zwane nierównością Czebyszewa (w przypadku ogólniejszym, na omówienie którego tu nie ma miejsca).

$$n^2\delta^2\sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|\geqslant\delta}\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\leqslant\sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|\geqslant\delta}\big(k-nt\big)^2\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}<$$

$$<\sum_{k=0}^{n}\big(k-nt\big)^2\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}k^2\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}-$$

$$-2\sum_{k=0}^{n}knt\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\big(nt\big)^2\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}=$$

$$=n(n-1)t^2+nt-2n^2t^2+n^2t^2=nt-nt^2=nt(1-t)$$

Z otrzymanej nierówności łatwo wynika, że

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|\geqslant\delta}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\leqslant\frac{nt(1-t)}{n^2\delta^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{t(1-t)}{\delta^2}\leqslant\frac{1}{4n\delta^2}\,.$$

Jesteśmy gotowi do dowodu. Ponieważ f jest ciągła na przedziale *domkniętym*, więc istnieje taka liczba $\delta>0$, że z nierówności $|t-s|<\delta$ wynika $|f(t)-f(s)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Istnieje też taka liczba $M>0$, że $|f(t)|\leqslant M$ dla każdego $t\in[0,1]$. Dzięki (W1) mamy:

$$\big|f(t)-b_n(t)\big|=\left|f(t)-\sum_{k=0}^{n}f\big(\tfrac{k}{n}\big)\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{n}\Big(f(t)-f\big(\tfrac{k}{n}\big)\Big)\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|<\delta}\big|f(t)-f\big(\tfrac{k}{n}\big)\big|\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}+$$

$$+\sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|\geqslant\delta}\left|f(t)-f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right|\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|<\delta}\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}+2M\sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|\geqslant\delta}\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\leqslant$$

$$\leqslant\tfrac{\varepsilon}{2}+2M\tfrac{1}{4n\delta^2}=\tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{M}{2n\delta^2}$$

Jeśli $n>\frac{M}{\varepsilon\delta^2}$, to $\left|f(t)-b_n(t)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Dowód został zakończony. ■

Uwaga 20.20 (krótki komentarz probabilistyczny.)

Załóżmy, że w Nibylandii (pozdrowienia od Piotrusia Pana) wyprodukowano monetę niecałkiem symetryczną: rzucając nią otrzymujemy reszkę z prawdopodobieństwem t, a drugą stronę — z mało czytelną podobizną jakiegoś fruwającego stworzenia — z prawdopodobieństwem $1-t$. Prawdopodobieństwo uzyskania w n rzutach tą monetą dokładnie k–reszek równe jest $\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}$. Wobec tego liczba $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}=nt$ oznacza średnią liczbę reszek otrzymanych w k rzutach tą monetą. Oczekujemy więc, że rzucając tą monetą n razy otrzymamy nt, a raczej około nt, reszek. Wzór (W4) wyjaśnia, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że liczba rzutów (k), w których wypadła reszka, będzie różnić się od liczby oczekiwanej (nt) o pewien ustalony procent liczby rzutów lub jeszcze bardziej. Dlatego zajmujemy się tam różnicą $\left|\frac{k}{n}-t\right|$ ($\left|\frac{k}{n}-t\right|\geqslant\delta\Leftrightarrow|k-nt|\geqslant\delta n$, ta ustalona część liczby n to δn). Prawdopodobieństwo to dąży do 0 — jest to tzw. słabe prawo wielkich liczb. Liczba $b_n(t)$ jest więc średnią liczb $f\left(\frac{k}{n}\right)$, ta średnia jest mniej więcej równa $f(t)$, bo na ogół $\frac{k}{n}\approx t$. Powinna więc mieć miejsce następująca równość przybliżona $f(t)\approx b_n(t)$. Końcówka nie jest całkiem precyzyjna, ale wcześniej staraliśmy się wyjaśnić dokładnie, o co chodzi. ■

Uwaga 20.21

Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$, to ciąg (w_n) wielomianów określonych wzorem $w_n(t)=b_n\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$, gdzie b_n oznacza

n–ty wielomian Bernsteina funkcji φ, którą definiujemy wzorem $\varphi(t) = f\big(a + t(b-a)\big)$, jest jednostajnie zbieżny do funkcji f. ■

Dodajmy jeszcze, że na ogół n–ty wielomian Bernsteina funkcji f nie pokrywa się z jej n–tym wielomianem Lagrange'a.

Uwaga 20.22
Ponieważ każdy wielomian może być przybliżany jednostajnie na przedziale domkniętym wielomianami o współczynnikach wymiernych, więc każda funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów o współczynnikach wymiernych. ■

Efektywne przybliżenia wielomianami licznych funkcji można uzyskać przedstawiając je w postaci sum szeregów.

Przykład 20.12 $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \in (-1,1)$. Korzystając z twierdzenia udowodnionego w przykładzie 20.8 stwierdzamy, że ciąg (w_n) określony wzorem $w_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $\frac{1}{1-x}$ na każdym przedziale o środku w punkcie 0, którego długość jest mniejsza (ostro!) niż 2. ■

Przykład 20.13 Jak wiadomo $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wobec tego ciąg (w_n) wielomianów zdefiniowany wzorem $w_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji e^x na każdym przedziale domkniętym. ■

Przykład 20.14 Jak wiadomo $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ i $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Udowodniliśmy to w rozdziale poświęconym trygonometrii. Wobec tego zbieżność ta jest jednostajna na każdym przedziale domkniętym. Pozwala to na efektywne znajdowanie przybliżonych wartości kosinusa i sinusa. Jeśli np. $|x| \leqslant 1$, to

$$\Big|\cos x - \big(1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!}\big)\Big| \leqslant \tfrac{x^8}{8!} \leqslant \tfrac{1}{8!} = \tfrac{1}{40320}\,,$$

a przypominamy, że 1 radian to $\frac{180}{\pi}^\circ \approx 57{,}3^\circ$, więc stosunkowo niewielkim nakładem pracy uzyskujemy dosyć dobre przybliżenie. Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że im bliżej zera znajduje się liczba x, tym mniejszy jest błąd względny. Gdy np. $x=\frac{\pi}{6}<\frac{3{,}2}{6}=\frac{1{,}6}{3}$, to błąd jest mniejszy niż $\left(\frac{1{,}6}{3}\right)^8\cdot\frac{1}{40320}=\left(\frac{2{,}56}{9}\right)^4\cdot\frac{1}{40320}<$ $<(0{,}3)^4\cdot\frac{1}{40320}=\frac{9}{44\,800\,000}<\frac{9}{44\,100\,000}=\frac{1}{4\,900\,000}$, co nie jest złą dokładnością w przypadku liczby $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ■

Przykład 20.15 Wykażemy, że jeśli $x\in(-1,1]$, to $\ln(1+x)=$ $=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$. Skorzystamy z tego, że $\lim\limits_{h\to0}\frac{a^h-1}{h}=\ln a$ (zob. przykład 18.6). Mamy więc $\lim\limits_{k\to\infty}k\bigl(\sqrt[k]{1+x}-1\bigr)=\ln(1+x)$ dla każdej liczby $x>-1$. Wiemy też, że dla każdego $x\in(-1,1)$ i dowolnych $a,b\in\mathbb{R}$ zachodzi równość

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{b}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a+b}{n}x^n.$$

Z tej równości wynika, że $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a/2}{n}x^n\right)^2\geqslant0$ dla każdego $a\in\mathbb{R}$. Stąd i ze wspomnianej równości wynika, że: $\sqrt[k]{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/k}{n}x^n$. Z tego wzoru wynika, że dla każdego $x\in(-1,1)$ i dowolnych $k,n\in\mathbb{N}$ zachodzą nierówności

$$\begin{aligned}
&\bigl|k\bigl(\sqrt[k]{1+x}-1\bigr)-\\
&\quad-\bigl[x+(\tfrac{1}{k}-1)\tfrac{x^2}{2!}+\cdots+(\tfrac{1}{k}-1)(\tfrac{1}{k}-2)\ldots(\tfrac{1}{k}-n+1)\tfrac{x^n}{n!}\bigr]\bigr|\leqslant\\
&\leqslant\bigl|(\tfrac{1}{k}-1)(\tfrac{1}{k}-2)\ldots(\tfrac{1}{k}-n)\tfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\\
&\qquad\qquad+(\tfrac{1}{k}-1)(\tfrac{1}{k}-2)\ldots(\tfrac{1}{k}-n-1)\tfrac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\\
&\qquad\qquad\qquad+(\tfrac{1}{k}-1)(\tfrac{1}{k}-2)\ldots(\tfrac{1}{k}-n-2)\tfrac{x^{n+3}}{(n+3)!}+\cdots\bigr|\leqslant\\
&\leqslant\tfrac{|x|^{n+1}}{n+1}+\tfrac{|x|^{n+2}}{n+2}+\tfrac{|x|^{n+3}}{n+3}+\cdots=\tfrac{1}{n+1}\bigl(|x|^{n+1}|x|^{n+2}+|x|^{n+3}+\cdots\bigr)=\\
&=\tfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1-|x|)}<\tfrac{1}{(n+1)(1-|x|)}.
\end{aligned}$$

Przechodząc do granicy przy $k\longrightarrow\infty$ otrzymujemy nierówność $\bigl|\ln(1+x)-\bigl(x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\bigr)\bigr|\leqslant\frac{1}{(n+1)(1-|x|)}$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)(1-|x|)}=0$, więc

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots.$$

Udowodniliśmy więc równość, którą chcieliśmy wykazać. Z twierdzenia wykazanego w przykładzie 20.8 wynika, że na każdym przedziale domkniętym zawartym w przedziale $(-1,1)$ ta zbieżność jest jednostajna. Załóżmy, że $0 \leqslant x \leqslant 1$. Zachodzą wtedy nierówności $x \geqslant \frac{x^2}{2} \geqslant \frac{x^3}{3} \geqslant \ldots$. Z nich wynika, że $x - \frac{x^2}{2} \leqslant$ $\leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \leqslant \ldots$ oraz $x \geqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \geqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \geqslant \ldots$.

Niech $s_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$. Wiemy, że ciąg $\big(s_{2n}(x)\big)$ jest niemalejący, a ciąg $\big(s_{2n-1}(x)\big)$ — nierosnący, więc oba mają granice i $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}(x) > -\infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n-1}(x) < \infty$. Stąd i z nierówności $|s_n(x) - s_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$ wynika, że te granice są równe, więc w szczególności skończone. Niech $s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$. Mamy $s_{2n}(x) \leqslant s(x) \leqslant s_{2n-1}(x)$ dla $n \in \mathbb{N}$, a stąd $0 \leqslant s(x) - s_{2n}(x) \leqslant s_{2n-1}(x) - s_{2n}(x) \leqslant \frac{1}{2n}$ i analogicznie $0 \leqslant s_{2n-1}(x) - s(x) \leqslant s_{2n-1}(x) - s_{2n}(x) \leqslant \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1}$. Możemy więc napisać, że $|s(x) - s_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}$ dla każdego $x \in [0,1]$, więc szereg jest jednostajnie zbieżny na przedziale domkniętym $[0,1]$ do funkcji $s(x)$, która jako suma jednostajnie zbieżnego szeregu funkcji ciągłych jest ciągła. Dla $x \in [0,1)$ zachodzi równość $s(x) = \ln(1+x)$. Funkcja $s(x)$ jest ciągła (lewostronnie) w punkcie 1. Również funkcja $\ln(1+x)$ jest ciągła w punkcie 1. Mamy więc $\ln 2 = \lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \lim\limits_{x\to 1^-} s(x) = s(1)$. Udowodniliśmy więc, że $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ ■

W podobny sposób można udowodnić wiele innych wzorów. znane są ogólniejsze metody postępowania. Z niektórymi z nich zapoznamy się w dalszych częściach tej książki. Okaże się, że wzór $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots$ można wyprowadzić prościej.

Zadania

1. Dowieść, że $\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4} + \cdots$.

2. Czy szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ jest zbieżny?

3. Dowieść, że jeśli $n \in \mathbb{N}$, to zachodzi wzór $\ln(n+1) - \ln n = \frac{2}{2n+1}\Big(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{7}\frac{1}{(2n+1)^6} + \cdots\Big)$.

4. Korzystając z wzoru z poprzedniego zadania obliczyć $\ln 2$ i $\ln 5$ z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku.

5. Dowieść, że jeśli $0 < x < \pi$, to $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

6. Niech $a_1 = \sin 1$ i $a_{n+1} = \sin a_n$ dla $n = 1, 2, \dots$. Dowieść, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a następnie, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot a_n = \sqrt{3}$.

7. Dowieść, że jeśli ciąg wielomianów (w_n) jest jednostajnie zbieżny na przedziale domkniętym do funkcji w i istnieje taka liczba M, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $\operatorname{st} w_n \leqslant M$, to funkcja w jest wielomianem, którego stopień nie przekracza M.

8. Niech $\alpha < 0$. Dla jakich liczb rzeczywistych t szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \cos(2\pi n t)$ jest zbieżny? Na jakich zbiorach zbieżność jest jednostajna?

9. Czy ciąg $nx(1-x)^n$ jest jednostajnie zbieżny na $[0,1]$?

10. Czy ciąg $\sqrt[n]{1+x^n}$ jest jednostajnie zbieżny na $[0,\infty)$?

11. Czy ciąg $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$?

12. Czy ciąg $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ jest jednostajnie zbieżny na $[a,b]$?

13. Czy szereg $\sum \frac{1}{1+(x-n)^2}$ jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$?

14. Czy szereg $\sum \frac{x^2}{n^4+x^4}$ jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$?

15. Czy szereg $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ jest jednostajnie zbieżny na $[0,\infty)$?

16! Dowieść, że każda funkcja przedziałami liniowa jest postaci $ax + b + a_1|x-x_1| + a_2|x-x_2| + \dots + a_n|x-x_n|$.

17. Dowieść, że jeśli funkcja f jest granicą punktowo zbieżnego ciągu funkcji ciągłych na przedziale domkniętym, to jest też granicą punktowo zbieżnego ciągu wielomianów na tym przedziale.

18! Dowieść, że szereg funkcyjny

$$x(1-x) - x(1-x) + x^2(1-x) - x^2(1-x) + \\ + x^3(1-x) - x^3(1-x) + \cdots$$

jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie na przedziale $[0,1]$. Zmienić kolejność wyrazów tego szeregu tak, by nowy szereg nie był zbieżny jednostajnie na $[0,1]$.

19! Niech (f_n) będzie ciągiem ciągiem funkcyjnym określonym na przedziale $[a,b]$. Udowodnić, że jest on jednostajnie zbieżny do funkcji ciągłej $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy z równości $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

20. Wykazać, że granica ciągu wielomianów jednostajnie zbieżnego na *całej prostej* jest wielomianem.

21. Wykazać, że jeśli ciąg funkcji monotonicznych jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej na przedziale domkniętym, to jest zbieżny jednostajnie.

22. Wykazać, że jeśli dla każdego $x \in [a,b]$ ciąg $(f_n(x))$ jest monotoniczny i $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, funkcje f, f_1, f_2, ... są ciągłe, to ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[a,b]$ do funkcji f.

23. Podać przykład ciągu (f_n) funkcji ciągłych zbieżnego punktowo do funkcji ciągłej f na przedziale $[0,1]$, który nie jest zbieżny jednostajnie na żadnym podprzedziale domkniętym przedziału $[a,b]$.

24. Podać przykład ciągu (f_n) funkcji ciągłych na przedziale $[0,1]$ takiego, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie na przedziale $[0,1]$ i jednocześnie zachodzi równość $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f_n(x)| = +\infty$.

25. Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2-n^2}$ dla każdego $x \notin \mathbb{Z}$. Wykazać, że funkcja f jest ciągła na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

26. Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x}e^{-n^2x}$ dla $x \geqslant 0$. W jakich punktach funkcja f jest ciągła?

27. Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}$. Wykazać, że funkcja f jest ciągła na $\mathbb{R}$ i wyjaśnić, czy jest okresowa.

28. Udowodnić, że szereg nieujemnych funkcji ciągłych zbieżny punktowo do funkcji ciągłej jest zbieżny jednostajnie.

29. Dowieść, że jeśli $|x| < 1$, to dla każdej liczby rzeczywistej a zachodzi równość $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$.

30. Dowieść, że jeśli $0 < a < 1$, to dla dowolnych liczb dodatnich x, y spełniona jest nierówność $(x+y)^a < x^a + y^a$.

31. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x^2e^{-n^2x}$ dla $x \geqslant 0$ jest jednostajnie zbieżny na zbiorze wszystkich liczb nieujemnych.

32. Dowieść, że dla każdej liczby $a \in (0,1)$ następujące równanie $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = ae^x$ ma dodatni pierwiastek.

33. Obliczyć $\lim\limits_{x \to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+x^2n^2}$.

34. Dowieść, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, to $\lim\limits_{x\to\infty} \left(e^{-x} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{x^n}{n!}\right) = a.$

PRĘDKOŚĆ, PRZYSPIESZENIE, STYCZNA

Załóżmy, że pewne ciało (punkt materialny) porusza się po prostej. Zakładamy, że na tej prostej została wprowadzona struktura osi liczbowej, tzn. wybrano pewien punkt O, którego współrzędną jest liczba 0, zdefiniowano odcinek jednostkowy i zwrot, co umożliwiło przypisanie każdemu punktowi tej prostej liczby rzeczywistej dodatniej lub ujemnej w znany sposób. Załóżmy, że w chwili t poruszające się ciało znajduje się w punkcie o współrzędnej $s(t)$.

W okresie od t_0 do t ciało przebyło drogę $s(t) - s(t_0)$. Jego średnia prędkość w okresie od t_0 do t jest równa $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$. Zarówno licznik jak i mianownik tego ułamka mogą być dodatnie lub ujemne, w zależności od tego, w którą stronę obiekt porusza się oraz w zależności od tego czy interesuje nas chwila t następująca po chwili t_0 czy też poprzedzająca ją, może też zdarzyć się, że $s(t_0) = s(t)$, chociaż $t \neq_0$.

Na ogół ruch odbywa się ze zmienną prędkością. Często interesuje nas prędkość w jakiejś chwili, a średnia ma znaczenie drugorzędne. W normalnych warunkach im mniejsza liczba $|t - t_0|$ tym średnia prędkość jest bardziej zbliżona do chwilowej. Rozsądnie jest więc powiedzieć, że prędkość chwilowa w momencie t_0 jest równa $v(t_0) := \lim\limits_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$.

Podobnie można mówić o przyspieszeniu. Jeżeli prędkość w okresie od t_0 do t zmieniła się o $v(t)-v(t_0)$, to średnia zmiana prędkości w tym czasie, czyli średnie przyspieszenie, była równa $\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$. Na ogół przyspieszenie zmienia się w czasie. Często interesuje nas przyspieszenie chwilowe: $a(t) := \lim\limits_{t\to t_0} \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$.

Oczywiście nie dla każdej funkcji $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ istnieją granice $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Oznacza to , że istnieją funkcje $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, które w sposób podany przez nas nie opisują żadnego realnego ruchu.

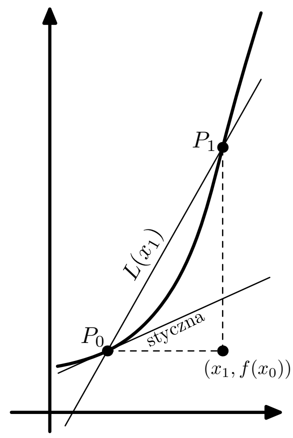
Jeśli np. $s(t) = a + bt$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, to mamy do czynienia z ruchem o stałej prędkości chwilowej $b = \frac{(a+bt)-(a+bt_0)}{t-t_0}$, w chwili 0 ciało znajdowało się w punkcie o współrzędnej a.

Jeśli dla odmiany $s(t) = a + bt + ct^2$, to średnia prędkość jest równa $\frac{(a+bt+ct^2)-(a+bt_0+ct_0^2)}{t-t_0} = b + c(t + t_0)$, więc $v(t_0) = b + 2ct_0$. Ponieważ, $v(t) = b + 2ct$, więc średnie przyspieszenie jest równe $\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0} = 2c$, zatem nie zależy od t ani od t_0. Wobec tego w tym ruchu przyspieszenie chwilowe jest stale równe $2c$.

Czytelnik zapewne pamięta, że prostą styczną do okręgu lub po prostu styczną do okręgu definiuje się zwykle jako prostą, która ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem. W ten sam sposób można zdefiniować styczną do elipsy. Gdybyśmy jednak zechcieli w taki sposób zdefiniować styczną do paraboli, to okazałoby się, że w każdym punkcie są dwie styczne: ta prawdziwa styczna i prosta równoległa do osi symetrii paraboli, np. styczną do paraboli $y = x^2$ w punkcie $(0, 0)$ byłaby prosta $y = 0$, ale również prosta $x = 0$. Tej drugiej oczywiście nie chcemy nazywać styczną. Jeszcze gorzej byłoby z funkcją $\sin\left(x^2\right)$, bo intuicja domaga się by prosta $y = 0$ była styczną do wykresu tej funkcji w punkcie $(0, 0)$, ale ta prosta wykres funkcji przecina w nieskończenie wielu punktach, w każdym postaci $(\pm\sqrt{n\pi}, 0)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.

Jest to spowodowane niewłaściwym spojrzeniem na problem. Styczna do wykresu w pewnym jego punkcie ma się w pobliżu tego punktu nieomal pokryć z wykresem funkcji. Tymczasem warunek *ma dokładnie jeden punkt wspólny* ma charakter globalny, a nie lokalny. Jeśli Czytelnik zechce przyjrzeć się funkcji zdefiniowanej wzorami $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 0$, której wykres leży między wykresami funkcji $-x^2$ i x^2, to zapewne dojdzie do wniosku, że styczną do tego wykresu w punkcie $(0, 0)$ powinna być wspólna styczna do wykresów obu funkcji $-x^2$ i x^2 w tym punkcie, więc prosta $y = 0$. Ta prosta ma jednak nieskończenie wiele punktów wspólnych w wykresem funkcji f, mianowicie punktów postaci $(\frac{1}{n\pi}, 0)$, gdzie $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ i ta sytuacja nie zmieni się, jeśli zmniejszymy je dziedzinę do przedziału $(-\delta, \delta)$ niezależnie od tego, jak małą liczbą dodatnią będzie δ.

Spojrzymy więc na definicje stycznej nieco inaczej. Będziemy szukać stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $P_0 = \big(x_0, f(x_0)\big)$. Przez ten punkt i drugi punkt wykresu $P_1 = \big(x_1, f(x_1)\big)$ poprowadzimy prostą $L(x_1)$ i spróbujemy zrozumieć, co się z nią dzieje, gdy zbliżamy punkt $\big(x_1, f(x_1)\big)$ do punktu $\big(x_0, f(x_0)\big)$. Prostą $L(x_1)$ opisujemy równaniem: $y = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x - x_0) + f(x_0)$. Nasz problem polega na ustaleniu,



co się dzieje ze współczynnikiem kierunkowym tej prostej, czyli z liczbą $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$. Jeżeli funkcja jest w miarę porządna, to można oczekiwać, że istnieje granica $\lim\limits_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$. Oznaczmy: $k = \lim\limits_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$. Równanie $y = k(x - x_0) + f(x_0)$ powinno opisywać styczną. Przypomnijmy, że liczba $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ to tangens kąta zorientowanego między dodatnią półosią OX i prostą $y = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}x$, są dwa takie kąty, ale ich tangensy są równe. Wobec tego liczba k to tangens kąta zorientowanego utworzonego przez dodatnią półoś OX i prostą $y = kx$ równoległą do stycznej.

Przykład 21.1 Przyjrzyjmy się opisanej procedurze w przypadku okręgu. Okrąg nie jest wykresem funkcji, ale odpowiednio wybrany półokrąg już jest. Niech $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Wykresem tej funkcji jest „górny” półokrąg, którego środkiem jest punkt $(0, 0)$ a promieniem liczba $r > 0$. Niech $x_0 \in (-r, r)$. Mamy wtedy

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{r^2-x^2}-\sqrt{r^2-x_0^2}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(r^2-x^2)-(r^2-x_0^2)}{(x-x_0)(\sqrt{r^2-x^2}+\sqrt{r^2-x_0^2})}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{-(x+x_0)}{\sqrt{r^2-x^2}+\sqrt{r^2-x_0^2}}=\frac{-x_0}{\sqrt{r^2-x_0^2}}\,.$$

Równanie stycznej w punkcie $(x_0,\sqrt{r^2-x_0^2})$ wygląda więc tak: $y=\frac{-x_0}{\sqrt{r^2-x_0^2}}(x-x_0)+\sqrt{r^2-x_0^2}$. Bez trudu można sprawdzić, że jedynym jej punktem wspólnym z okręgiem $x^2+y^2=r^2$ jest punkt $\big(x_0,\sqrt{r^2-x_0^2}\big)$. Oznacza to, że prosta znaleziona w sposób przez nas opisany jest styczną do okręgu w zwykłym sensie.

Jeśli $x_0=r$, to należałoby rozpatrywać granicę

$$\lim_{x\to r^-}\frac{\sqrt{r^2-x^2}-0}{x-r}=-\infty\,.$$

W zasadzie nie umożliwia to napisania równania prostej, bo współczynnik kierunkowy musi być liczbą, ale mniej formalne spojrzenie mówi, że styczna w punkcie $(r,0)$ powinna być pionowa — kąt jaki prosta przechodząca przez punkt $(r,0)$ i punkt $(x,\sqrt{r^2-x^2})$ dąży do $-\frac{\pi}{2}$ (w radianach!), więc w granicy ma być równy $-\frac{\pi}{2}$, a to oznacza, że styczna w punkcie $(r,0)$ ma być prostopadła do osi OX. Podobne rozumowanie przekonuje nas, że również styczna w punkcie $(-r,0)$ ma być pionowa. ■

Przykład 21.2 Zajmijmy się jeszcze parabolą $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$. Niech x_0 oznacza dowolną liczbą rzeczywistą i niech $y_0=ax_0^2+bx_0+c$. Znajdziemy równanie stycznej do paraboli w punkcie (x_0,y_0). Mamy znaleźć współczynnik kierunkowy stycznej, czyli granicę

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(ax^2+bx+c)-(ax_0^2+bx_0+c)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\big(a(x+x_0)+b\big)=2ax_0+b\,.$$

Wynika stąd, że równanie poszukiwanej stycznej powinno wyglądać tak: $y=(2ax_0+b)(x-x_0)+y_0$. Można przekonać się, że jedynym punktem wspólnym tej prostej i paraboli $y=ax^2+bx+c$ jest punkt (x_0,y_0). Oczywiście ta prosta nie jest pionowa, więc nie jest równoległa do osi symetrii paraboli. ■

Czytelnik powinien przekonać się o tym, że styczna do wykresu funkcji $ax+b$ w dowolnym punkcie pokrywa się z tym wykresem, co przecież jest oczekiwanym rezultatem: styczną do prostej jest (powinna być) ona sama.

Definicja 21.1 (kąta między krzywymi)
Kąt między krzywymi, to z definicji kąt między stycznymi do tych krzywych w ich punkcie wspólnym. ■

Zadania

1. Znaleźć równanie prostej stycznej do elipsy zdefiniowanej równaniem $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ w punkcie (x_0,y_0), $x_0\in(-a,a)$.

2. Udowodnić, że istnieją takie dwa punkty A,B, że jeśli promień światła przechodzi przez punkt A i odbija się od zwierciadła eliptycznego o równaniu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ zgodnie z prawem *„kąt padania równy jest kątowi odbicia”*, to promień odbity przechodzi przez punkt B.

3. Dowieść, że wykres wielomianu stopnia drugiego o dodatnim wyróżniku przecina poziomą oś układu współrzędnych pod kątami, których suma jest równa π.

4. W ilu punktach i pod jakimi kątami przecinają się parabole o równaniach $y=x^2$ i $x=y^2$?

5. Znaleźć warunek na liczby p,q na to, by wykres wielomianu x^3+px+q był styczny do osi OX w pewnym jej punkcie.

6. Dla jakiej liczby rzeczywistej a istnieje taka liczba rzeczywista b, że styczne do wykresów funkcji ax^2 i $\ln x$ mają w punkcie $(b,ab^2)=(b,\ln b)$ wspólną styczną?

7. Dowieść, że krzywe o równaniach $x^2-y^2=a$ i $xy=b$ przecinają się pod kątem prostym, czyli że styczne do nich w punktach przecięcia są prostopadłe.

POCHODNA FUNKCJI

Funkcje służą do opisu różnych zjawisk fizycznych, ekonomicznych, biologicznych itd. Uzyskanie samego opisu matematycznego jest na ogół pierwszym krokiem do zbadania zjawiska. Wielokrotnie jedna z dróg prowadzących do celu jest poznanie własności funkcji. Jednym z pierwszych problemów, które trzeba rozwiązywać jest ustalenie w jakim tempie zmieniają się wartości funkcji. Tego rodzaju kwestie napotykamy przy próbach znalezienia największych lub najmniejszych wartości funkcji, przy ustalaniu prędkości z jaką porusza się interesujący nas obiekt, przyspieszenia, zmiany liczby ludzi lub zwierząt na jakimś obszarze itd. Do pojęcia pochodnej, czyli wielkości mierzącej tempo zmian funkcji, ludzie dochodzili stopniowo. Matematycy i fizycy w wieku XVII i XVIII (Fermat, Newton, Leibniz i inni), ekonomiści nieco później, niezależnie od matematyków i fizyków (stąd nieco inna terminologia: np. koszt krańcowy, dochód krańcowy, ...). Za początek rachunku różniczkowego i całkowego przyjmuje się przełom wieków XVII i XVIII. Główne odkrycia zostały dokonane przez Newtona (1643–1727) i Leibniza (1646–1716). Początkowo nie istniał właściwy język, którym można by opisywać uzyskiwane rezultaty, ale na początku XIX wieku i później teoria została usystematyzowana dzięki pracom wielu matematyków, głównie wspominanego już Augusta Cauchy'ego.

Podamy teraz ścisłą definicję. Motywy, dla których jest ona właśnie tak wypowiadana zostały podane w poprzednim rozdziale.

Definicja 22.1 (pochodnej)
Załóżmy, że funkcja f jest określona w dziedzinie zawierającej przedział otwarty o środku p i że istnieje granica $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$. Granicę tę nazywamy pochodną funkcji f w punkcie p i oznaczamy symbolem $f'(p)$ lub $\frac{df}{dx}(p)$. Jeśli pochodna jest skończona, to

mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p. Funkcję liniową przypisującą liczbie h liczbę $f'(p)h$ nazywamy różniczką funkcji f w punkcie p i oznaczamy symbolem $df(p)$, a wartość tej funkcji liniowej w punkcie h oznaczamy symbolem $df(p)(h)$ lub częściej $df(p)h$. ■

Wyrażenie $\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$ zwane jest ilorazem funkcji f w punkcie p. Jest ono funkcją zmiennej h. Będziemy jednak czasem traktować je jako funkcję zmiennej $p+h$ lub p.

Powtórzymy też definicje stycznej do wykresu funkcji.

Definicja 22.2 (prostej stycznej do wykresu funkcji)
Załóżmy, że funkcja f ma pochodną w punkcie p oraz że jest ciągła w punkcie p.[22.1] Jeśli pochodna $f'(p)$ jest skończona, to mówimy, że styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(p, f(p))$ jest prosta, której współczynnik kierunkowy jest równy $f'(p)$, przechodząca przez punkt $P = (p, f(p))$. Jeżeli $f'(p) = \infty$ albo $f'(p) = -\infty$, to mówimy, że styczną do wykresu funkcji w punkcie $(p, f(p))$ jest prosta pionowa przechodząca przez ten punkt, czyli prosta o równaniu $x = p$. ■

Z tej definicji wynika od razu, że jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p, to prosta styczna do wykresu tej funkcji w punkcie $(p, f(p))$ ma równanie $y = f'(p)(x-p) + f(p)$.

Dodajmy jeszcze, że czasem rozważane są funkcje określone np. na przedziale postaci $[p, b)$. Wtedy też często mówimy o pochodnej funkcji f w punkcie p, ale w tym przypadku nazywamy ją prawostronną.

Niekiedy np. pochodną funkcji x^2 w punkcie p będziemy oznaczać symbolem $(x^2)'_{x=p}$, a funkcji e^x w punkcie $\sqrt{5}$ — sym-

[22.1] Wykażemy później, że jeśli pochodna $f'(p)$ funkcji f w punkcie p jest skończona, czyli że f jest różniczkowalna w punkcie p, to funkcja f jest ciągła w punkcie p, więc w tym przypadku nie ma potrzeby dodatkowo zakładać ciągłości funkcji w punkcie p.

bolem $(e^x)'_{x=\sqrt{5}}$.

Z własności granicy funkcji wynika, że istnienie pochodnej funkcji w punkcie p jest własnością **lokalną**. Oznacza to, że jeśli dwie funkcje f i g pokrywają się na pewnym przedziale otwartym o środku w punkcie p, to albo obie mają pochodną w punkcie p i te pochodne są równe, albo żadna z nich pochodnej w tym punkcie nie ma.

Przykład 22.1 Niech $f(x) = ax + b$. W tym przypadku iloraz różnicowy

$$\frac{f(p+h)-f(p)}{h} = \frac{a(p+h)-ap}{h} = a$$

jest niezależny od h, zresztą również od p. Wobec tego pochodna funkcji liniowej $ax + b$ jest równa a. Z tego wynika, że prostą styczną do prostej $y = ax + b$ jest ona sama, co nie powinno dziwić, bo ona sama do siebie przylega najlepiej ze wszystkich prostych. Często stosowany jest zapis $(ax + b)' = a$. ■

Przykład 22.2 Niech $f(x) = x^2$ i niech p będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Mamy $\frac{f(p+h)-f(p)}{h} = 2p + h \xrightarrow[h\to 0]{} 2p$, co oznacza, że pochodną funkcji f w punkcie p jest liczba $2p$. Zwykle piszemy $(x^2)' = 2x$. Ponieważ $f'(0) = 0$, więc styczna do wykresu tej funkcji w punkcie $(0,0)$ jest pozioma. Jeśli natomiast $p = 10$, to współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu jest równy 20, więc styczna w punkcie $(20,400)$ jest prawie pionowa. ■

Przykład 22.3 Niech $f(x) = x^3$. Tym razem zachodzi równość $\frac{f(p+h)-f(p)}{h} = 3p^2 + 3ph + h^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 3p^2$, co oznacza, że pochodną funkcji f w punkcie p jest $3p^2$, tzn. $(p^3)' = 3p^2$. W szczególności $f'(0) = 0$, więc styczna do wykresu tej funkcji f w punkcie $(0, f(0)) = (0,0)$ jest pozioma: jej równanie to: $y = 0$. Jednak w tym przypadku wykres nie leży po jednej stronie stycznej, lecz przechodzi z jednej strony tej prostej na drugą.

Pochodna jest dodatnia z jednym wyjątkiem: $f'(0) = 0$. Bez trudu stwierdzamy, że styczna do wykresu tej funkcji w każdym punkcie, z wyjątkiem punktu $(0,0)$, przecina wykres w jeszcze jednym punkcie [22.2], więc w tym przypadku nie jest prawdą, że styczna ma z wykresem funkcji dokładnie jeden punkt wspólny. ■

Przykład 22.4 $(ax^n)' = nax^{n-1}$ dla dowolnej liczby naturalnej n i dowolnej liczby rzeczywistej a. Wynika to — tak jak w poprzednich dwóch przykładach — z wzoru

$$a(p+h)^n - ap^n = \binom{n}{1}ap^{n-1}h + \binom{n}{2}ap^{n-2}h^2 + \cdots + h^n\,. \ \blacksquare$$

Przykład 22.5 Teraz zajmiemy się funkcją $f(x) = |x|$. Jeśli $p > 0$ i $|h| < p$, to $\frac{f(p+h)-f(p)}{h} = \frac{p+h-p}{h} = 1 = 1 \xrightarrow[h\to 0]{} 1$, co oznacza, że pochodną funkcji f w punkcie p jest 1. W taki sam sposób pokazać można, że $f'(p) = -1$ dla każdej liczby $p < 0$. Należy rozważyć jeszcze jeden przypadek, mianowicie $p = 0$. Jeśli $h > 0$, to $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1$, zatem $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1$. Analogicznie $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1$. Z tych dwu równości wynika od razu, że nie istnieje granica $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$, czyli że funkcja $|x|$ pochodnej w punkcie 0 nie ma, chociaż jest ciągła — ma ona w tym punkcie pochodne jednostronne, ale są one różne. Na wykresie funkcji jest to widoczne, w punkcie $(0,0)$ wykres się załamuje, można powiedzieć, że wykres ma w tym punkcie „ostrze". Rezultaty tych rozważań można opisać wzorem $(|x|)' = \frac{|x|}{x}$. ■

Przykład 22.6 Podamy teraz przykład świadczący o tym, że istnieją funkcje ciągłe, które przynajmniej w niektórych punktach nie mają pochodnych jednostronnych. W pierwszym czytaniu ten przykład można opuścić i wrócić do niego później. Warto też spróbować sporządzić szkic wykresu funkcji, co może ułatwić

[22.2] Czytelnik zechce sprawdzić w jakim — to pomaga w zrozumieniu tekstu!

zrozumienie sytuacji. Przechodzimy do szczegółów.

Niech $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$ oraz $f(0) = 0$. Z oczywistej nierówności $|f(x)| \leqslant |x|$ wynika, że $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, a to znaczy, że funkcja f jest ciągła w punkcie 0. Ciągłość w innych punktach jest oczywistym wnioskiem z twierdzenia o operacjach na funkcjach ciągłych i twierdzenia o ciągłości złożenia dwu funkcji. Z twierdzeń, które wykażemy niedługo, wynika, że funkcja ta ma pochodną skończoną w każdym punkcie $x \neq 0$.

Wykażemy teraz, że ta funkcja pochodnej w punkcie 0 nie ma, dokładniej, że w tym punkcie funkcja nie ma pochodnej prawostronnej w punkcie 0. Jeśli $h > 0$, to $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \sin\frac{1}{h}$. Funkcja ta nie ma granicy prawostronnej w punkcie 0 bowiem: $f\big(\frac{1}{2n\pi}\big) = 0$ oraz $f\big(\frac{1}{2n\pi+\pi/2}\big) = 1$. Widzimy, więc że dla każdej liczby naturalnej n punkt $\big(\frac{1}{2n\pi}, 0\big)$ leży na wykresie funkcji, co oznacza, że styczną do wykresu funkcji w punkcie $(0,0)$ powinna być pozioma oś układu współrzędnych. Jednakże dla każdej liczby naturalnej n punkt $\big(\frac{1}{2n\pi+\pi/2}, \frac{1}{2n\pi+\pi/2}\big)$ leży na wykresie funkcji, więc styczną powinna być prosta, na której te punkty leżą, czyli prosta o równaniu $y = x$ — styczną ma być prosta najdokładniej „przylegająca" do wykresu.

Podobnie można uzasadniać, że styczną do wykresu tej funkcji w punkcie $(0,0)$ powinna być prosta o równaniu $y = kx$, gdzie k jest dowolną liczbą z przedziału $[-1,1]$ — na każdej takiej prostej znajdują się punkty leżące na wykresie funkcji f, tworzące ciąg zbieżny do 0. Można powiedzieć, że wykres funkcji $x \sin\frac{1}{x}$ oscyluje między prostymi $y = x$ oraz $y = -x$ i do żadnej z nich ani do żadnej leżącej w kącie przez nie wyznaczonym w punkcie $(0,0)$ nie „przylega". ■

Przykład 22.7 Obliczymy teraz pochodną funkcji wykładniczej. Niech $f(x) = e^x$. Mamy $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x$

— wykazaliśmy w rozdziale 18, że ta równość ma miejsce. Pochodną funkcji wykładniczej o podstawie e w punkcie x jest liczba e^x, czyli $(e^x)' = e^x$. Równanie stycznej w punkcie (p, e^p) do wykresu funkcji e^x ma więc postać $y = e^p(x-p) + e^p$. ∎

Przykład 22.8 Następną bardzo ważną funkcją jest logarytm naturalny. Znajdziemy jej pochodną. Niech $f(x) = \ln x$ dla każdej liczby dodatniej x. Przypomnijmy, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ – wzór ten wykazaliśmy w rozdziale 18. Mamy więc dla $x > 0$ następującą równość: [22.3]

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+x/h)}{x/h} \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

Pochodną logarytmu naturalnego w punkcie x jest więc liczba $\frac{1}{x}$, czyli $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Styczna w punkcie $(p, \ln p)$ do wykresu logarytmu naturalnego ma równanie $y = \frac{1}{p}(x-p) + \ln p$. ∎

Przykład 22.9 Ostatnią z krótkiego cyklu ,,najważniejszych" funkcji elementarnych jest sinus. Przypomnijmy, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ — ta równość została wykazana w rozdziale 19. Z niej wynika, że

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} \cdot \cos(x + \tfrac{h}{2}) = \cos x.$$

Udało się więc nam wykazać, że pochodną funkcji sinus w punkcie x jest liczba $\cos x$, czyli że zachodzi wzór $(\sin x)' = \cos x$. Wobec tego równanie stycznej w punkcie $(p, \sin p)$ do wykresu funkcji sinus to $y = (x-p)\cdot\cos p + \sin p$. Np. styczna do wykresu funkcji sinus w punkcie $(0,0)$ ma równanie $y = x$. ∎

Przykład 22.10 Znajdziemy jeszcze pochodną funkcji $\sqrt[3]{x}$. Mamy $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x+h}\,\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.
Podobnie można wykazać, że $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt[n]{nx^{n-1}}} = \frac{1}{n}x^{-1+1/n}$. ∎

[22.3] Przypomnijmy, że $\ln(x+h) - \ln x = \ln\frac{x+h}{x} = \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$

Uwaga 22.3 Wzory na pochodne funkcji x^n i $\sqrt[n]{x}$ to szczególne przypadki jednego ogólniejszego wzoru $(x^a)' = ax^{a-1}$, którego dowód niebawem poznamy. ■

Następne twierdzenie jest ważne i ma bardzo prosty dowód.

Twierdzenie 22.4 (o najlepszym przybliżeniu liniowym) Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą w punkcie p. Równość

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-(ah+b)}{h} = 0$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p oraz $a = f'(p)$ i $b = f(p)$.

Dowód. Jeśli $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(p+h)-(ah+b)}{h} = 0$, to $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(p+h)-b}{h} - a = 0$. Stąd $a = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(p+h)-b}{h}$, zatem $0 = \lim\limits_{h\to 0} ah = \lim\limits_{h\to 0} (f(p+h)-b)$, czyli $b = \lim\limits_{h\to 0} f(p+h) = f(p)$. Z ostatniej równości wynika, że $a = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(p+h)-b}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}$, a to oznacza, że f jest różniczkowalna w punkcie p i zachodzi równość $a = f'(p)$, co kończy dowód twierdzenia w jedną stronę.

Jeżeli $f'(p) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}$, to zachodzi następująca równość $0 = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} - f'(p) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)-f'(p)h}{h}$, co dowodzi prawdziwości wynikania w drugą stronę. ■

Z twierdzenia tego wynika, że spośród wszystkich wielomianów zmiennej x, stopnia nie większego od 1 najlepiej w otoczeniu punktu p przybliża funkcję f wielomian

$$f(p) + f'(p)(x-p).$$

Żadne z twierdzeń do tej pory sformułowanych nie daje jawnego oszacowania błędu przybliżenia. O tym będzie mowa później. Pokażemy, teraz kilka przykładów.

Przykład 22.11 $\sqrt{50} = \sqrt{49+1} \approx \sqrt{49} + \frac{1}{2\sqrt{49}} \cdot 1 = 7 + \frac{1}{14}$ — przyjęliśmy tu $h = 1$, $f(x) = \sqrt{x}$, zatem $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $p = 49$. Chociaż 1 nie jest małą liczbą, jednak przybliżenie, które uzyskaliśmy jest dosyć dobre. Rzeczywiście,

$$\left(7+\tfrac{1}{14}\right)^2 = 49 + 2\cdot 7\cdot \tfrac{1}{14} + \left(\tfrac{1}{14}\right)^2 = 50 + \tfrac{1}{196}\,.$$

Widzimy więc, że po podniesieniu do kwadratu przybliżonej wartości pierwiastka, otrzymaliśmy liczbę nieco tylko większą od 50. Mamy $7,07 < 7+\frac{1}{14} < 7,08$ oraz $7,07^2 = 49,9849$, co oznacza, że nasze przybliżenie pozwoliło nam znaleźć dwie cyfry po przecinku liczby $\sqrt{50}$ bez wykonania trudnych obliczeń! Wartość przybliżona jest w tym przypadku większa niż rzeczywista, bo styczna do wykresu pierwiastka kwadratowego leży nad nim. ■

Przykład 22.12 $50^2 = (49+1)^2 \approx 49^2 + 2\cdot 49\cdot 1 = 2499$. Tym razem $f(x) = x^2$, zatem $f'(x) = 2x$, $p = 49$ i $h = 1$. W rzeczywistości $50^2 = 2500$, więc tym razem błąd, który popełniamy stosując wzór przybliżony zamiast dokładnego jest równy 1, więc jest ponad 100 razy większy niż w poprzednim przykładzie. ■

Przykład 22.13 $e^{50} = e^{49+1} \approx e^{49} + e^{49}\cdot 1 = 2\cdot e^{49}$. W tym przykładzie przyjmujemy $f(x) = e^x = f'(x)$, $p = 49$ i $h = 1$. Zatem błąd to $e^{50} - 2\cdot e^{49} = (e-2)\cdot e^{49} > 0,7\cdot e^{49}$, jest więc ogromny i to nie tylko w porównaniu z $h = 1$, ale wręcz porównywalny z wartością funkcji.

Mamy: $e^{50} \approx 5,1847055286\cdot 10^{21}$, $e^{49} \approx 1,9073465725\cdot 10^{21}$ i wreszcie $e^{50} - 2\cdot e^{49} \approx 1,370012371\cdot 10^{21}$ — to rezultaty uzyskane za pomocą programu komputerowego (Mathematica 7). Widzimy więc, że w tym ostatnim przypadku przybliżanie za pomocą wzoru $f(p+h) \approx f(p) + f'(p)h$ w ogóle nie ma sensu. Przekonamy się później o tym, że jest to spowodowane niewielkimi zmianami pochodnej funkcji $\sqrt{x}$ w interesującym nas obszarze, istotnie szybszymi zmianami pochodnej funkcji x^2 i bardzo szybkim wzrostem pochodnej funkcji e^x. ■

Definicja 22.5 (różniczki funkcji)

Różniczką funkcji f w punkcie p nazywamy takie przekształcenie liniowe $L\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $L(0) = 0$ i $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)-L(h)}{h} = 0$. Różniczkę funkcji f w punkcie p oznaczamy symbolem $df(p)$, więc jej wartość w punkcie h — symbolem $df(p)(h)$, jednak często piszemy $df(p)h$. ■

Czasem zamiast $df(p)$ piszemy $Df(p)$. Pochodna $f'(p)$ funkcji f w punkcie p i jej różniczka $df(p)$ powiązane są wzorem $df(p)h = df(p)(h) = f'(p)h$. Dodajmy jeszcze, że często stosowane jest oznaczenie $f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$.

W świetle definicji różniczki twierdzenie o najlepszym przybliżeniu liniowym można sformułować tak: *funkcja f ma różniczkę w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy ma w tym punkcie skończoną pochodną. Zachodzi wtedy wzór: $df(p)h = df(p)(h) = f'(p)h$.*

Definicja 22.6 (różniczkowalności)

Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy ma różniczkę w punkcie p, czyli gdy ma skończoną pochodną w punkcie p. ■

Twierdzenie 22.7 (o ciągłości funkcji różniczkowalnej)

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p, to jest w tym punkcie ciągła.

Dowód. Mamy $\lim\limits_{x\to p} f(x) = f(p) + \lim\limits_{h\to 0} (f(p+h) - f(p)) =$
$= f(p) + \lim\limits_{h\to 0} h \cdot \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = f(p) + 0 \cdot f'(p) = f(p)$. ■

Uwaga 22.8

Z istnienia nieskończonej pochodnej funkcji w punkcie nie wynika jej ciągłość w tym punkcie. Niech $f(x) = \frac{x}{|x|}$ dla $x \neq 0$ oraz $f(0) = 0$. Wtedy $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{|h|} = \infty$. Oczywiście w punkcie 0 funkcja jest nieciągła. ■

Uwaga 22.9

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia o ciągłości funkcji różniczkowalnej jest nieprawdziwe. Funkcja $|x|$ jest ciągła, ale nie ma pochodnej w punkcie 0, bo ma pochodne jednostronne, ale są one różne. Jeśli $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ i $f(0) = 0$, to funkcja f jest ciągła we wszystkich punktach, ale w punkcie 0 nie ma nawet jednostronnej pochodnej. ■

Twierdzenie 22.10 (o arytmetycznych własnościach pochodnej)

Załóżmy, że funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie p. Wtedy funkcje $f \pm g$, $f \cdot g$ i, jeśli $g(p) \neq 0$, to również $\frac{f}{g}$ są różniczkowalne w punkcie p i zachodzą wzory:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)\,, \quad (f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,,$$
$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)\,, \quad \left(\tfrac{f}{g}\right)'(x) = \tfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}\,.$$

Dowód. Zachodzą równości $f'(p) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$ oraz $g'(p) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{g(p+h)-g(p)}{h}$. Wiemy też, że te pochodne są skończone. Stąd i z twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy funkcji wynika, że

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)+g(p+h)-f(p)-g(p)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(p+h)-g(p)}{h} = f'(p) + g'(p)\,.$$

Udowodniliśmy więc twierdzenie o pochodnej sumy dwu funkcji różniczkowalnych. W identyczny sposób dowodzimy twierdzenie pochodnej różnicy funkcji różniczkowalnych.

Zajmiemy się teraz iloczynem funkcji różniczkowalnych. Tym razem skorzystamy z udowodnionego wcześniej twierdzenia o ciągłości funkcji różniczkowalnej. Mamy $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(p+h)g(p+h)-f(p)g(p)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\big(f(p+h)-f(p)\big)\cdot g(p+h) + f(p)\big(g(p+h)-g(p)\big)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} g(p+h) + f(p)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(p+h)-g(p)}{h} =$$
$$= f'(p)g(p) + f(p)g'(p)\,.$$

Teraz kolej na iloraz. Założyliśmy dodatkowo, że $g(p) \neq 0$. Wynika stąd, że istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $|h| < \delta$, to $|g(p+h) - g(p)| < |g(p)| = |0 - g(p)|$. Wnioskujemy stąd, że liczby $g(p)$ i $g(p+h)$ leżą po tej samej stronie zera, w szczególności $g(p+h) \neq 0$. Mamy zatem

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(p+h)}{g(p+h)} - \frac{f(p)}{g(p)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)g(p) - f(p)g(p+h)}{hg(p+h)g(p)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)g(p) - f(p)g(p) - \big(f(p)g(p+h) - f(p)g(p)\big)}{hg(p+h)g(p)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(p+h)-f(p)}{h} g(p) - f(p)\frac{g(p+h)-g(p)}{h}}{g(p+h)g(p)} = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{g(p)^2}.$$

Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie 22.11 (o pochodnej złożenia)
Załóżmy, że funkcja g jest różniczkowalna w punkcie p, zaś funkcja f, określona na zbiorze zawierającym wszystkie wartości funkcji g, jest różniczkowalna w punkcie $g(p)$. Wtedy złożenie tych funkcji $f \circ g$ jest różniczkowalne w punkcie p i zachodzi wzór:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Niech $y = g(x)$. Możemy teraz napisać $(f \circ g)'(x) = f'(y)g(x)$ lub $\frac{d(f\circ g)}{dx}(x) = \frac{df}{dy}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x) = \frac{df}{dy}(y) \cdot \frac{dg}{dx}(x)$ lub krócej $\frac{d(f\circ g)}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dg}{dx}$. Często wzór ten zapisywany jest w postaci $\frac{d(f\circ g)}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$ lub, po oznaczeniu $z = f(y)$, jako $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$. W literaturze anglojęzycznej nosi nazwę ,,the Chain Rule", czego oczywistym motywem jest jego ostatnia postać, zwłaszcza jeśli zastosujemy go nie w przypadku złożenia dwu funkcji, lecz większej ich liczby — wtedy łańcuch staje się bardziej widoczny.

Dowód. Mamy do czynienia z dwiema funkcjami różniczkowalnymi: f w punkcie $q = g(p)$ oraz g w punkcie p. Zdefiniujmy $r_g(h) = \frac{g(p+h)-g(p)-g'(p)h}{h}$ dla $h \neq 0$ i $r_g(0) = 0$. Różniczkowalność funkcji g w punkcie p równoważna jest ciągłości funkcji r_g w punkcie 0. Mamy: $g(p+h) = g(p) + g'(p)h + r_g(h)h$.

Niech $r_f(H) = \frac{f(g(p)+H)-f(g(p))}{H}$ dla $H \neq 0$ oraz $r_f(0) = 0$. Tak jak w przypadku funkcji g funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $q = g(p)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja r_f jest ciągła w punkcie 0. Również w tym przypadku zachodzi równość: $f(g(p)+H) = f(g(p))+f'(g(p))H+r_f(H)H$. Możemy „wydzielić część liniową złożenia" $f \circ g$ w otoczeniu punktu p:

$$\begin{aligned}
&f\big(g(p+h)\big) = f\big(g(p) + g'(p)h + r_g(h)h\big) = \\
&= f\big(g(p)\big) + f'\big(g(p)\big) \cdot \big(g'(p)h + r_g(h)h\big) + \\
&\qquad + r_f\big(g'(p)h + r_g(h)h\big) \cdot \big(g'(p)h + r_g(h)h\big) = \\
&= f(g(p)) + f'(g(p)) \cdot g'(p)h + \\
&\qquad + h \cdot \left[f'\big(g(p)\big)r_g(h) + r_f\big(g'(p)h + r_g(h)h\big) \cdot \big(g'(p) + r_g(h)\big)\right].
\end{aligned}$$

Jasne jest, że granicą wyrażenia znajdującego się w nawiasie kwadratowym przy $h \longrightarrow 0$ jest liczba 0. Stąd zaś wynika od razu, zob. twierdzenie o najlepszym przybliżeniu liniowym, że pochodną funkcji $f \circ g$ w punkcie p jest liczba $f'(g(p))g'(p)$. Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie 22.12 (o pochodnej funkcji odwrotnej)
Niech $f\colon (a,b) \xrightarrow{na} (c,d)$. Załóżmy, że

funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p i $f'(p) \neq 0$,

funkcja f jest różnowartościowa,

funkcja f^{-1}, odwrotna do f, jest ciągła w punkcie $q = f(p)$.

Wtedy funkcja f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie q i zachodzi wzór $\left(f^{-1}\right)'(q) = \frac{1}{f'(p)}$.

Dowód. Tym razem wiemy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p, że $f'(p) \neq 0$ oraz że funkcja f^{-1} odwrotna do funkcji f jest ciągła w punkcie $q = f(p)$. Wystarczy wykazać, że $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f^{-1}(q+h)-f^{-1}(q)}{h} = \frac{1}{f'(p)}$. Niech $H = f^{-1}(q+h) - f^{-1}(q)$. Oczywiście H zależy od h. Z ciągłości funkcji f^{-1} w punkcie q wynika od razu, że $\lim\limits_{h\to 0} H = 0$. Zachodzi też równość

$h = q + h - q = f(f^{-1}(q+h)) - f(f^{-1}(q)) =$

$$= f(f^{-1}(q) + H) - f(f^{-1}(q)) = f(p + H) - f(p)\,.$$

Z niej i z poprzednich wynika, że

$$\lim_{h\to 0} \tfrac{f^{-1}(q+h)-f^{-1}(q)}{h} = \lim_{H\to 0} \tfrac{H}{f(p+H)-f(p)} = \tfrac{1}{f'(p)}\,. \ ■$$

Uwaga 22.13

Wzór na pochodną funkcji odwrotnej można też zapisać w taki sposób: $\left(f^{-1}\right)'(f(p)) = \frac{1}{f'(p)}$ lub tak: $\left(f^{-1}\right)'(q) = \frac{1}{f'(f^{-1}(q))}$. Piszemy też $\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$, oznaczywszy uprzednio $y = f(x)$. Ten ostatni zapis, zwłaszcza w połączeniu z wzorem $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$ sugeruje, że symbol $\frac{dy}{dx}$ można traktować jak ułamek. Trzeba jednak uważać, bo nie oznacza on ułamka, lecz pochodną i posługiwać się analogiami z ilorazem jedynie w zakresie dopuszczonym wykazanymi twierdzeniami. Można np. napisać wzór $\frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx} = \frac{d(g+h)}{dx}$ — oznacza on, że pochodna sumy dwu funkcji względem zmiennej x jest równa sumie ich pochodnych względem tej samej zmiennej x. Wzoru $\frac{df}{dy} + \frac{dg}{dx} = \frac{df\cdot dx+dg\cdot dy}{dy\cdot dx}$ napisać **nie można** np. dlatego, że jego prawa strona nie ma sensu — w ogóle nie jest zdefiniowana. Później rozważać będziemy pochodne wyższych rzędów i tam sytuacja będzie jeszcze bardziej skomplikowana. ■

Uwaga 22.14

Założenia w twierdzeniu o pochodnej funkcji odwrotnej są istotne. Warto jednak zaznaczyć, że jeśli założymy dodatkowo, że funkcja f jest ciągła w każdym punkcie przedziału (a, b), to funkcja odwrotna będzie ciągła w każdym punkcie przedziału (c, d). Rzecz w tym, że z różniczkowalności funkcji f w jednym tylko punkcie ciągłość funkcji odwrotnej nie wynika. ■

Ostatnie z tego cyklu twierdzeń służących do obliczania pochodnych mówi jak można obliczać pochodną sumy szeregu potęgowego, czyli szeregu postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Przypomnijmy, że dla każdego ciągu (a_n) istnieje takie $r \in [0, \infty]$, że z nierówności $|x-x_0|<r$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ i to bezwzględna, a z nierówności $|x-x_0|>r$ — rozbieżność, a nawet równość $\lim\limits_{n\to\infty} \left|a_n(x-x_0)^n\right| = \infty$. Mówimy, że r jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego.

Twierdzenie 22.15 (o pochodnej szeregu potęgowego)
Jeśli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ma dodatni promień zbieżności, to **wewnątrz** przedziału zbieżności suma tego szeregu jest funkcją różniczkowalną i zachodzi wzór:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}.$$

Dowód. Będziemy dowodzić twierdzenie zakładając, że $x_0=0$, co nie zmniejsza ogólności rozważań.

Załóżmy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ jest zbieżny i że $|x|<|x_1|$. Niech k będzie dowolną liczba naturalną. Wtedy $\left|n^k a_n x^n\right| = n^k\left|\frac{x}{x_1}\right|^n \cdot \left|a_n x_1^n\right|$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$, więc ciąg $\left(\left|a_n x_1^n\right|\right)$ jest ograniczony. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} n^k\left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ jest zbieżny, co wynika np. z kryterium ilorazowego, zatem szereg $\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n x^n$ jest bezwzględnie zbieżny.

Wykażemy, że funkcja s przypisująca liczbie x sumę szeregu $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest różniczkowalna w każdym punkcie $x\in(-r,r)$ oraz że zachodzi równość

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}.$$

Zakładamy dalej, że $|x|<r$, że $0<|h|<d<r-|x|$. Stąd wynika, że $|x+h|\leqslant|x|+|h|<r$, więc szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+h)^n$ są zbieżne i to bezwzględnie. Mamy więc

$$\left|\frac{s(x+h)-s(x)}{h} - \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{(x+h)^n-x^n}{h} - nx^{n-1}\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=2}^{n} \tbinom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1}\right| \leqslant |h| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=2}^{n} \tbinom{n}{k} |x|^{n-k} |h|^{k-2} \leqslant$$

$$\leqslant |h| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\, n^2 \sum_{k=2}^{n} \tbinom{n-2}{k-2} |x|^{(n-2)-(k-2)} |h|^{k-2} =$$

$$= \ |h| \ \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| \left(|x| + |h|\right)^{n-2} \ \leqslant \ |h| \ \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| \left(|x| + d\right)^{n-2},$$

przedostatnia nierówność wynika z tego, że jeśli $n \geqslant k \geqslant 2$, to

$$\tbinom{n}{k} = \tfrac{n\cdot(n-1)}{(k-1)\cdot k} \cdot \tbinom{n-2}{k-2} \leqslant n^2 \tbinom{n-2}{k-2}.$$

Oczywiście $\lim\limits_{h\to 0} |h| \cdot \sum\limits_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| \left(|x| + d\right)^{n-2} = 0$, zatem

$$\lim_{h\to 0} \left[\tfrac{s(x+h)-s(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right] = 0,$$

a stąd od razu wynika, że $s'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{s(x+h)-s(x)}{h} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Dowód został zakończony. ■

Uwaga 22.16

Wypada przestrzec, że szeregów na ogół nie wolno różniczkować w taki sposób, jak się różniczkuje sumy skończone. Niemiecki matematyk, K.Weierstrass, wykazał, że suma szeregu, którego wyrazy są bardzo porządnym funkcjami, różniczkowalnymi wszędzie, np. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(7^n \pi x)$ jest funkcją ciągła na całej prostej, ale nie ma skończonej pochodnej w żadnym punkcie. ■

Przykład 22.14 Logarytm naturalny to funkcja ciągła, bowiem odwrotna do funkcji e^x. Ponieważ $\left(e^x\right)' = e^x > 0$, więc z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej wynika, że logarytm ma pochodną w każdym punkcie swej dziedziny. Z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej wynika, że zachodzi równość

$$1 = (x)' = \left(e^{\ln x}\right)' = e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = x \cdot (\ln x)'.$$

Stąd mamy $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Ten wzór uzyskaliśmy już wcześniej, ale przedstawiona w tym przykładzie metoda jest bardzo ważna. ■

Przykład 22.15 Zajmiemy się teraz przez chwilę funkcją wykładniczą o dowolnej podstawie. Niech a będzie dowolną liczbą dodatnią, x — dowolną liczbą rzeczywistą. Mamy:

$$(a^x)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = e^{x\ln a}\cdot \ln a = a^x \ln a\,. \quad \blacksquare$$

Przykład 22.16 Niech $f(x) = x^a$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą, zaś x jest liczbą dodatnią. Wykażemy, że

$$(x^a)' = ax^{a-1}\,.$$ [22.4]

Z definicji logarytmu wynika, że $x^a = e^{a\ln x}$. Korzystając z twierdzenia o pochodnej złożenia dwu funkcji oraz poprzednio wyprowadzonych wzorów na pochodne funkcji wykładniczej, logarytmu i funkcji liniowej otrzymujemy:

$$(x^a)' = \left(e^{a\ln x}\right)' = xe^{a\ln x}\cdot a\cdot \tfrac{1}{x} = ax^{a-1}\,.$$

Dodać wypada, że potęgę x^a można zdefiniować również w przypadku $x=0$ i $a>0$ oraz w przypadku $x<0$, jeśli a jest liczbą wymierną, której mianownik jest całkowitą liczbą nieparzystą, a licznik — liczbą całkowitą, po ewentualnym skróceniu. Pozostawiamy Czytelnikom uzasadnienie tego, że w obu tych przypadkach podany przez nas wzór na pochodną funkcji potęgowej pozostaje w mocy, oczywiście w przypadku pierwszym mowa jest jedynie o pochodnej prawostronnej, chyba że a jest wykładnikiem dodatnim, wymiernym o mianowniku nieparzystym (mowa o zapisie liczby wymiernej w postaci ułamka nieskracalnego, którego licznik i mianownik są liczbami całkowitymi). ■

Przykład 22.17 Znajdziemy pochodną funkcji kosinus. Mamy $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Skorzystamy z tego, że $(\sin x)' = \cos x$ i wzoru na pochodną złożenia:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\cdot\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)' = -\sin x$$

[22.4] Dla $a\in\mathbb{N}$ oraz $a=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$ wzór pojawił się wcześniej.

— tutaj rolę funkcji f z wzoru na pochodną złożenia pełni sinus, którego pochodną jest kosinus, zaś rolę funkcji g odgrywa funkcja $\frac{\pi}{2} - x$, której pochodną jest -1. ■

Przykład 22.18 Zastosujemy wzór na pochodną ilorazu dla uzyskania wzoru na pochodną funkcji tangens:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{(\cos x)^2} =$$
$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x\,. \ ■$$

Przykład 22.19 Teraz kolej na kotangens. Wzór ten można uzyskać na różne sposoby, np. modyfikując nieznacznie wyprowadzenie wzoru na pochodną funkcji tangens. Można też zastosować metodę znaną już z wyprowadzenia wzoru na pochodną funkcji kosinus i właśnie tak postąpimy:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \cdot (-1) = -\frac{1}{\sin^2 x} =$$
$$= -1 - \operatorname{ctg}^2 x\,. \ ■$$

Przykład 22.20 Niech $f(0) = 0$ i $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$. Dla $x \neq 0$ mamy $f'(x) = \left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)' = \left(x^2\right)' \sin\frac{1}{x} + x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right)' = 2x \sin\frac{1}{x} + $ $+ x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2} = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$. Mamy też $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0$. Funkcja f jest więc wszędzie różniczkowalna. Łatwo można stwierdzić, że nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$, wystarczy przyjąć $x_n = \frac{1}{n\pi}$. Widać, że pochodna funkcji różniczkowalnej może mieć punkty nieciągłości. ■

Przykład 22.21 Obliczymy pochodną funkcji $\frac{x^4 - 3x^3 + \sin x}{4 + \cos x + \sin\sqrt{1+x^2}}$. Mamy $\left(x^4 - 3x^3 + \sin x\right)' = 4x^3 - 9x^2 + \cos x$ oraz $\left(4 + \cos x + \sin\sqrt{1 + x^2}\right)' = -\sin x + \cos\sqrt{1 + x^2} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} =$ $= -\sin x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cos\sqrt{1 + x^2}$. Z wzoru na pochodną ilorazu wynika, że $\left(\frac{x^4 - 3x^3 + \sin x}{4 + \cos x + \sin\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{(4x^3 - 9x^2 + \cos x)(4 + \cos x + \sin\sqrt{1+x^2}))}{(4 + \cos x + \sin\sqrt{1+x^2})^2} -$

$-\frac{(x^4-3x^3+\sin x)(-\sin x+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cos\sqrt{1+x^2})}{(4+\cos x+\sin\sqrt{1+x^2})^2}$. ■

W dalszym ciągu będziemy używać jeszcze dwu funkcji zdefiniowanych jako odwrotne do funkcji sinus i tangens. Oczywiście funkcje sinus i tangens jako okresowe nie są różnowartościowe, więc nie mają funkcji odwrotnych. Można więc postąpić tak, jak w przypadku pierwiastka kwadratowego, który jest zdefiniowany jako funkcja odwrotna do funkcji x^2 rozpatrywanej nie na całej dziedzinie, lecz na zbiorze, na którym funkcja x^2 jest różnowartościowa, i to możliwie najprostszym o tej własności. [22.5] Wybieramy możliwe najbardziej naturalne dziedziny.

W przypadku sinusa ograniczymy się do przedziału $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, a w przypadku tangensa — do przedziału $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Zbiory wartości to odpowiednio przedział domknięty $[-1,1]$ i cała prosta $(-\infty,+\infty)$. Tradycyjnie zamiast pisać $\sin^{-1}$ piszemy $\arcsin$, a zamiast tg^{-1} piszemy arctg [22.6], co zresztą pozwala na uniknięcie dwuznaczności związanej z oznaczeniami $\sin^{-1}$ i tg^{-1}. Podamy teraz definicje tych funkcji w jawny sposób.

Definicja 22.17 (funkcji arcsin i arctg) [22.7]

Jeśli $x\in[-1,1]$, to $\arcsin x$ jest jedyną liczbą z przedziału domkniętego $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, dla której zachodzi równość $\sin(\arcsin x)=x$. Jeśli $x\in\mathbb{R}$, to $\mathrm{arctg}\,x$ jest jedyną liczbą rzeczywistą z przedziału $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, dla której zachodzi równość $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x)=x$. ■

Przykład 22.22 $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$, $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, $\mathrm{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$, $\mathrm{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, $\mathrm{arctg}\,0=0$. ■

[22.5] Zbiorów, na których funkcja x^2 jest różnowartościowa jest bardzo dużo, np. $[-1,0]\cup(1,+\infty)$, $(-\infty,-2)$, $(-\infty,0]$, $[0,+\infty)$, zbiór złożony ze wszystkich liczb wymiernych dodatnich oraz ujemnych liczb niewymiernych i wiele innych.

[22.6] W niektórych krajach i programach komputerowych arctan.

[22.7] Czytamy arkus sinus lub arkus tangens, termin pochodzi od łacińskiego słowa łuk. Funkcja przypisuje liczbie rzeczywistej długość łuku odpowiadającego kątowi, którego sinus lub tangens równy jest danej liczbie.

Ponieważ funkcje sinus i tangens są ciągłe odpowiednio na przedziałach $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ i $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, więc odwrotne do nich są ciągłe na przedziałach $[-1,1]$ i $(-\infty,\infty)$. Na przedziale otwartym $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ pochodne sinusa i tangensa są różne od 0. Wobec tego funkcje odwrotne do nich, czyli arcsin i arctg są różniczkowalne odpowiednio na $(-1,1)$ i $(-\infty,\infty)$. ■

Zachodzi

Twierdzenie 22.18
Dla każdego $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ zachodzą równości $\arcsin' x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ i $\operatorname{arctg}' x=\frac{1}{1+x^2}$.

Dowód. Istnienie pochodnych wykazaliśmy przed sformułowaniem tego twierdzenia. Wiedząc, że te pochodne istnieją możemy zastosować twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej. Mamy więc

$$1=(x)'=\big(\sin(\arcsin x)\big)'=\cos(\arcsin x)\big(\arcsin x\big)'=$$
$$=\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}\big(\arcsin x\big)'=\sqrt{1-x^2}\big(\arcsin x\big)'.$$

Stąd wynika, że $\big(\arcsin x\big)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$1=(x)'=\big(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\big)'=\big(1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)\big)\big(\operatorname{arctg} x\big)'=$$
$$=(1+x^2)\big(\operatorname{arctg} x\big)'.$$

Stąd wynika, że $\big(\operatorname{arctg} x\big)'=\frac{1}{1+x^2}$. ■

Czasem wprowadzane są funkcje arccos i arcctg jako odwrotne do kosinusa i kotangensa ograniczonych odpowiednio do przedziałów $[0,\pi]$ i $(0,\pi)$, Przekształcają one te przedziały na $[-1,1]$ i $(-\infty,\infty)$, więc funkcje arccos i arcctg są określone na przedziałach $[-1,1]$ i $(-\infty,\infty)$.

Zadania

1. Znaleźć pochodną funkcji f we wszystkich punktach, w których ona istnieje, jeśli

(1) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla } x\notin\mathbb{Q},\\ 1 & \text{dla } x\in\mathbb{Q}.\end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q} & \text{dla } x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0,\ \mathrm{nwd}(p, q) = 1. \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{dla } x \geqslant 0, \\ -\sqrt{-x} & \text{dla } x < 0. \end{cases}$

(4) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

2. Korzystając jedynie z definicji pochodnej obliczyć $f'(0)$, jeśli $f(x) = x^2 \cos x$.

3. Korzystając jedynie z definicji pochodnej obliczyć $f'(0)$, jeśli $f(x) = xe^x$.

4. Korzystając jedynie z definicji pochodnej znaleźć liczby $f'(0)$ i $f'(1)$, jeśli $f(x) = x(x-1)$.

5. Korzystając jedynie z definicji pochodnej obliczyć $f'(0)$, jeśli $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, $f(0) = 0$.

6. Korzystając jedynie z definicji pochodnej obliczyć $f'(1)$, jeśli $f(x) = (x-1)e^x$.

7. Niech $f(x) = x\sqrt{9 + \sin(\operatorname{tg} x)}$, $\varphi(x) = \sin\left(x\sqrt{4 + \sin(\operatorname{tg} x)}\right)$. Obliczyć $f'(0)$ i $\varphi'(0)$ korzystając tylko z definicji pochodnej.

8. Niech $f(x) = (x-2)|x+3|$. Obliczyć $f'(2)$ korzystając jedynie z definicji pochodnej.

9. Niech $f(x) = (\ln x)\sqrt{1 + 3x^2}$. Obliczyć $f'(1)$ korzystając jedynie z definicji pochodnej.

10. Obliczyć pochodną funkcji f w tych punktach, w których istnieje, jeśli $f(x) =$

(a) $1 - 3x + 7x^2 + 5x^3$;

(ą) $\sqrt{1+x}$;

(c) $\frac{2x}{1+x^2}$;

(ć) $\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$;

(d) $\arcsin(\cos x)$;

(e) $\frac{\sin^2 x}{\sin(x^2)}$;

(ę) $\sin\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$;

(f) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$;

(g) x^x;

(h) $\sqrt{\operatorname{tg} x}$;

(i) e^{-x^2};

(j) $e^{\sin x}$;

(k) $(\ln x)^x$;

(l) $\sin(\sin x)$;

(ł) $\sqrt{x+\sqrt{2x+\sqrt{3x}}}$; (m) $\ln|x|$;
(n) $\sin^2(\sqrt{x})$; (o) $|\sin x|$;
(ó) $\ln|\sin x|$; (p) $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$;
(r) $x\,|x|$; (ś) $\sqrt{|x|}$;
(t) $\sqrt[3]{x(x+1)}$; (u) $\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$;
(w) $x\lfloor x\rfloor$; (x) $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$;
(z) $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)$; (ż) $\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

11. Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie p lub wykazać, że ta styczna nie istnieje, jeśli $f(x)=$
(A) $\cos^2 x-2\sin x,\ p=(\pi,1)$; (B) $\operatorname{arctg}(2x),\ p=(0,0)$;
(C) $|x-1|\sqrt[3]{x+2},\ p=-(3,4)$; (D) $\left(x^2-1\right)^2,\ p=(0,1)$;
(E) $\left(x^2-1\right)^2,\ p=\left(\sqrt{2},1\right)$; (F) $\sqrt[3]{x},\ p=(0,0)$;
(G) $\sqrt[3]{x-\sin x},\ p=(0,0)$; (H) $\sqrt[3]{e^x-1},\ p=(0,0)$;
(I) $\sqrt{1-\cos\left(x\sqrt{2}\right)},\ p=(0,1)$; (J) $1-x^2,\ p=(0,1)$.

12. Udowodnić, że jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x, to $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=f'(x)$.

Rozstrzygnąć, czy z istnienia granicy $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ wynika istnienie pochodnej $f'(x)$.

13. Podać przykład funkcji ciągłej $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, która jest różniczkowalna w punktach $x\notin\{1,2,\ldots,100\}$ i która nie ma jednostronnych pochodnych w punktach $x\in\{1,2,\ldots,100\}$.

14. Niech $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ będzie taką funkcją a $g\in\mathbb{R}$ taką liczbą, że dla dowolnych ciągów (h'_n), (h''_n) liczb dodatnich zachodzi równość $g=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(7+h'_n)-f(7-h''_n)}{h'_n+h''_n}$. Dowieść, że $f'(7)=g$.

15. Podać przykład takiej różnowartościowej funkcji $f\colon\mathbb{R}\xrightarrow{na}\mathbb{R}$, która ma pochodną w punkcie 0 i $f'(0)=1$, że funkcja odwrotna f^{-1} nie ma pochodnej w punkcie $f(0)$.

16. Niech $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ będzie taką funkcją, że dla dowolnych

$x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność $|f(x) - f(y)| \leqslant (x-y)^2$. Dowieść, że $f(e) = f(\pi)$.

17. Podać przykład takiej różnowartościowej funkcji $f\colon \mathbb{R} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$, która ma pochodną w punkcie 0 i $f'(0) = 0$, że funkcja odwrotna f^{-1} nie ma pochodnej lewostronnej w punkcie $f(0)$ i jest ciągła w punkcie $f(0)$.

18. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą w punkcie p, że funkcja $f^2 = f \cdot f$ jest różniczkowalna w punkcie p.
Dowieść, że funkcja f^k jest różniczkowalna w punkcie p dla dowolnej liczby naturalnej $k \geqslant 2$, tu: $f^{\ell+1}(x) = f^{\ell}(x) \cdot f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Czy z założeń o funkcji f wynika, że jest ona różniczkowalna w punkcie p?

19. Czy istnieje taka funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie ma jednostronnych pochodnych w punkcie 0, że złożenie $f \circ f$ jest funkcją różniczkowalną w punkcie 0.

20. Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin n$ dla $x \in (-1, 1)$. Dowieść, że funkcja f jest różniczkowalna we wszystkich punktach przedziału $(-1, 1)$.

21. Dowieść, że jeśli $f^3(x) + 3f(x) = x$ dla każdej liczby rzeczywistej x, to funkcja f jest różniczkowalna. Znaleźć liczby $f(0)$ oraz $f'(0)$.

22. Dowieść, że jeżeli $f(x) + e^{f(x)} = x$ dla każdej liczby rzeczywistej x, to funkcja f jest różniczkowalna. Znaleźć liczby $f(1)$ oraz $f'(1)$.

23. Znaleźć wzór na $1 + 2x + 3x^3 + \cdots + nx^{n-1}$ korzystając z tego, że $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

24. Dowieść, że pochodna funkcji parzystej jest nieparzysta, a pochodna funkcji nieparzystej — parzysta.
Czy z tego, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i f' jest parzysta, wynika, że funkcja f jest nieparzysta?
Czy z tego, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i f'

jest nieparzysta, wynika, że funkcja f jest parzysta?

25. Funkcja $f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Czy z tego, że istnieje $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ wynika, że istnieje $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$?

26. Dowieść, że pochodna różniczkowalnej funkcji okresowej jest okresowa. Czy z okresowości pochodnej f' wynika okresowość funkcji f ?

27. Dowieść, że dla każdej liczby $\varepsilon \in [0,1)$ istnieje dokładnie jedna taka funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $f(x) - \varepsilon \sin f(x) = x$. Wykazać, że funkcja f jest różniczkowalna.

28. Niech $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Załóżmy, że $a < x < \alpha_n < \beta_n < b$ dla każdego n i $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = x$. Dowieść, że jeżeli ciąg $\left(\frac{\beta_n - x}{\beta_n - \alpha_n}\right)$ jest ograniczony, to zachodzi wzór $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x)$. Podać przykład świadczący o istotności założenia ograniczoności ciągu $\left(\frac{\beta_n - x}{\beta_n - \alpha_n}\right)$.

TWIERDZENIA O WARTOŚCI ŚREDNIEJ

Następne twierdzenie, które udowodnimy, było używane przez Fermata (1601–1665) w odniesieniu do wielomianów jeszcze przed wprowadzeniem przez Newtona i Leibniza rachunku różniczkowego i całkowego. Fermat zajmował się znajdował między innymi znajdowaniem wartości największych i najmniejszych wielomianów na przedziałach domkniętych. Doprowadziło go to w gruncie rzeczy do pojęcia pochodnej, choć nie stworzył on teorii. Tym nie mniej odkrył twierdzenie, którego wagę trudno przecenić, choć zarówno twierdzenie jak i jego dowód są niesłychanie proste.

Twierdzenie 23.1 (Fermata o lokalnych ekstremach) Jeśli $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną w pewnym punkcie $p \in (a,b)$ i przyjmuje w punkcie p wartość najmniejszą lub największą, to $f'(p) = 0$.

Dowód. Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie p wartość największą. Znaczy to, że dla każdego punktu x z dziedziny funkcji f zachodzi nierówność $f(x) \leqslant f(p)$, zatem dla $h > 0$ mamy $\frac{f(p+h)-f(p)}{h} \leqslant 0$ i wobec tego

$$f'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} \leqslant 0\,.$$

Mamy też $f'(p) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} \geqslant 0$. Obie te nierówności mogą zachodzić jednocześnie jedynie w przypadku $f'(p) = 0$. Jeśli f przyjmuje w punkcie p wartość najmniejszą, to funkcja $-f$ przyjmuje w tym punkcie wartość największą, więc $0 = (-f)'(p) = -f'(p)$. Dowód został zakończony. ■

Wypada podkreślić, że jeśli funkcja określona na przedziale przyjmuje wartość największą w jego końcu, to nawet w przypadku, gdy jest w tym końcu jednostronnie różniczkowalna, to jej pochodna nie musi być równa 0. Funkcja x rozpatrywana na przedziale $[7,13]$ ma swą największą wartość w punkcie 13, w którym jej pochodną jest liczba 1.

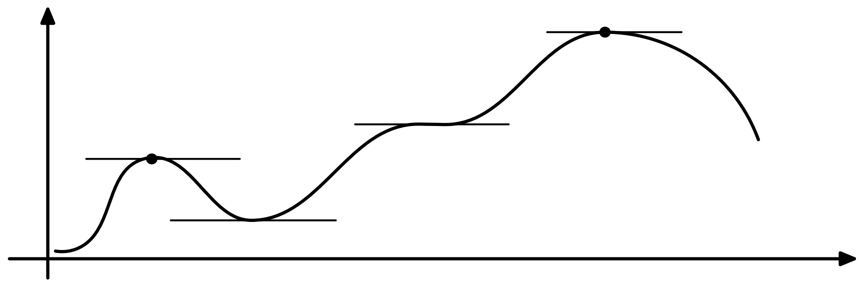
Uwaga 23.2 (o pozornej monotoniczności)
Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p oraz $f'(p) > 0$, to istnieje taka liczba $\delta > 0$, że z nierówności $0 < h < \delta$ wynika nierówność $f(p-h) < f(p) < f(p+h)$, tzn. dostatecznie blisko punktu p, na lewo od niego wartości funkcji są mniejsze niż wartość punkcie p, zaś na prawo od tego punktu, w jego pobliżu wartości funkcji są większe niż wartość w punkcie p.

Dowód. Iloraz różnicowy $\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$ jest dodatni dla dostatecznie małych h, bowiem ma dodatnią granicę przy $h \to 0$, zatem licznik i mianownik tego ułamka mają taki sam znak. ■

Twierdzenie 23.3 (Rolle'a)
Jeżeli funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i ma pochodną we wszystkich jego punktach wewnętrznych oraz $f(a) = f(b)$, to istnieje punkt $c \in (a,b)$, taki że $f'(c) = 0$.

Dowód. Załóżmy, że $f(a) = f(b)$ nie jest największą wartością funkcji f. Niech c będzie punktem, w którym funkcja f przyjmuje wartość największą spośród przyjmowanych na tym przedziale. Oczywiście $a < c < b$. Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie c, więc na mocy twierdzenia Fermata zachodzi równość $f'(c) = 0$. Jeśli funkcja f nie przyjmuje wewnątrz przedziału $[a,b]$ wartości większych niż $f(a) = f(b)$, to albo przyjmuje mniejsze i możemy zamiast niej rozważyć funkcję przeciwną $-f$, albo funkcja f jest stała na przedziale $[a,b]$. W tym drugim przypadku c może być dowolnym punktem przedziału otwartego (a,b). Dowód został zakończony. ■

Interpretacja fizyczna tego twierdzenia może być np. taka: po prostoliniowej drodze porusza się pojazd, który rozpoczyna i kończy przemieszczanie się w tym samym punkcie $\big(f(a) = f(b)\big)$. Ponieważ kończymy podróż w punkcie startu, więc w którymś punkcie musieliśmy zawrócić, w momencie zmiany kierunku jazdy nasza prędkość była równa 0.



Na wykresie funkcji punkty, o których jest mowa w dowodzie twierdzenia Rolle'a to te w otoczeniu, których wykres wygląda tak, jak wykres funkcji $-x^2$ w otoczeniu punktu 0. Oczywiście to nie są jedyne punkty, w których pochodna przyjmuje wartość 0. Jeśli $f(x) = \sin^3 x$, to $f'(x) = 3\sin^2 x \cos x$, więc $f'(0) = 0$, chociaż w punkcie 0 funkcja f nie ma lokalnego maksimum ani lokalnego minimum. Jeśli $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, to funkcja f jest ściśle rosnąca na przedziale postaci $(-\delta, \delta)$. Ma ona lokalne ekstrema, ale w innych punktach, np. w punktach $\pm\frac{\pi}{2}$.

Przejdziemy teraz do najważniejszego twierdzenia w rachunku różniczkowym:

Twierdzenie 23.4 (Lagrange'a o wartości średniej)
Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i ma pochodną we wszystkich punktach przedziału otwartego (a,b), to istnieje taki punkt $c \in (a,b)$, że

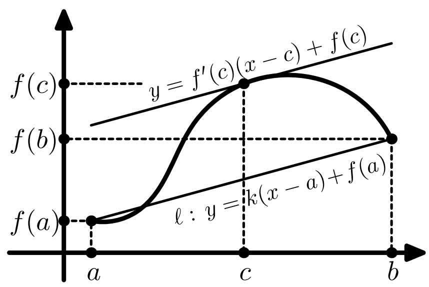
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Dowód. Niech $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ — od funkcji f odejmujemy funkcję $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, więc liniową, której zmiana wartości na przedziale $[a,b]$ jest równa $f(b) - f(a)$, czyli jest równa zmianie wartości funkcji f na tym przedziale. Mamy więc $g(a) = f(a) = g(b)$. Funkcja g jest funkcja ciągła, jako różnica funkcji ciągłych. Taki sam argument przekonuje nas o istnieniu pochodnej g' we wszystkich punktach przedziału otwartego (a,b).

Funkcja g spełnia więc założenia twierdzenia Rolle'a. Istnieje wobec tego taki punkt $c \in (a, b)$, że $0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, a to właśnie mieliśmy wykazać. ■

Czytelnik z pewnością zauważył, że twierdzenie Rolle'a jest przypadkiem szczególnym twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej.

Geometrycznie twierdzenie to oznacza, że jeśli poprowadzimy prostą ℓ przez punkty $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ wykresu funkcji f, to styczna do niego w **pewnym** punkcie $(c,f(c))$, leżącym między wybranymi punktami, jest równoległa do prostej ℓ. Twierdzenie Lagrange'a można też zinterpretować „fizycznie". Jeżeli $f(x)$ oznacza położenie w chwili x ciała poruszającego się po prostej,



$f'(c) = k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

to $f'(c)$ oznacza prędkość w chwili c, natomiast $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ to prędkość średnia w okresie od a do b. Według tej interpretacji twierdzenie o wartości średniej mówi, że prędkość chwilowa w pewnym momencie c równa jest prędkości średniej, co wygląda na stwierdzenie zupełnie oczywiste. Widzimy więc, że twierdzenie Lagrange'a ma krótki dowód, prosto można je zinterpretować na różne sposoby. Pokażemy, że ma ono liczne i ważne konsekwencje.

Twierdzenie 23.5 (**o monotoniczności funkcji różniczkowalnej**)
Załóżmy, że funkcja f jest ciągła w każdym punkcie przedziału P i że jest różniczkowalna we wszystkich jego punktach wewnętrznych. Przy tych założeniach funkcja f jest:

(23.5.1) niemalejąca ($x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$) wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna f' jest nieujemna,

(23.5.2) nierosnąca ($x < y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$) wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna f' jest niedodatnia.

Dowód. Jeżeli funkcja f jest niemalejąca, to iloraz różnicowy $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ jest nieujemny, bo licznik i mianownik tego ułamka mają taki sam znak. Jeśli funkcja nieujemna ma granicę, to nieujemną. Z tego zdania wynika od razu, że pochodna we wszystkich tych punktach przedziału P, w których istnieje, jest nieujemna. Załóżmy teraz, że pochodna w punktach wewnętrznych przedziału P jest nieujemna. Załóżmy, że $x, y \in P$ i że $x < y$. Z twierdzenia o wartości średniej zastosowanego do przedziału $[x, y]$ wynika, że $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(z) \geqslant 0$ dla pewnego punktu $z \in (x, y)$. Ponieważ mianownik ułamka $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ jest dodatni, a sam ułamek jest nieujemny, więc licznik tego ułamka, czyli różnica $f(y)-f(x)$, też jest nieujemny, zatem $f(y) \geqslant f(x)$, co dowodzi tego, że funkcja f jest niemalejąca. Drugi przypadek sprowadzamy jak zwykle do pierwszego zastępując funkcję f funkcją przeciwną $-f$. Dowód został zakończony. ■

Wniosek 23.6 (o stałości funkcji różniczkowalnej) [23.1]
Funkcja ciągła na przedziale P, różniczkowalna we wszystkich jego punktach wewnętrznych jest stała wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) = 0$ dla każdego punktu wewnętrznego przedziału P.

Dowód. Funkcja stała jest jednocześnie niemalejąca i nierosnąca, zatem jej pochodna jest jednocześnie nieujemna i niedodatnia, czyli zerowa. Jeśli pochodna jest zerowa, czyli jednocześnie nieujemna i niedodatnia, to funkcja jest zarówno niemalejąca, jak i nierosnąca, więc jest stała. Dowód został zakończony. ■

Wniosek 23.7 (o pochodnej funkcji niemalejącej)
Jeśli funkcja niemalejąca f ma pochodną w pewnym punkcie x, to $f'(x) \geqslant 0$. ■

[23.1] Można z łatwością ten wniosek udowodnić bezpośrednio, bez powoływania się na właśnie wykazane twierdzenie.

Twierdzenie 23.8 (**o ścisłej monotoniczności funkcji różniczk.**) Niech $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą w każdym punkcie przedziału P i różniczkowalną w każdym punkcie wewnętrznym przedziału P. W tej sytuacji funkcja f jest:

(23.8.1) ściśle rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest nieujemna i między każdymi dwoma punktami przedziału P znajduje się taki punkt x, że $f'(x) > 0$,

(4.13.2) ściśle malejąca wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest niedodatnia i między każdymi dwoma punktami przedziału P znajduje się taki punkt x, że $f'(x) < 0$.

Dowód. Załóżmy, że funkcja f jest ściśle rosnąca. Jest więc również niemalejąca, więc na podstawie poprzedniego twierdzenia jej pochodna jest nieujemna. Jeżeli $x, y \in P$ i $x < y$, to w pewnym punkcie wewnętrznym z przedziału $[x, y]$ zachodzi równość $f'(z) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0$ (wynika to z twierdzenia Lagrange'a).

Zajmiemy się dowodem implikacji przeciwnej. Ponieważ f jest funkcją ciągłą, której pochodna jest nieujemna, więc na mocy poprzedniego twierdzenia f jest funkcją niemalejącą. Jeśli nie jest ona ściśle rosnąca, to istnieją takie punkty $x, y \in P$, że $x < y$ i $f(x) = f(y)$. Jeśli $x < z < y$, to $f(x) \leqslant f(z) \leqslant f(y) = f(x)$, co oznacza, że $f(x) = f(z)$. Oznacza to, że f jest funkcją stałą na przedziale $[x, y]$, więc $f'(z) = 0$ dla każdego punktu $z \in [x, y]$, wbrew założeniu.

Druga część twierdzenia może być uzyskana z pierwszej przez rozważenie funkcji $-f$ zamiast funkcji f. ■

Twierdzenie 23.9 (**o lipschitzowskości funkcji różniczkowalnej**) Niech $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą w każdym punkcie przedziału P i różniczkowalną w każdym jego punkcie wewnętrznym. Wtedy funkcja f spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L \geqslant 0$, tzn.

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|, \text{ gdy } x, y \in P,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $L \geqslant \sup\{|f'(t)|\colon \quad t \in \mathrm{int}P\}$.[23.9]

Dowód. Jeśli $x, y \in P$, to na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej istnieje taki punkt z leżący między x i y, że

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)(x-y)| \leqslant \sup\{|f'(t)|\colon \quad t \in \mathrm{int}P\} \cdot |x-y|,$$

co kończy dowód twierdzenia w jedną stronę.

Dowód w drugą stronę wynika natychmiast z tego, że jeśli funkcja spełnia warunek Lipschitza ze stałą L, to dla dowolnych $x, y \in P$ zachodzi nierówność $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqslant L$. Z niej wynika, że $|f'(x)| = \lim\limits_{y\to x}\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leqslant L$, więc $\sup\{|f'(t)|\colon \quad t \in \mathrm{int}P\} \leqslant L$. Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie 23.10 (Darboux)

Jeśli funkcja $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ ma w każdym punkcie przedziału (a,b) pochodną (być może nieskończoną) i jest ciągła, to funkcja $f'\colon P \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ma własność Darboux. Oznacza to, że jeśli $f'(x) < C < f'(y)$ dla pewnych $x, y \in (a,b)$ i $C \in \mathbb{R}$, to między x i y znajdzie się taka liczba c, że $C = f'(c)$.

Dowód. Załóżmy, dla ustalenia uwagi, że $a < x < y < b$ oraz $f'(x) < C < f'(y)$. Niech $g(t) = f(t) - Ct$ dla $t \in (a,b)$. Funkcja g ma pochodną w każdym punkcie przedziału (a,b) i zachodzi wzór $g'(t) = f'(t) - C$. Funkcja g jest też ciągła. Wystarczy udowodnić, że dla pewnego $c \in (x,y)$ zachodzi równość $g'(c) = 0$. Prawdziwe są wzory $g'(x) = f'(x) - C < 0 < f'(y) - C = g'(y)$. Ponieważ $g'(x) < 0$, więc istnieje taka liczba $\delta_x > 0$, że jeśli $0 < h < \delta$, to $g(x+h) < g(x)$. Ponieważ $g'(y) > 0$, więc istnieje taka liczba $\delta_y > 0$, że jeśli $0 < h < \delta$, to $g(y-h) < g(y)$. Stąd wynika, że żadna z liczb $g(x)$, $g(y)$ nie jest najmniejszą wartością funkcji g na przedziale $[x,y]$. Niech $c \in (x,y)$ będzie punktem, w którym g przyjmuje najmniejszą wartość na przedziale $[x,y]$ —

[23.9] $\mathrm{int}\, P$ oznacza zbiór wszystkich punktów wewnętrznych przedziału P, tzn. przedział otwarty, którego końce pokrywają się z końcami przedziału P.

istnienie c wynika z ciągłości g. Wtedy $g'(c) = 0$, a to chcieliśmy dowieść. ■

Przykład 23.1 Zajmiemy się funkcją arctg. Zachodzi równość $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Wobec tego dla $x \in (-1,1)$ mamy

$$(\operatorname{arctg})' = \tfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \big(x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5} - \tfrac{x^7}{7} + \cdots\big)'.$$

Z kryterium Leibniza wynika, że szereg $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \\ = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ jest zbieżny również dla $x = \pm 1$, przy czym nie jest to zbieżność bezwzględna. Z uwagi po kryterium Leibniza wynika, że

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^j\,\frac{x^{2j+1}}{2j+1} - \sum_{n=0}^{n-1}(-1)^j\,\frac{|x|^{2j+1}}{2j+1}x^{2j+1}\Big| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{2+1} \leqslant \frac{1}{2n+1}$$

Z tej nierówności wynika jednostajna zbieżność szeregu na całym przedziale $[-1,1]$. Funkcja $\operatorname{arctg} x - \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ jest więc ciągła na przedziale $[-1,1]$ a jej pochodna jest równa 0 w punktach wewnętrznych tego przedziału. Stąd wynika, że ta funkcja jest stała na przedziale $[-1,1]$. Dla każdej liczby $x \in [-1,1]$ zachodzi więc równość:

$$\operatorname{arctg} x - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \tfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} 0 - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \tfrac{0^{2n+1}}{2n+1} = 0\,.$$

Stąd wynika, że równość $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ zachodzi dla każdego $x \in [-1,1]$. Podstawiając $x = 1$ do otrzymanego wzoru otrzymujemy

$$\tfrac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \tfrac{1}{2n+1}$$

— ta równość nazywana jest zwykle wzorem Leibniza. Można wykazać, że jeśli chcielibyśmy za pomocą tego wzoru znajdować przybliżenia dziesiętne liczby π, to musielibyśmy wykonać wiele obliczeń, co nawet w przypadku komputerów ma istotne znaczenie – konkretnie: dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność podwójna $\frac{1}{4(n+1)} < \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} - \frac{1}{2n+7} + \dots < \frac{1}{4n}$ (nie jest ona oczywista!), więc błąd, który popełniamy przy zastępowaniu liczby $\frac{\pi}{4}$ liczbą $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$ jest zawarty między $\frac{1}{4(n+1)}$ oraz $\frac{1}{4n}$. Stosując wzór z lepiej dobranym x otrzymać można bez trudu szeregi ,,szybciej" zbieżne. [23.3] ■

Przykład 23.2 Znajdziemy najmniejszą i największą wartość funkcji $\frac{x}{1+x^2}$, którą zresztą umiemy znaleźć bez różniczkowania. Mamy $\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. Pochodna ta zeruje się jedynie w punktach -1 i 1, więc tylko w tych punktach funkcja może przyjmować najmniejszą lub największą wartość, teoretycznie może też nie przyjmować jej wcale. Najmniejszą wartością funkcji może być jedynie liczba $\frac{-1}{1+(-1)^2} = -\frac{1}{2}$, największą — $\frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$. Bez trudu stwierdzamy, że nierówność $\frac{x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2}$ jest równoważna temu, że $2x \leqslant 1 + x^2$, czyli $0 \leqslant (x-1)^2$, więc jest prawdziwa. Podobnie uzasadniamy nierówność $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{1+x^2}$. ■

Przykład 23.3 Niech $f(x) = \frac{1}{x}$. Mamy $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Funkcja ma więc ujemną pochodną w każdym punkcie swej dziedziny $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Mamy też $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$, wobec tego funkcja ta nie jest nierosnąca, tym bardziej nie jest malejąca. Przyczyną tego zjawiska jest to, że dziedzina tej funkcji **nie** jest przedziałem — malutka, raptem jednopunktowa dziureczka w dziedzinie, powoduje, że teza przestaje być prawdziwa! Na każdym **przedziale**, na którym jest zdefiniowana, funkcja ta jest ściśle malejąca. ■

Przykład 23.4 Niech $a \geqslant b > 0$ będą liczbami rzeczywistymi.

[23.3] Można o tym przeczytać w ,,Rachunku różniczkowym i całkowym" G.M.Fichtenholza, t.2, rozdział XI, $ 8, punkt 410, książce wielokrotnie wznawianej przez PWN.

Niech P oznacza prostokąt, którego jeden bok ma długość a, a drugi — b. Z prostokąta P wycinamy cztery kwadraty o boku $x \in \left(0, \frac{b}{2}\right)$, zawierające cztery wierzchołki P w taki sposób, że pole P zmniejsza się o $4x^2$. Następnie zaginamy ,,wystające" części powstałego dwunastokąta (niewypukłego) tak, by powstało pudełko o wymiarach $a-2x$, $b-2x$, x. Dla jakiego x pojemność otrzymanego pudełka będzie największa?

Niech $V(x) = x(a-2x)(b-2x)$ będzie pojemnością pudełka. Funkcja V jest ciągła, a nawet różniczkowalna w każdym punkcie swej dziedziny. Z punktu widzenia pojemności pudełka dziedziną funkcji V jest przedział $\left(0, \frac{b}{2}\right)$, ale można tę funkcję rozpatrywać na przedziale domkniętym $\left[0, \frac{b}{2}\right]$. Na przedziale $\left[0, \frac{b}{2}\right]$ funkcja V, jako ciągła, przyjmuje wartość najmniejszą oraz wartość największą. Ponieważ $V(0) = V\left(\frac{b}{2}\right) = 0$ i $V(x) > 0$ dla $x \in \left(0, \frac{b}{2}\right)$, więc najmniejsza wartość przyjmowana jest w końcach przedziału $\left[0, \frac{b}{2}\right]$, zaś największa – w pewnym punkcie wewnętrznym x_0 tego przedziału. Ponieważ funkcja V jest różniczkowalna w x_0, więc $V'(x_0) = 0$. Wystarczy zatem znaleźć w przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ punkty, w których pochodna funkcji V jest równa 0 i wybrać z nich ten w którym V ma największą wartość — takie punkty są co najwyżej dwa, bo V jest wielomianem trzeciego stopnia, więc V' jest wielomianem kwadratowym.

$V'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$. Wiemy, że ten wielomian ma co najmniej jeden pierwiastek w przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ (nie ma potrzeby sprawdzać, że jego wyróżnik jest dodatni, bo to wynika z istnienia x_0!). [23.4] Możemy teraz zastosować to samo rozumowanie do badania funkcji V na przedziale $\left[\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right]$. Wewnątrz tego przedziału funkcja V przyjmuje wartości ujemne, na końcach — zero.

[23.4] Drugi pierwiastek wielomianu V' też jest dodatni, bo iloczyn pierwiastków tego wielomianu jest równy $\frac{ab}{12}$, jest więc dodatni, zatem oba pierwiastki maja ten sam znak, ale z tego korzystać nie będziemy.

Wobec tego swą najmniejszą wartość na $\left[\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right]$ funkcja V przyjmuje wewnątrz przedziału i wobec tego jej pochodna V' przyjmuje wartość 0 w co najmniej jednym punkcie tego przedziału. Wynika z tego rozumowania, że w każdym z przedziałów $\left(0, \frac{b}{2}\right)$, $\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$ pochodna V' funkcji V ma co najmniej jeden pierwiastek, a ponieważ V' ma dokładnie dwa pierwiastki, więc w każdym z wymienionych przedziałów ma dokładnie jeden pierwiastek. Tak się dzieje w przypadku $a > b$. Nieco inaczej jest, gdy $a = b$. Wtedy $V'\left(\frac{b}{2}\right) = 0$, co sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem i wobec tego również w tym przypadku w przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ funkcja V' może mieć co najwyżej jeden pierwiastek, więc ma dokładnie jeden. Udowodniliśmy w ten sposób, że w przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ funkcja V' ma dokładnie jeden pierwiastek x_0. Jest nim mniejszy z dwóch pierwiastków tej funkcji, a liczba $V(x_0)$ jest największą wartością funkcji V przyjmowaną na przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$. Oczywiście zachodzi równość $x_0 = \frac{4(a+b)-\sqrt{4^2(a+b)^2-4\cdot 12ab}}{2\cdot 12} = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$. ■

Uwaga 23.11

W ostatnim przykładzie nie zajmowaliśmy się znakiem pochodnej V', bo nie było potrzeby ustalać na jakich przedziałach funkcja V rośnie, a na jakich maleje. Można było postąpić inaczej: stwierdzić, że na przedziale $(0, x_0)$ pochodna V' funkcji V jest dodatnia, więc V na tym przedziale rośnie, a na przedziale $\left(x_0, \frac{b}{2}\right)$ pochodna V' jest ujemna, więc na tym przedziale funkcja V maleje. Z naszego rozumowania to też wynika, bo na przedziale $(0, x_0)$ pochodna V' nie przyjmuje wartości 0, ma zatem ten sam znak we wszystkich punktach tego przedziału, zatem funkcja V jest na tym przedziale ściśle monotoniczna, nie może być malejąca, bo $V(x_0) > 0 = V(0)$, więc jest ściśle rosnąca, więc jej niezerująca się pochodna jest dodatnia. ■

Przykład 23.5 Znajdziemy maksimum objętości brył powstałych w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego o obwodzie 1 wokół jego przeciwprostokątnej.

Niech a, b, c oznaczają boki trójkąta, przy czym c oznacza przeciwprostokątną. Bryła, która powstaje w wyniku obrotu trójkąta wokół boku c to dwa stożki złączone podstawami. Promień tej wspólnej podstawy to wysokość trójkąta prostopadła do przeciwprostokątnej, więc równa $\frac{ab}{c}$ (bo pole trójkąta to $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$, gdzie h_c jest wysokością trójkąta prostopadłą do przeciwprostokątnej c). Suma wysokości tych stożków jest równa c, zatem sumą ich objętości jest $V = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{ab}{c}\right)^2 \cdot c = \frac{\pi(ab)^2}{3c}$.

Wiadomo, że $a^2 + b^2 = c^2$ i $a + b + c = 1$. Stąd wynika, że
$$2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = (1 - c)^2 - c^2 = 1 - 2c.$$
Zachodzi więc wzór $V = V(c) = \frac{\pi(1-2c)^2}{12c} = \frac{\pi}{12}\left(\frac{1}{c} - 4 + 4c\right)$. Obliczamy pochodną: $V'(c) = \frac{\pi}{12}\left(-\frac{1}{c^2} + 4\right)$. Stąd wnioskujemy z łatwością, że $V'(c) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c = \pm\frac{1}{2}$, zatem kandydatami na punkt, w którym funkcja V przyjmuje swą największą wartość są $\frac{1}{2}$ oraz $-\frac{1}{2}$. Liczba c jest długością boku trójkąta, zatem jest dodatnia, więc nie może być równa $-\frac{1}{2}$. Liczba $\frac{1}{2}$ też nie wchodzi w grę, bo wtedy byłaby spełniona równość $a + b = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = c$, przecząca nierówności trójkąta. Oznacza to, że funkcja V jest ściśle monotoniczna na każdym przedziale zawartym w swej dziedzinie, zatem kresy, jeśli są przyjmowane, to w końcach przedziału. Musimy więc znaleźć dziedzinę funkcji V.

Liczby a, b, c mają być bokami trójkąta prostokątnego o obwodzie 1, więc muszą być dodatnimi rozwiązaniami układu równań: $a^2 + b^2 = c^2$, $a + b = 1 - c$. Jeśli $a, b, c > 0$ i $a^2 + b^2 = c^2$, to $(a + b)^2 > a^2 + b^2 = c^2$, zatem $a + b > c$ i oczywiście $a + c > c > b$ oraz $b + c > c > a$. Oznacza to, że z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt, oczywiście prostokątny. Ten układ równań równoważny jest następującemu:

$$a+b=1-c, \qquad ab=\tfrac{(1-c)^2-c^2}{2}=\tfrac{1}{2}-c\,.$$

Wobec tego liczby a i b to pierwiastki równania kwadratowego $t^2-(1-c)t+\frac{1}{2}-c=0$. Równanie to ma dodatnie pierwiastki dla dodatniego parametru c wtedy i tylko wtedy, gdy $0<c<\frac{1}{2}$ oraz $0\leqslant\Delta=(1-c)^2-4(\frac{1}{2}-c)=-1+2c+c^2=(c+1)^2-2$ czyli $\sqrt{2}-1\leqslant c<\frac{1}{2}$. Ponieważ $V\left(\frac{1}{2}\right)=0$, więc maksymalna wartość V jest równa $V\left(\sqrt{2}-1\right)$ — oczywiście maksymalna na przedziale $\left[\sqrt{2}-1,\frac{1}{2}\right)$. Łatwo zauważyć, że dla $c=\sqrt{2}-1$ otrzymujemy trójkąt równoramienny (bo $\Delta=0$, więc pierwiastki równania kwadratowego $x^2-(1-c)x+\frac{1}{2}-c=0$, czyli liczby a i b są równe). ■

Uwaga 23.12

Ten przykład powinien przekonać Czytelniów o konieczności zwracania uwagi na dziedzinę funkcji. Omawiałem to zadanie wielokrotnie na zajęciach. Jeszcze się nie zdarzyło, by uczniowie lub studenci chcieli potraktować objętość V jako np. funkcję zmiennej a. Gdyby tak się stało, byłoby $V=V(a)=\frac{\pi a^2(1-2a)^2}{6(1-a)(1-2a+2a^2)}$ i maksimum osiągane byłoby w punkcie wewnętrznym dziedziny funkcji V, czyli przedziału $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, mianowicie w punkcie $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, zatem w punkcie zerowania się pochodnej funkcji V. Znacznie mniej byłoby kłopotu z dziedziną funkcji, za to więcej z obliczeniami. Czasem rozwiązujący nie potrafili wywnioskować monotoniczności funkcji. Wydawało im się, że popełnili błąd w obliczeniach: skoro w jakimś punkcie jest osiągane maksimum, to pochodna tam musi się zerować — zapominali więc o tym, że to twierdzenie mówi o punktach *wewnętrznych* dziedziny, końców nie dotyczy. ■

Przykład 23.6 Znajdziemy teraz kres górny iloczynu trzech liczb nieujemnych, których suma jest równa 3. Oznaczmy te liczby przez x,y,z. Mamy więc $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ oraz $x+y+z=3$. Mamy znaleźć kres górny wyrażenia $xy(3-x-y)$

zakładając, że $x, y \geqslant 0$ oraz $x + y \leqslant 3$. Niech $s = x + y \leqslant 3$. Chwilowo traktować będziemy wielkość s jako stałą. Przy ustalonym s nasze wyrażenie to $x(s-x)(3-s)$. Mamy znaleźć jego kres górny zakładając, że $0 \leqslant x \leqslant s$. Mamy więc do czynienia z funkcją kwadratową zmiennej x, której współczynnik przy x^2 jest ujemny, więc przyjmuje ona swą wartość największą w środku odcinka, którego końcami są jej pierwiastki. W naszym przypadku tym punktem jest $x = \frac{1}{2}(0+s) = \frac{s}{2}$. Należy teraz znaleźć maksymalną wartość wyrażenia $(3-s)\frac{s^2}{4}$ na przedziale $[0,3]$. Mamy

$$\left((3-s)\frac{s^2}{4}\right)' = -\frac{s^2}{4} + (3-s)\frac{s}{2} = \frac{3}{2}s - \frac{3}{4}s^2 = \frac{3}{4}s(2-s)\,.$$

Ponieważ funkcja $(3-s)\frac{s^2}{4}$ zmiennej s jest ciągła na przedziale domkniętym $[0,3]$, więc osiąga w jakimś punkcie swój kres górny. Ponieważ w końcach przedziału przyjmuje wartość 0, a wewnątrz jest dodatnia, więc kres górny jest przyjmowany w jakimś punkcie wewnętrznym tego przedziału. Jedynym punktem w przedziale $(0,3)$, w którym pochodna funkcji $(3-s)\frac{s^2}{4}$ zeruje się, jest 2. Wartość funkcji $(3-s)\frac{s^2}{4}$ w tym punkcie równa jest 1. Odpowiednie wartości wyjściowych zmiennych to $x = y = z = 1$. Zadanie zostało rozwiązane. ■

Uwaga 23.13

Pokażemy teraz inne rozwiązanie problemu rozważanego w ostatnim przykładzie. Przypomnijmy, że $\sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x+y+z}{3}$ — to nierówność o średniej arytmetycznej i geometrycznej. Staje się ona równością wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y = z$. W naszym przypadku oznacza to, że $\sqrt[3]{xyz} \leqslant 1$, przy czym nierówność staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y = z = 1$. Wobec tego największa wartością iloczynu trzech liczb nieujemnych, których suma jest równa 3 jest liczba 1. Drugie rozwiązanie jest krótsze, ale wymaga pewnego pomysłu. ■

Przykład 23.7 Znajdziemy trójkąt o największym obwodzie wśród trójkątów wpisanych w okrąg o promieniu 1.

Zgodnie z twierdzeniem sinusów boki trójkąta są równe $2\sin\alpha$, $2\sin\beta$, $2\sin\gamma$, gdzie α, β i γ są kątami trójkąta. Połowa obwodu to $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$. Wiemy też, że $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Z wzorów redukcyjnych wynika, że połowa obwodu jest równa

$$P(\alpha,\beta):=\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)\,.$$

Trzeba znaleźć największą wartość funkcji P, o ile istnieje, na zbiorze $\{(\alpha,\beta)\colon\quad 0<\alpha,\beta \text{ i } \alpha+\beta<\pi\}$. Zaczniemy od rozwiązania zadania przy **ustalonym** kącie β. Zdefiniujmy funkcję pomocniczą: $f_\beta(\alpha)=P(\alpha,\beta)$. Mamy

$$f'_\beta(\alpha)=\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)=2\cos(\alpha+\tfrac{\beta}{2})\cos\tfrac{\beta}{2}\,.$$

Kąty α, β spełniają nierówność $0<\alpha+\frac{\beta}{2}<\pi$. Wobec tego jedynym punktem zerowania się pochodnej funkcji f_β jest $\alpha=\frac{\pi-\beta}{2}$. Na przedziale $\big(0,\frac{\pi-\beta}{2}\big)$ pochodna funkcji f_β jest dodatnia, więc funkcja f_β jest ściśle rosnąca na przedziale $\big(0,\frac{\pi-\beta}{2}\big]$, więc jej największą wartością na **tym** przedziale jest liczba $f_\beta\big(\frac{\pi-\beta}{2}\big)$. Na przedziale $\big(\frac{\pi-\beta}{2},\pi-\beta\big)$ pochodna jest ujemna, więc funkcja f_β jest ściśle malejąca na przedziale $\big[\frac{\pi-\beta}{2},\pi-\beta\big)$, więc na tym przedziale jej największą wartością też jest liczba:

$$f_\beta\big(\tfrac{\pi-\beta}{2}\big)=\sin\big(\tfrac{\pi-\beta}{2}\big)+\sin\beta+\sin\big(\tfrac{\pi-\beta}{2}+\beta\big)=2\cos\tfrac{\beta}{2}+\sin\beta\,.$$

Znajdziemy największą wartość tej funkcji na przedziale $(0,\pi)$. Mamy

$$\big(2\cos\tfrac{\beta}{2}+\sin\beta\big)'=-\sin\tfrac{\beta}{2}+\cos\beta=\cos\beta-\cos\big(\tfrac{\pi-\beta}{2}\big)\,.$$

Ponieważ na przedziale $(0,\pi)$ kosinus maleje, więc pochodna naszej funkcji zeruje się jedynie w takim punkcie β, że $\beta=\frac{\pi-\beta}{2}$, tzn. gdy $\beta=\frac{\pi}{3}$, przy czym pochodna, czyli $-\sin\frac{\beta}{2}+\cos\beta$, maleje na przedziale $(0,\pi)$, więc jest dodatnia na przedziale $\big(0,\frac{\pi}{3}\big)$ i ujemna na przedziale $\big(\frac{\pi}{3},\pi\big)$, zatem funkcja rośnie na przedziale $\big(0,\frac{\pi}{3}\big]$, a na przedziale $\big[\frac{\pi}{3},\pi\big)$ — maleje. Stąd wynika, że jej wartość w punkcie $\frac{\pi}{3}$ jest największa. Wtedy również $\alpha=\frac{\pi}{3}$ i siłą rzeczy

$\gamma = \frac{\pi}{3}$, zatem największy obwód spośród trójkątów wpisanych w okrąg o promieniu 1 ma trójkąt równoboczny. ■

Uwaga 23.14

Podobnie jak w innych przypadkach można zadanie rozwiązać krócej. Na przedziale $(0,\pi)$ sinus jest funkcją wklęsłą. Z nierówności Jensena wynika, że

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 3\big(\tfrac{1}{3}\sin\alpha + \tfrac{1}{3}\sin\beta + \tfrac{1}{3}\sin\gamma\big) \leqslant$$
$$\leqslant 3\sin\left(\tfrac{1}{3}\alpha + \tfrac{1}{3}\beta + \tfrac{1}{3}\gamma\right) = 3\sin\tfrac{\pi}{3}\,,$$

czyli że połowa obwodu dowolnego trójkąta jest mniejsza niż połowa obwodu trójkąta równobocznego. ■

Przykład 23.8 Wykażmy, że najmniejsza wartość wielomianu $f(x) = x^6 + 6x^2 + 12x$ jest niewymierna. Zacznijmy od stwierdzenia, że ten wielomian ma najmniejszą wartość. Jeśli $|x| > 2$, to $f(x) = x^6 + 6x^2 + 12x > 6x^2 + 12x \geqslant 6|x|(|x|-2) \geqslant 0$, a na przedziale domkniętym $[-2,2]$ przyjmuje najmniejszą wartość, jako funkcja ciągła, w pewnym punkcie c i $f(c) \leqslant f(0) = 0$, więc $f(c) \leqslant f(x)$ dla **każdego** $x \in \mathbb{R}$.

Wynika stąd, że $0 = f'(c) = 6c^5 + 12c + 12 = 6(c^5 + 2c + 2)$. Tego wielomianu nie można przedstawić w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia niższego o współczynnikach całkowitych (łatwe), więc również wymiernych (lemat Gaussa). Zachodzi wzór

$$f(c) = c^6 + 6c^2 + 12c = c(c^5 + 2c + 2) + 4c^2 + 10c = 4c^2 + 10c\,.$$

Gdyby liczba $f(c)$ była wymierna, to liczba c byłaby pierwiastkiem wielomianu kwadratowego $x^2 + 10x - f(c)$ o współczynnikach wymiernych. Dzieląc wielomian $x^5 + 2x + 2$ przez $x^2 + 10x - f(c)$ otrzymujemy wzór

$$x^5 + 2x + 2 = Q(x)\big(x^2 + 10x - f(c)\big) + R(x)\,,$$

gdzie Q jest pewnym wielomianem stopnia trzeciego o współczynnikach wymiernych, a R — wielomianem stopnia pierwszego lub zerowego o współczynnikach wymiernych ($R \neq 0$, bo wielomian

$x^5 + 2x + 2$ nie jest iloczynem wielomianów o współczynnikach wymiernych). Stąd jednak wynika, że liczba c jest pierwiastkiem wielomianu R, więc jest wymierna, wbrew temu, co o niej wiemy.

Dodajmy jeszcze, że liczba $f(c)$ nie jest pierwiastkiem wielomianu kwadratowego o współczynnikach wymiernych, bo wtedy liczba c byłaby pierwiastkiem wielomianu czwartego stopnia o współczynnikach wymiernych. Szczegóły tego rozumowania zostawiamy Czytelnikowi. Czytelnik może też udowodnić, że liczba $f(c)$ nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu stopnia trzeciego lub czwartego o współczynnikach wymiernych. ■

Przykład 23.9 Człowiek spacerujący po lesie znajduje się w odległości 5 km od bardzo długiej prostoliniowej drogi i o 13 km od domu, który stoi przy drodze. Idąc lasem człowiek może przejść 3 km w ciągu godziny, a szosą — 5 km. Chce jak najszybciej dojść do domu. Jak powinien zaplanować marszrutę?

Rozwiążemy to zadanie. Oznaczmy przez C punkt, w którym znajduje się człowiek, a punkt, w którym znajduje się dom — literą D. Na prostej ℓ, którą jest droga, wybieramy punkt O, kierunek dodatni i odcinek jednostkowy w taki sposób, by punkt O był rzutem prostopadłym punktu C na prostą ℓ i żeby współrzędną punktu D była liczba $12 = \sqrt{13^2 - 5^2}$. Załóżmy, że człowiek najpierw dochodzi do punktu na drodze, którego współrzędną jest liczba x, a potem idzie drogą do domu. Z tych założeń wynika, że czas przejścia $t(x)$ jest równy $\frac{1}{3}\sqrt{x^2+25} + \frac{1}{5}|12-x|$. Ta funkcja jest ciągła. Jest różniczkowalna wszędzie z wyjątkiem punktu 12. Dla $x \neq 12$ mamy $t'(x) = \frac{x}{3\sqrt{x^2+25}} + \frac{|x-12|}{5(x-12)}$. Dla $x > 12$ zachodzi nierówność $t'(x) > 0$, zatem funkcja jest ściśle rosnąca na półprostej $[12, \infty)$. Jeśli $x < 12$, to $t'(x) = \frac{x}{3\sqrt{x^2+25}} - \frac{1}{5}$. Jasne jest, że $t'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < 12$ i $\frac{x^2}{9(x^2+25)} = \frac{1}{25}$, czyli gdy $16x^2 = 225$, tzn. $x = \frac{15}{4}$. Łatwo przekonujemy się o tym, że jeśli $x < \frac{15}{4}$, to $t'(x) < 0$, zaś jeśli $\frac{15}{4} < x < 12$, to $t'(x) > 0$. Wynika stąd, że funkcja $t(x)$ maleje na półprostej $\left(-\infty, \frac{15}{4}\right]$ i rośnie na przedziale $\left[\frac{15}{4}, 12\right]$. Wobec tego jej najmniejszą wartością jest liczba $t\left(\frac{15}{4}\right) = \frac{56}{15}$. ■

Przykład 23.10 Niech $f(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$. Mamy $f'(x) = = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$, więc $(f')'(x) = -\sin x + x$. Udowodniliśmy poprzednio, że jeśli $x > 0$, to $\sin x < x$. Z tej nierówności wynika, że $(f')'(x) > 0$ dla każdego $x > 0$. Wobec tego funkcja f' jest ściśle rosnąca na półprostej domkniętej $[0, \infty)$. Stąd wynika, że wzór $f'(x) > f'(0) = \cos 0 - \left(1 - \frac{0^2}{2}\right) = 0$ zachodzi dla każdego $x > 0$. Wobec tego funkcja f, której pochodna jest dodatnia na półprostej otwartej $(0, \infty)$, jest ściśle rosnąca na półprostej domkniętej $[0, \infty)$, więc nierówność $f(x) > f(0) = 0$ zachodzi dla $x > 0$. W ten sposób wykazaliśmy, że $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ dla każdej liczby $x > 0$. ■

Przykład 23.11 Niech $f(x) = e^x - (1 + x + \frac{1}{2}x^2)$. Wtedy $f'(x) = e^x - (1 + x) \geqslant 0$. Wynika stąd, że $(f')'(x) = e^x - 1 > 0$, dla $x > 0$ oraz $(f')'(x) = e^x - 1 < 0$ dla $x < 0$. Funkcja f' jest więc ściśle rosnąca na półprostej $[0, \infty)$ oraz ściśle malejąca na półprostej $(-\infty, 0]$ i dlatego najmniejszą wartością funkcji f' jest liczba $f'(0) = e^0 - 1 = 0$. Oznacza to, że dla $x \neq 0$ zachodzi nierówność $f'(x) > 0$, czyli $e^x > 1 + x$. Wobec tego, że funkcja f' przyjmuje wartości dodatnie na całej prostej z wyjątkiem jednego punktu, zatem funkcja f jest ściśle rosnąca na całej prostej. Mamy więc $f(x) > f(0) = e^0 - (1 + 0 + \frac{1}{2}0^2) = 0$ dla $x > 0$ oraz $f(x) < f(0) = 0$ dla $x < 0$, zatem dla $x > 0$ zachodzi nierówność $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$, zaś dla $x < 0$ — nierówność $e^x < 1 + x + \frac{1}{2}x^2$. Rozumując w ten sam sposób można wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $e^x \geqslant 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$, przy czym nierówność jest ostra dla $x \neq 0$. Uogólnienie pozostawiamy czytelnikom w charakterze prostego ćwiczenia. Zachęcamy też do porównania z rozumowaniami przeprowadzanymi wcześniej: bez trudu można zauważyć, że uzyskujemy teraz z łatwością nierówności, których wykazanie bez pochodnych było dosyć trudne. ■

W poprzednich rozdziałach pojawiały się od czasu do czasu funkcje wypukłe i wklęsłe. Pokazaliśmy jak można dowodzić, że funkcja ciągła jest wypukła. Teraz pokażemy, jak można to robić w przypadku funkcji różniczkowalnej. Powiążemy też wyraźnie pojęcie wypukłości funkcji z pojęciem stycznej do jej wykresu. Przypomnijmy, że wypukłą nazywaliśmy taką funkcję określoną na zbiorze wypukłym (jedynymi wypukłymi podzbiorami prostej są przedziały, zbiory jednopunktowe oraz zbiór pusty), że dla dowolnych punktów x, y z jej dziedziny i dowolnej liczby $f \in (0,1)$ zachodzi nierówność $f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$, co oznacza, że punkty odcinka o końcach $(x, f(x))$ i $(y, f(y))$ leżą *nad* wykresem funkcji f lub na tym wykresie, niezależnie od wyboru punktów x i y. Przypomniana właśnie definicja jest równoważna temu, że spełniony jest jeden (którykolwiek) z trzech warunków:

(a) $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} < \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ dla dowolnych x, y, z z dziedziny funkcji f, dla których $x < y < z$,

(b) $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} < \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$ dla dowolnych x, y, z z dziedziny funkcji f, dla których $x < y < z$,

(c) $\frac{f(x)-f(z)}{x-z} < \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$ dla dowolnych x, y, z z dziedziny funkcji f, dla których $x < y < z$.

Udowodnimy teraz twierdzenie charakteryzujące funkcje wypukłe w terminach pochodnych. Najpierw przypomnimy zwykłe oznaczenia dla jednostronnych pochodnych w punkcie x:

$f'_-(x) = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ to *lewostronna pochodna* funkcji f

oraz

$f'_+(x) = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ to *pochodna prawostronna.*

Twierdzenie 23.15 (o pochodnej funkcji wypukłej)
Jeśli $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą, to

W1. w każdym punkcie $x \in (a,b)$ istnieją pochodne jednostronne $f'_-(x)$ i $f'_+(x)$ oraz $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$;

W2. jeśli $x, y \in (a,b)$ i $x < y$, to $f'_+(x) \leqslant f'_-(y)$, przy czym jeśli f jest ściśle wypukła, to nierówność jest ostra;

W3. funkcja f jest ciągła w każdym punkcie $x \in (a,b)$.

Dowód. Niech $D_x(t) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ dla dowolnego $t \in (a,b)\setminus\{x\}$, $D_x(t)$ oznacza iloraz różnicowy funkcji f w punkcie x. Załóżmy, że $u < v < x < r < s$ są punktami przedziału (a,b). Z własności (c) wynika, że $D_x(u) \leqslant D_x(v)$. Z własności (b) wynika z kolei, że $D_x(v) \leqslant D_x(r)$, zaś z własności (a) wynika, że $D_x(r) \leqslant D_x(s)$. Mamy więc

$$D_x(u) \leqslant D_x(v) \leqslant D_x(r) \leqslant D_x(s),$$

zatem funkcja D_x jest niemalejąca w całym zbiorze $(a,b) \setminus \{x\}$. Ma więc granice jednostronne w każdym punkcie przedziału (a,b), w tym w punkcie x. Stąd mamy równości: $\lim\limits_{t\to x^-} D_x(t) = f'_-(x)$ oraz $\lim\limits_{t\to x^+} D_x(t) = f'_+(x)$, przy czym $f'_-(x) \leqslant D_x(r)$, i wobec tego $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$. Pierwsza część twierdzenia została udowodniona.
Niech $x < r < y$. Z własności (b) wynika, że $D_x(r) \leqslant D_y(r)$, a z tego co udowodniliśmy dotychczas wynika, że $f'_+(x) \leqslant D_x(r)$ oraz $D_y(r) \leqslant f'_-(y)$. Z trzech otrzymanych nierówności wynika, że $f'_+(x) \leqslant f'_-(y)$. Uzyskaliśmy więc drugą część tezy.
Z istnienia jednostronnych pochodnych *skończonych* w punkcie x wynika, że funkcja f jest w tym punkcie lewo– i prawostronnie ciągła, więc jest ciągła. Stwierdzenie tego, że w przypadku funkcji ściśle wypukłej nierówności stają się ostre, wynika od razu z tego, że w przypadku funkcji ściśle wypukłej nierówności w (a), (b), (c) są ostre. Dowód został zakończony. ■

Wniosek 23.16 (z dowodu twierdzenia)
Jeśli f jest funkcją wypukłą określoną na przedziale otwartym (a,b), to dla dowolnego $h>0$, takiego że $x+h\in(a,b)$ zachodzi nierówność $f(x+h)\geqslant f(x)+f'_{+}(x)h$. Jeśli $x-h\in(a,b)$, to zachodzi nierówność $f(x-h)\geqslant f(x)-f'_{-}(x)h$. W przypadku funkcji ściśle wypukłej nierówności te są ostre.

Dowód. Wynika to z tego, że $f'_{+}(x)\leqslant D_x(x+h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ w pierwszym przypadku i $f'_{-}(x)\geqslant D_x(x-h)=\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$ w drugim przypadku. ■

Wykazane twierdzenie oznacza, że pochodna różniczkowalnej funkcji wypukłej jest niemalejąca. Wniosek to po prostu stwierdzenie, że wykres funkcji wypukłej leży nad styczną do siebie w dowolnym punkcie wewnętrznym przedziału–dziedziny. Przy okazji okazuje się, że funkcja wypukła może być nieróżniczkowalna w pewnych punktach, np. $|x|$, $|x+1|+|x|+|x-1|$ lub $e^{|x|}$, ale w punktach wewnętrznych dziedziny ma skończone pochodne jednostronne, więc jest ,,niedaleka" od funkcji różniczkowalnej. Wypada dodać, że te uwagi nie dotyczą końców przedziału–dziedziny, w których funkcja wypukła może nie być ciągła, np. jeśli $f(x)=x^2$ dla $x>0$ i $f(0)=1$, to f jest ściśle wypukła na półprostej domkniętej $[0,\infty)$, choć nie jest ciągła w punkcie 0, więc tym bardziej nie ma w tym punkcie pochodnej. Takimi funkcjami nie będziemy się jednak zajmować, bo skłonni jesteśmy przyznać, że są one nieco sztuczne.

Pojawiła się wielokrotnie nierówność $e^x>1+x$ dla $x\neq 0$. Teraz możemy ją wywnioskować ze ścisłej wypukłości funkcji e^x na przedziale $(-\infty,\infty)$. Nierówność $\sin x<x$ dla $0<x<\pi$ jest konsekwencją ścisłej wklęsłości funkcji sinus na przedziale $[0,\pi]$. Jeśli $0<x\neq 1$, to $\ln x<x-1$, co wynika z tego, że funkcja ln jest ściśle wklęsła na $(0,\infty)$. Widzimy więc, że również w ten sposób można uzyskiwać różne oszacowania. Warto więc umieć

wyjaśnić, czy funkcja na określonym przedziale jest wypukła, wklęsła, czy też ani wypukła, ani wklęsła. Okazuje się, że w wielu przypadkach można to wyjaśnić badając pochodną interesującej nas funkcji.

Twierdzenie 23.17 (o wypukłości funkcji różniczkowalnej) Jeśli funkcja $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ ma w punktach przedziału (a,b) jednostronne pochodne f'_+ i f'_-, dla których zachodzą warunki:

23.17.1 $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$ dla każdego $x \in (a,b)$,

23.17.2 jeśli $x < y$ i $x, y \in (a,b)$, to $f'_+(x) \leqslant f'_-(y)$,

to funkcja f jest wypukła na przedziale (a,b). Jeżeli nierówność w warunku 23.17.2 jest ostra, to funkcja f jest ściśle wypukła. W szczególności: *funkcja różniczkowalna f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna f' jest niemalejąca, ściśle wypukła — wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna f' jest ściśle rosnąca.*

Dowód. Udowodnimy to twierdzenie dla funkcji różniczkowalnych, bo w tym przypadku dowód jest bardzo prosty. Z wypukłości funkcji wynika, że jej pochodna jest niemalejąca — jest to wniosek z poprzedniego twierdzenia.

Załóżmy więc, że funkcja f jest różniczkowalna, a jej pochodna f' jest niemalejąca: $x < y \Longrightarrow f'(x) \leqslant f'(y)$. By udowodnić, że funkcja f jest wypukła, wystarczy wykazać, że jeśli $x < y < z$, to $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$. Z twierdzenia o wartości średniej wynika, że istnieją takie punkty $r \in (x,y)$ i $s \in (y,z)$, że $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(r)$ oraz $\frac{f(y)-f(z)}{y-z} = f'(s)$. Ponieważ $r < y < s$, więc $r < s$ i wobec tego $f'(r) \leqslant f'(s)$, co kończy dowód twierdzenia w tym przypadku. ■

Dowód w przypadku ogólnym pozostawiam w charakterze ćwiczenia, bardzo zachęcam do przeprowadzenia go!

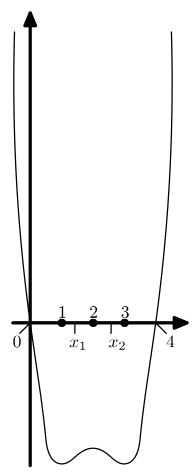
Przykład 23.12 Naszkicować wykres wielomianu w zdefiniowanego wzorem jak następuje: $w(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 12x$.

Wielomian w jest funkcją różniczkowalną na całej prostej i zachodzi równość

$$w'(x) = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12 = 2(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = \\ = 2(x-1)(x-2)(x-3)\,.$$

Ta pochodna jest dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy $1 < x < 2$ lub $x > 3$. Wobec tego na półprostej $[3,\infty)$ wielomian w jest funkcją ściśle rosnącą, na przedziale $[2,3]$ — ściśle malejącą, na przedziale $[1,2]$ — ściśle rosnącą i wreszcie ściśle malejącą na półprostej $(-\infty,1]$. Mamy $w(1) = -\frac{9}{2} = w(3)$ i $w(2) = -4$. Z tego, co do tej pory stwierdziliśmy wynika, że liczba $-\frac{9}{2}$ jest najmniejszą wartością funkcji w. Liczba -4 jest największą z wartości przyjmowanych np. na przedziale $(1,3)$, ale to nie jest największa wartość wielomianu w, bo na przykład $w(0) = 0 > -4$. Największej wartości nie ma w ogóle, bowiem $\lim\limits_{x\to\infty} w(x) = \infty$. Zbadamy teraz monotoniczność pochodnej. Równość $0 = (w')'(x) = 6x^2 - 24x + 22 = 2(3x^2 - 12x + 11)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = \frac{6-\sqrt{3}}{3}$ lub $x_2 = \frac{6+\sqrt{3}}{3}$. Wynika stąd, że $(w')'(x) < 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x_1 = \frac{6-\sqrt{3}}{3} < x < \frac{6+\sqrt{3}}{3} = x_2$.

W przedziale domkniętym $[x_1, x_2] = \left[\frac{6-\sqrt{3}}{3}, \frac{6+\sqrt{3}}{3}\right]$ funkcja w' jest więc ściśle malejąca, zatem funkcja w jest ściśle wklęsła; na półprostej $\big(-\infty, x_1\big]$ funkcja w' jest ściśle rosnąca, więc funkcja w jest ściśle wypukła. Podobnie na półprostej $\big[x_2, \infty\big)$. ■



Definicja 23.18 (lokalnego ekstremum)

Mówimy, że funkcja f określona na zbiorze zawierającym przedział I o środku w punkcie p ma w tym punkcie lokalne maksimum wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki przedział $J \subset I$ o środku w punkcie p, że jeśli $x \in J$, to $f(x) \leqslant f(p)$. Jeśli nierówność jest ostra dla $x \neq p$, to mówimy, że lokalne maksimum jest właściwe. Analogicznie określamy lokalne minimum oraz lokalne minimum właściwe. Jeśli funkcja ma w punkcie p lokalne maksimum lub lokalne minimum, to mówimy, że ma w tym punkcie lokalne ekstremum [23.5]. ■

Wielomian $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x$ ma w punkcie 2 lokalne maksimum właściwe, a w punktach 1 i 3 lokalne minima właściwe.

Definicja 23.19 (punktu przegięcia)
Punkt p jest jest punktem przegięcia funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $\delta > 0$, taka że:

23.19.1 przedział $(p-\delta, p+\delta)$ jest zawarty w dziedzinie f,

23.19.2 na jednym z przedziałów $(p-\delta, p]$, $[p, p+\delta)$ funkcja f jest wypukła, a na drugim wklęsła,

23.19.3 na żadnym z przedziałów $(p-\eta, p+\eta]$, $[p, p+\eta)$, gdzie $\eta \in (0,\delta)$, funkcja f nie jest liniowa. ■

Punktami przegięcia wielomianu $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x$ są liczby $\frac{6-\sqrt{3}}{3}$ $\frac{6+\sqrt{3}}{3}$. Liczba 0 jest punktem przegięcia każdej z funkcji x^3, x^5, x^7 ... Liczba $n\pi$ dla $n \in \mathbb{Z}$ jest punktem przegięcia funkcji sinus oraz funkcji tangens.

Przykład 23.13 Niech $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x) = \frac{x^3-4x}{x^2-1}$. Zbadamy przebieg zmienności tej funkcji, czyli znajdziemy maksymalne przedziały, na których ta funkcja jest rosnąca, malejąca, wypukła, wklęsła. Potem będziemy mogli naszkicować jej wykres.

Mamy $f'(x) = \frac{(3x^2-4)(x^2-1)-2x(x^3-4x)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4+x^2+4}{(x^2-1)^2} > 0$. Wynika stąd, że funkcja f jest ściśle rosnąca na przedziale $(-1,1)$

[23.5] W wielu podręcznikach słowa maksimum, minimum, ekstremum oznaczają lokalne maksimum, lokalne minimum, lokalne ekstremum. Zdecydowaliśmy się na nieco dłuższe terminy, by uniknąć częstych nieporozumień związanych z krótszymi, wielu osobom zdarza się mylić np. lokalne maksima z globalnymi, co może prowadzić do zupełnie bezsensownych wniosków.

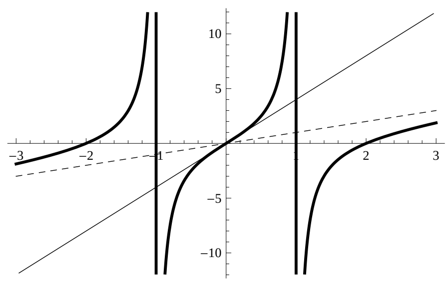
i na każdej z półprostych $(-\infty,-1)$, $(1,\infty)$. Zachodzą równości $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\infty$ i wreszcie $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty$.

Zajmiemy się wypukłością funkcji f. Ustalimy więc, gdzie funkcja f' rośnie lub maleje. Obliczymy pochodną $(f')'$ funkcji f'.

$$(f')'(x)=\tfrac{(4x^3+2x)(x^2-1)^2-4x(x^2-1)(x^4+x^2+4)}{(x^2-1)^4}=$$
$$=\tfrac{(4x^3+2x)(x^2-1)-4x(x^4+x^2+4)}{(x^2-1)^3}=\tfrac{-6x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Wynika stąd, że $(f')'(x)>0 \iff x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$, więc funkcja jest ściśle wypukła na półprostej $(-\infty,-1)$ oraz na przedziale $[0,1)$. Ponieważ $(f')'(x)<0 \iff \iff x\in(-1,0)\cup(1,\infty)$, więc funkcja f jest ściśle wklęsła na przedziale $(-1,0]$ oraz na półprostej $(1,\infty)$. Ta funkcja nie ma lokalnych ekstremów. Jej jedynym punktem przegięcia jest $x=0$. Dodajmy jeszcze, że $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-4x}{x^2-1}=-\infty$ i $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-4x}{x^2-1}=\infty$. Zachodzą też równości $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-4x}{x^2-1}-x\right)=0$ i $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-4x}{x^2-1}-x\right)=0$.

Na rysunku obok są: wykres funkcji $\frac{x^3-4x}{x^2-1}$; *proste* $x=-1$, $x=1$ *; prosta* $y=4x$ *styczna do wykresu funkcji* f *w punkcie* $(0,0)$ *— linia ciągła; prosta* $y=x$ *– linia przerywana.*[23.6] ■



W ostatnim przykładzie pojawiła się proste, do której wykres funkcji zbliżał się nieograniczenie, mianowicie proste: $y=x$, $x=1$ i $x=-1$. Takie proste mają swą nazwę.

Definicja 23.20 (asymptoty)
Prosta $y=Ax+B$ jest asymptotą funkcji $f\colon(a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ przy $x\longrightarrow\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-(Ax+B)\big)=0$. Prosta $y=Ax+B$ jest asymptotą funkcji $f\colon(a,-\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ przy

[23.6] Tym razem odcinki jednostkowe na osiach mają różne długości.

$x \longrightarrow -\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to-\infty} \big(f(x) - (Ax + B)\big) = 0.$

Prosta $x = c$ jest asymptotą (pionową) funkcji $f\colon (a,c) \longrightarrow \mathbb{R}$ przy $x \to c^-$, $c \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$.
Prosta $x = c$, jest asymptotą (pionową) funkcji $f\colon (c,a) \longrightarrow \mathbb{R}$ przy $x \to c^+$, $c \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$. ∎

Często w przypadku asymptot przy $x \to \infty$ mówimy o asymptotach ukośnych, gdy $A \neq 0$ lub poziomych, gdy $A = 0$.

Uwaga 23.21
Załóżmy, że prosta $y = Ax + B$ jest asymptotą funkcji f przy $x \longrightarrow \pm\infty$. Wtedy $A = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $B = \lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x) - Ax\big)$.
Pierwsza równość wynika z tego, że $\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x) - (Ax + B)\big) = 0$, zatem
$0 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-(Ax+B)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \big(\frac{f(x)}{x} - A\big) - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{B}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \big(\frac{f(x)}{x} - A\big)$.
Druga równość wynika z pierwszej. ∎

Przykład 23.14 Niech $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$ dla $x \notin (0,2]$. Zbadamy przebieg zmienności funkcji f.

Dla $x > 2$ mamy $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x-2}}$, zatem $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.
Mamy również

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - x\big) = \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} - x\right) =$$

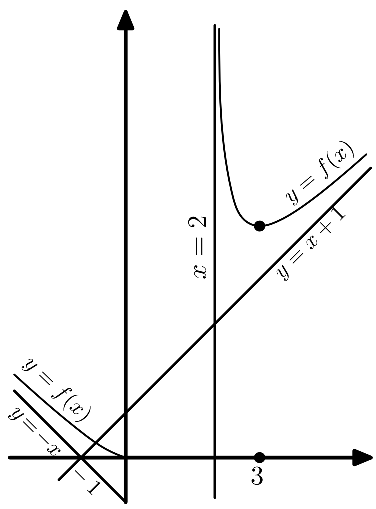
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{\frac{x}{x-2}}+1} \cdot \left(\frac{x}{x-2} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x-2}}+1} \cdot \frac{2x}{x-2} = \frac{1}{1+1} \cdot \frac{2}{1} = 1.$$

Wynika stąd, że prosta o równaniu $y = x + 1$ jest asymptotą ukośną funkcji f przy $x \longrightarrow \infty$. W podobny sposób przekonać się możemy, że $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ i $\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x) + x\big) = -1$, a to oznacza, że prosta o równaniu $y = -x - 1$ jest asymptotą ukośną funkcji f przy $x \longrightarrow -\infty$. W punkcie 0 funkcja f jest ciągła. Mamy też $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \infty$, zatem prosta $x = 2$ jest prawostronną asymptotą pionową funkcji f.

Na jakich przedziałach funkcja f rośnie, a na jakich maleje? Mamy

$$f'(x)=\left(\sqrt{\tfrac{x^3}{x-2}}\right)'=\left(\left(\tfrac{x^3}{x-2}\right)^{1/2}\right)'=$$
$$=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{x^3}{x-2}\right)^{-1/2}\cdot\tfrac{3x^2(x-2)-x^3}{(x-2)^2}=\sqrt{\tfrac{x-2}{x^3}}\cdot\tfrac{x^2(x-3)}{(x-2)^2}\,.$$

Wynika stąd, że $f'(x)>0$, gdy $x>3$ i $f'(x)<0$, gdy $x<0$ oraz gdy $2<x<3$. Wobec tego funkcja f jest ściśle rosnąca na półprostej $[3,\infty)$, a na przedziale $(2,3]$ i na półprostej $(-\infty,0]$ jest ściśle malejąca (choć nie jest ściśle malejąca na zbiorze $(-\infty,0]\cup(2,3]$). Teraz zajmiemy się wypukłością i wklęsłością funkcji f na różnych przedziałach. Aby stwierdzić na jakich przedziałach f jest funkcją wypukłą, a na jakich wklęsłą, ustalimy, gdzie jej pochodna $f'\colon\mathbb{R}\setminus[0,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ rośnie, a gdzie maleje. Dla $x>3$ zachodzi wzór $f'(x)=\sqrt{\frac{x(x-3)^2}{(x-2)^3}}$, a dla $x\leqslant 3$ — równość $f'(x)=-\sqrt{\frac{x(x-3)^2}{(x-2)^3}}$. Funkcja $\sqrt{y}$ jest ściśle rosnąca, więc wystarczy zbadać na jakich przedziałach funkcja $\frac{x(x-3)^2}{(x-2)^3}$ rośnie, a na jakich maleje.



Mianownik jej pochodnej jest dodatni, bo jest kwadratem, a licznik jest równy

$$\big((x-3)^2+2x(x-3)\big)(x-2)^3-3(x-2)^2\big(x(x-3)^2\big)=$$
$$=(x-3)(x-2)^2\big((3x-3)(x-2)-3x(x-3)\big)=6(x-3)(x-2)^2.$$

Funkcja $\frac{x(x-3)^2}{(x-2)^3}$ jest więc ściśle rosnąca na półprostej $[3,\infty)$. Na przedziale $(2,3]$ oraz na półprostej $(-\infty,0]$ funkcja $\frac{x(x-3)^2}{(x-2)^3}$ jest ściśle malejąca. Wobec tego na półprostej $[3,\infty)$, na przedziale $(2,3]$ i na półprostej $(-\infty,0]$ pochodna f' jest ściśle rosnąca, zatem funkcja f jest ściśle wypukła na każdej z dwu półprostych: $(2,\infty)$ i $(-\infty,0]$. ■

Po tych kilku przykładach wypada stwierdzić, że prezentowane metody są skuteczne, jeśli potrafimy znajdować pierwiastki funkcji. Daje się to robić w przypadku dosyć wąskiej klasy funkcji, za to tych używanych najczęściej. W innych sytuacjach stosujemy metody przybliżone.

Przykład 23.15 Pokażemy jak można znaleźć pierwiastek równania $x^5 + 2x + 2 = 0$ z dokładnością do $0{,}1$. Oznaczmy: $f(x) = x^5 + 2x + 2$. Wtedy $f'(x) = 5x^4 + 2 > 0$, więc funkcja f jest ściśle rosnąca, zatem ma co najwyżej jeden pierwiastek. Ponieważ $f(-1) = -1 < 0 < 2 = f(0)$, więc funkcja ciągła f ma co najmniej jeden pierwiastek w przedziale $(-1, 0)$. Wykazaliśmy, że funkcja f ma dokładnie jeden pierwiastek, który znajduje się w przedziale $(-1, 0)$. Mamy $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{32} - 1 + 2 = \frac{31}{32} > 0$, zatem ten pierwiastek znajduje się w przedziale $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$. Pochodna f' funkcji f jest ściśle malejąca na półprostej $(-\infty, 0]$, więc funkcja f jest na tej półprostej ściśle wklęsła, a zatem jej wykres leży pod styczną. Wobec tego możemy napisać, że

$$f(x) < f'(-1)(x+1) + f(-1) = 7(x+1) - 1 = 7x + 6$$

dla $x \in (-1, 0)$. Wobec tego $f(-\frac{6}{7}) < 0$. Z wklęsłości funkcji wynika, że odcinek łączący dwa punkty wykresu znajduje się pod tym wykresem, zatem

$$f(x) > \tfrac{f(-1/2) - f(-1)}{-1/2 - (-1)}(x+1) + f(-1) = \tfrac{63}{16}(x+1) - 1 = \tfrac{63}{16}x + \tfrac{47}{16}.$$

Wynika stąd, że $f(-\frac{47}{63}) > 0$. Wobec tego pierwiastek leży między liczbami $-\frac{6}{7}$ i $-\frac{47}{63}$. Mamy też $\frac{6}{7} - \frac{47}{63} = \frac{1}{9} < \frac{1}{5}$, zatem liczba $-\frac{1}{2}\left(\frac{6}{7} + \frac{47}{63}\right) = -\frac{101}{126}$ znajduje się w odległości mniejszej niż $\frac{1}{18} < \frac{1}{10}$ od pierwiastka funkcji f. ■

Przykład 23.16 Znajdziemy przybliżenie (wymierne) liczby $\sqrt[3]{2}$ z błędem mniejszym niż $0{,}000\,001$. Ponieważ $1 < 2 < 8$, więc $1 < \sqrt[3]{2} < 2$. Liczba $1 < \sqrt[3]{2} < 2$ to jedyny pierwiastkiem wielomianu $x^3 - 2$, który jest funkcją ściśle rosnącą. Z definicji pochodnej wynika od razu, że $x^3 - 2 \approx 3a^2(x-a) + a^3 - 2$ dla x dostatecznie bliskich a. Można więc spróbować rozwiązać równanie $3a^2(x-a) + a^3 - 2 = 0$ zamiast równania $x^3 - 2 = 0$. Otrzymujemy $x = a - \frac{a^3-2}{3a^2} = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{a^2} = \frac{1}{3}\big(a + a + \frac{2}{a^2}\big)$. Liczba $\frac{2}{3}a + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{a^2}$ leży między liczbami a i $\frac{2}{a^2}$ (jako ich średnia ważona). Jeśli $a > 0$, to $a > \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow \frac{2}{a^2} < \sqrt[3]{2}$. Wynika stąd, że jeśli zastąpimy liczbę a liczbą $\frac{2}{3}a + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{a^2}$, to przesuniemy się w kierunku liczby $\sqrt[3]{2}$. Zauważmy, że

$$\frac{2}{3}a + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{a^2} = \frac{1}{3}\Big(a + a + \frac{2}{a^2}\Big) \geqslant \sqrt[3]{a \cdot a \cdot \frac{2}{a^2}} = \sqrt[3]{2}$$

Okazało się, że dla każdej liczby $a > 0$ spełniona jest nierówność $\frac{2}{3}a + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{a^2} \geqslant \sqrt[3]{2}$. Jeśli $a > \sqrt[3]{2}$ to, $a > \frac{2}{3}a + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{a^2} > \sqrt[3]{2}$. Definiujemy ciąg (a_n) wzorami $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{a_n^2}$. Z wykazanych już nierówności wynika, że ten ciąg jest ściśle malejący i że wszystkie jego wyrazy są większe od $\sqrt[3]{2}$. Ma więc ma granicę skończoną. Niech $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, więc $g = \frac{2}{3}g + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{g^2}$, zatem $g^3 = 2$, więc $g = \sqrt[3]{2}$.

Oszacujemy różnicę między $g = \sqrt[3]{2}$ i a_n. Mamy

$$0 < a_{n+1} - \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}\Big(2a_n + \frac{2}{a_n^2}\Big) - \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3a_n^2}\big(2a_n^3 - 3a_n^2\sqrt[3]{2} + 2\big) =$$
$$= \frac{1}{3a_n^2}\big(a_n - \sqrt[3]{2}\,\big)^2\big(2a_n + \sqrt[3]{2}\,\big) < \frac{1}{a_n}\big(a_n - \sqrt[3]{2}\,\big)^2.$$

Wobec tego $a_2 - \sqrt[3]{2} < \frac{1}{a_1}\big(a_1 - \sqrt[3]{2}\,\big) = \frac{1}{2}\big(2 - \sqrt[3]{2}\,\big) < \frac{1}{2}$. Dalej:

$$a_{n+2} - \sqrt[3]{2} < \frac{1}{a_{n+1}}\big(a_{n+1} - \sqrt[3]{2}\,\big)^2 < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\big(a_{n+1} - \sqrt[3]{2}\,\big)^2 <$$
$$< \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}\big(a_n - \sqrt[3]{2}\,\big)^4 = \frac{1}{2}\big(a_n - \sqrt[3]{2}\,\big)^4.$$

Wobec tego $a_4 - \sqrt[3]{2} < \frac{1}{2}\big(a_2 - \sqrt[3]{2}\,\big)^4 < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{32} = \frac{1}{2^5}$. Stąd mamy

$$a_6 - \sqrt[3]{2} < \frac{1}{2}\big(a_4 - \sqrt[3]{2}\,\big)^4 < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{10}} < \frac{1}{2\,000\,000},$$

a więc wystarczy obliczyć szósty wyraz zdefiniowanego ciągu, by uzyskać żądane przybliżenie. Czytelnik sam przekona się jaką dokładność daje piąty wyraz tego ciągu. ■

Uwaga 23.22 Metodę opisaną w ostatnim przykładzie wymyślił

Isaac Newton. Jest ona bardzo skuteczna w przypadku różniczkowalnych funkcji wypukłych, ale nie tylko dla nich. Niedobrze działa w przypadku takich pierwiastków funkcji, w których jej pochodna jest równa 0, więc co najmniej dwukrotnych.

Metoda Newtona bywa modyfikowana. Jest szeroko stosowana m.in. w różnych urządzeniach elektronicznych służących do obliczania. W poprzednim przykładzie kombinowaliśmy różne metody. W dzisiejszych czasach obliczenia zazwyczaj wykonują komputery, ale jeśli mamy do czynienia z bardzo poważnymi obliczeniami, to komputer musi stosować rozsądne metody, bo inaczej przyjdzie nam czekać na wynik zbyt długo i narazimy się na niedokładne wyniki — komputery używają przybliżeń liczb (np. skończonych rozwinięć w układzie pozycyjnym o podstawie 16). ■

Zadania

1. Udowodnić, że liczba c jest 2–krotnym pierwiastkiem wielomianu w, czyli że wielomian w jest podzielny przez wielomian $(x-c)^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 = w(c) = w'(c)$.

2. Udowodnić, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorami $f(0) = 0$ i $f(x) = x + x^3(2 + \sin\frac{1}{x})$ dla $x \neq 0$ nie jest ani wypukła ani wklęsła na żadnym przedziale, którego końcem jest liczba 0.

$x \in (0,1) \Rightarrow f(x) > x$, $x \in (-1,0) \Rightarrow f(x) < x$, *więc z lewej strony punktu* 0 *wykres leży pod styczną, a z prawej — nad nią, choć* 0 **nie** *jest punktem przegięcia funkcji* f.

3. Dowieść, że jeśli $a < b < c$, funkcja $f\colon [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła i punkty $\big(a, f(a)\big)$, $\big(b, f(b)\big)$ i $\big(c, f(c)\big)$ leżą na jednej prostej, to punkt $\big(x, f(x)\big)$ też leży na tej prostej dla każdego $x \in (a,c)$.

4. Niech $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i niech będzie spełniona nierówność $f(a) < 0 < f(b)$. Niech $a_0 = a$,

$a_1 = b$. Niech $(a_2, 0)$ będzie punktem, w którym prosta przechodząca przez punkty $\big(a, f(a)\big)$ i $\big(b, f(b)\big)$ przecina poziomą oś układu współrzędnych. Jeśli $f(a_2) = 0$, to przyjmujemy $a_n = a_2$ dla każdego $n \geqslant 2$. Jeżeli $f(a_2) < 0$, to a_3 jest pierwszą współrzędną punktu przecięcia poziomej osi układu współrzędnych i prostej przechodzącej przez obydwa punkty $\big(a_2, f(a_2)\big)$ i $\big(a_1, f(a_1)\big)$. Jeśli $f(a_2) > 0$, to a_3 jest pierwszą współrzędną punktu przecięcia poziomej osi układu współrzędnych i prostej, która przechodzi przez punkty $\big(a_0, f(a_0)\big)$ i $\big(a_2, f(a_2)\big)$. Analogicznie określamy następne wyrazy ciągu (a_n). Dowieść, że ciąg (a_n) jest zbieżny i że $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.

Uwaga. W zadaniu czwartym opisaliśmy jeszcze jedną metodę przybliżonego obliczania pierwiastków funkcji.

5. Niech $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, która ma pochodną w każdym punkcie przedziału (a,b). Dowieść, że jeśli $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$, to $f'(c) = 0$ dla pewnego $c \in (a,b)$.

6. Niech funkcja $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\ln x) & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Niech $c(x)$ oznacza taką liczbę, że $f(x) - f(0) = xf'\big(c(x)\big)$ i $c(x) \in (0,x)$. Wykazać, że funkcja c ma punkty nieciągłości w każdym przedziale postaci $(0,d)$, $d > 0$.

7. Funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i ma ciągłą pochodną w każdym punkcie przedziału (a,b). Czy wynika stąd, że dla każdej liczby $c \in (a,b)$ istnieją takie liczby $x, y \in [a,b]$, że $x < c < y$ i $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{(y-x)}$?

8. Dowieść, że jeśli $p > 1$ i $0 < x < y$, to zachodzi nierówność

$$px^{p-1}(y-x) < y^p - x^p < py^{p-1}(y-x).$$

9. Dowieść, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ z tego, że $y \neq x$ wynika, że $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| < |x-y|$.

10. Dowieść, że nie istnieje taka liczba $L > 0$, że nierówność

$|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \leqslant L|x-y|$ zachodzi dla dowolnych $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

11. Dowieść, że jeśli $0 < x < y$, to $\frac{y-x}{y} < \ln\frac{y}{x} < \frac{y-x}{x}$.

12. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ ma ograniczoną pochodną, to jest jednostajnie ciągła.

13. Dowieść, że jeśli $a, b \in \mathbb{R}$, $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją nieograniczoną i różniczkowalną, to jej pochodna f' też jest nieograniczona.

14! Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon (a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$, to $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

15. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon (a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, to istnieje taki ciąg (x_n), którego granicą jest ∞, że $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n) = 0$.

16! Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i różniczkowalna w przedziale otwartym (a,b) i istnieje granica $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = A \in [-\infty, \infty]$, to funkcja f ma w punkcie a prawostronną pochodną i $f'_+(a) = A$.

17! Znaleźć wszystkie takie funkcje ciągłe $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in (a,b)$ zachodzi równość $f'(x) = 1$.

18. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f'(x) = 7f(x)$, to $f(x) = f(0)e^{7x}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

19. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon (-1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $(1+x)f'(x) = \sqrt{7}f(x)$, to $f(x) = f(0)(1+x)^{\sqrt{7}}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

20. Dowieść, że jeżeli $x < 1$, to zachodzi równość $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} = \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}$, a dla $x > 1$ — $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} = \operatorname{arctg} x - \frac{3\pi}{4}$.

21. Dowieść, że jeżeli $|x| \geqslant 1$, to $2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi \cdot \frac{|x|}{x}$.

22. Funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, ma ciągłą pochodną w przedziale (a,b), jej wykres nie jest zawarty w prostej. Dowieść, że $\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| < |f'(c)|$ dla pewnego $c \in (a,b)$.

23. Znaleźć maksymalne przedziały, na których funkcja f jest monotoniczna, jeśli $f(x) =:$

(a) $\frac{\sqrt{x}}{x+100}$, $x \geqslant 0$; (b) $x + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$;

(c) $x\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin(\ln x)\right)$, $x > 0$; (d) $x + \sin(2x)$, $x \in \mathbb{R}$;

(e) $\cos\frac{\pi}{x}$, $x \neq 0$; (f) $x^2 2^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$;

(g) $x^n e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; (h) $x^2 - \ln(x^2)$, $x \neq 0$.

24. Dowieść, że funkcja $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ jest ściśle rosnąca na każdej z półprostych $[1, \infty)$ i $(-\infty, -1]$.

25. Znaleźć maksimum objętości stożka wpisanego w kulę o promieniu 1.

26. Znaleźć minimum objętości stożka opisanego na kuli o promieniu 1.

27. Znaleźć maksimum obwodu trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu 1.

28. Znaleźć maksimum długości statku, który może wpłynąć z kanału o szerokości $a > 0$ do prostopadłego doń kanału, którego szerokość jest równa $b > 0$.

29. Znaleźć maksimum pola trójkąta o obwodzie 3 - można skorzystać z wzoru Herona.

30. Znaleźć największy wyraz ciągu $\left(n^5 2^{-n}\right)$ dla $n = 1, 2, 3\dots$ i największy wyraz ciągu $\left(n^5 3^{-n}\right)$ dla $n = 1, 2, 3\dots$

31. Ciężarówka porusza się po autostradzie ze stałą prędkością v km/h. Minimalna prędkość dla ciężarówek na autostradzie wynosi 50 km/h, maksymalna 100 km/h, litr benzyny kosztuje 2 zł, kierowca otrzymuje 10 zł za godzinę swej pracy. Ciężarówka zużywa $11 + \frac{v^2}{400}$ litrów paliwa w ciągu godziny jazdy (z prędkością v). Przy jakiej prędkości koszt przejazdu ustalonego odcinka trasy jest najmniejszy?

32. Zbadano, że w pewnej fabryce robotnik rozpoczynający pracę o godzinie 8:00 wykonuje $-x^3 + 6x^2 + 15x$ radioodbiorników w ciągu x godzin. Po 15–minutowej przerwie wykonuje w ciągu x godzin $-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 23x$ radioodbiorników. O której powinna rozpocząć się 15–minutowa przerwa, aby do 12:15 wykonał najwięcej radioodbiorników, a której — by wykonał ich najmniej?

33. Statek pływa z portu A do portu B. Koszt ruchu statku składa się z dwu części: niezależnej od prędkości i równej 25600 zł dziennie oraz zależnej od prędkości i równej (liczbowo) podwojonemu sześcianowi prędkości dziennie. Przy jakiej prędkości koszt przepłynięcia trasy jest najmniejszy?

34. Niech $f(x) = \left|x^2 + 2x - 3\right| + \frac{3}{2}\ln x$. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f na przedziale $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ i na przedziale $\left[\frac{1}{8}, 2\right]$

35. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $e^{\sqrt{x^2\cdot|x+1|}}$ na przedziale $[-2, 1]$.

36. Niech $f(x) = 4x + \frac{9\pi^2}{x} + \sin x$. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f na przedziale $[\pi, 2\pi]$.

37. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $2ex\ln x$ na przedziale $(0, 2]$.

38. Ile pierwiastków ma równanie $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$?

39. Ile pierwiastków ma równanie $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$?

40. Ile pierwiastków ma równanie $x^5 - 5x = a$ w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$?

41. Ile pierwiastków ma równanie $e^x = ax^2$ w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$?

42. Dowieść, że wielomian dodatniego stopnia jest funkcją ściśle monotoniczną na każdej z półprostych (a, ∞) i $(-\infty, a)$, jeśli tylko a jest dostatecznie duża liczbą dodatnią.

43. Udowodnić, że jeżeli obie funkcje f, g są różniczkowalne na półprostej $[a, \infty)$ i $|f'(x)| \leqslant g'(x)$ dla każdego $x \geqslant a$, to nierówność $|f(x) - f(a)| \leqslant g(x) - g(a)$ zachodzi dla $x \geqslant a$.

44. Udowodnić, że jeśli $f\colon [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, $f(a) < 0$ i dla pewnej liczby $c > 0$ nierówność $f'(x) > c > 0$ zachodzi dla $x > a$, to istnieje taka liczba $x_0 \in \left(a, a - \frac{f(a)}{c}\right)$, że $f(x_0) = 0$.

45. Dowieść, że jeżeli $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją, że dla każdej liczby $x \in (a,b)$ istnieje taka liczba $\delta_x > 0$, że jeżeli $0 < |y-x| < \delta_x$, to $(y-x)\big(f(y) - f(x)\big) > 0$, to funkcja f jest ściśle rosnąca.

46. Dowieść, że założenie ciągłości funkcji $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ w twierdzeniu Lagrange'a o wartości średniej jest istotne nawet wtedy, gdy pochodna $f'(x)$ funkcji f jest skończona dla każdego $x \in (a,b)$.

47. Dowieść, że jeśli $x > 0$, to $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

48. Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$ zachodzi nierówność

$$e^x > 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{6}\,.$$

49. Dowieść, że dla każdej liczby dodatniej x zachodzi nierówność

$$x - \tfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x\,.$$

50. Dowieść, że dla każdej liczby dodatniej x zachodzi nierówność

$$x - \tfrac{x^3}{6} < \sin x < x\,.$$

51. Dowieść, że dla każdej liczby $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ zachodzi nierówność

$$\operatorname{tg} x > x + \tfrac{x^3}{3}\,.$$

52. Dowieść, że jeśli $0 < a < b$ i $x, y > 0$, to zachodzi nierówność

$$(x^a + y^a)^{1/a} < (x^b + y^b)^{1/b}\,.$$

53. Dowieść, że jeśli $0 < x < \frac{\pi}{2}$, to $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$.

54. Dowieść, że jeśli $x > 0$, to $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

55. Dowieść, że jeśli $x > 1$ i $p > 1$, to $x^p - 1 > p(x-1)$.

56. Dowieść, że jeśli $x > 0$, to $1 + 2\ln x \leqslant x^2$.

57. Znaleźć maksymalne przedziały, na których funkcja f jest wypukła lub wklęsła, jeśli $f(x) =$

(a) $3x^2 - x^3$; (b) $\frac{8}{22+x^2}$;

(c) $x + x^{5/3}$; (d) $\sqrt{1+x^2}$;

(e) $x + \sin x$; (f) e^{-x^2};

(g) $\ln(1+x^2)$; (h) $x\sin(\ln x)$;

(i) x^x; (j) $\frac{x+1}{x^2+1}$;

(k) $x\ln x$; (l) $x\sin\frac{1}{x}$.

58. Znaleźć przedziały monotoniczności i wypukłości lub wklęsłości funkcji f, jej lokalne ekstrema i punkty przegięcia. Znaleźć granice funkcji f oraz granice funkcji f' w końcach przedziałów składających się na ich dziedziny (niekoniecznie takie same). Naszkicować wykres funkcji [23.6] f, jeśli $f(x) =$

a. $x^4(1+x)^{-3}$; b. $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$;

c. $\sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$; d. $1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$;

e. $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$; f. $\sin x \sin 3x$;

g. $\frac{x^3-5x}{\left(\sqrt{5+x^2}\right)^3}$; h. $\sqrt[3]{x^4 - 2x^2}$;

i. $(x+1)^{5/3}\left(x^2+2x\right)^{1/3}$, wiedząc, że
$$f'(x) = \tfrac{1}{3}(x+1)^{2/3}\left(x^2+2x\right)^{-2/3}\left(7x^2+14x+2\right),$$
niewymiernymi pierwiastkami funkcji f' są $x_5 \approx -1.845$ i $x_6 \approx -0.155$, ma ona również pierwiastek wymierny, $f''(x) = \frac{2(14x^4+56x^3+61x^2+10x-4)}{9(x+1)^{1/3}(x^2+2x)^{5/3}}$, pierwiastkami drugiej pochodnej są cztery liczby niewymierne $x_1 \approx 0.177$, $x_2 \approx -2.177$, $x_3 \approx -0.492$, $x_4 \approx -1.508$;

j. $\sqrt[3]{\frac{x^2+2x-7}{x^2+2x-5}}$, wiedząc, że $f'(x) = \frac{4(x+1)}{3\sqrt[3]{(x^2+2x-5)^4(x^2+2x-7)^2}}$,

[23.6] **UWAGA:** Zakładamy, że dziedziny funkcji są tak dobrane, że operacje definiujące funkcję są wykonalne oraz że dziedziny są maksymalnymi zbiorami o tej własności. Pierwiastki stopnia **nieparzystego** są określone dla wszystkich liczb rzeczywistych x.

$f''(x) = -\frac{4(9x^4+36x^3+8x^2-56x-181)}{9\sqrt[3]{(x^2+2x-5)^7(x^2+2x-7)^5}}$ oraz że druga pochodna ma dokładnie dwa pierwiastkami rzeczywiste $x_1 \approx 1{,}7$ oraz $x_2 \approx -3{,}7$ i że są one jednokrotne.

59. Dowieść, że jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną i istnieje taka liczba $L \in (0,1)$, że dla każdego x zachodzi nierówność $|f'(x)| \leqslant L$, to istnieje dokładnie taka liczba p, że $f(p) = p$. Czy teza pozostaje prawdziwa przy założeniu, że $|f'(x)| < 1$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$?

60. Załóżmy, że funkcje $f, g\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne oraz $f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$ dla każdego $x \in (a,b)$. Dowieść, że między każdymi dwoma pierwiastkami funkcji f leży pierwiastek funkcji g.

61. Dowieść, że jeśli $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją, że nierówność $f\bigl(\frac{x+y}{2}\bigr) \leqslant \frac{1}{2}\bigl(f(x) + f(y)\bigr)$ zachodzi dla dowolnych $x, y \in (a,b)$ oraz funkcja f jest ograniczona na pewnym przedziale $(c,d) \subseteq (a,b)$, to f jest wypukła.

62. Dowieść, że jeśli $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją różniczkowalną, że dla dowolnych $x, y \in (a,b)$ istnieje dokładnie jedna liczba c leżąca między x i y, że $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)$, to funkcja f jest ściśle wypukła albo ściśle wklęsła.

63. Dowieść, że jeśli $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w każdym punkcie przedziału $[a,b]$ i $g(x) = f'(x)$ dla każdego $x \in [a,b]$ oraz funkcja $g\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na (a,b), to istnieje taka liczba $c \in (a,b)$, że $g(b) - g(a) = g'(c)(b-a)$ — nie zakładamy tu ciągłości funkcji g w a, ani w b.

64. Niech $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną i niech $p \in (a,b)$. Dowieść, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_y - x_n} = f'(p)$ dla dowolnych ciągów (x_n), (y_n) zbieżnych do p wtedy i tylko wtedy, gdy pochodna f' jest ciągła w punkcie p.

65. Niech $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, różniczkowalną na przedziale (a, b). Dowieść, że jeśli istnieje taka liczba $c \geqslant 0$, że $|f'(x)| \leqslant cf(x)$ dla każdego $x \in (a, b)$ i $f(a) = 0$, to $f(x) = 0$ dla każdego x.

REGUŁA DE L'HOSPITALA, WZÓR TAYLORA

Zaczniemy od jeszcze jednej wersji twierdzenia o wartości średniej, która będzie przydatna w dowodach głównych twierdzeń tego rozdziału.

Twierdzenie 24.1 (Cauchy'ego o wartości średniej)
Jeśli funkcje f i g są ciągłe w każdym punkcie przedziału domkniętego $[a,b]$ i mają pochodne we wszystkich punktach przedziału otwartego (a,b) przy czym $g'(x) \neq 0$, to istnieje co najmniej jeden taki punkt $c \in [a,b]$, że $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Dowód. Ponieważ $g'(x) \neq 0$ dla każdego x, więc na mocy twierdzenia Rolle'a funkcja g jest różnowartościowa na przedziale $[a,b]$, w szczególności $g(b) \neq g(a)$. Rozpatrujemy pomocniczą funkcję h:

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big).$$

Mamy $h(a) = 0 = h(b)$. Funkcja h jest ciągła jako różnica funkcji ciągłych; w punktach wewnętrznych przedziału (a,b) jest różniczkowalna, jako różnica funkcji różniczkowalnych. Możemy zastosować do niej twierdzenie Rolle'a. Istnieje więc taka liczba $c \in (a,b)$, że $0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c)$, zatem

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \ \blacksquare$$

Często trzeba obliczać granicę ilorazu dwu funkcji dążących do 0 lub ∞. Zdarza się, że trzeba obliczyć granicę iloczynu dwu funkcji, z których jedna ma granicę 0, a druga — ∞. Ten drugi przypadek można sprowadzić do pierwszego: $fg = \frac{f}{1/g} = \frac{g}{1/f}$. Bywa, że interesuje nas granica wyrażenia f^g przy czym granicą f jest 1, a granicą g jest ∞. Wzór $f^g = e^{g\cdot\ln f}$ pozwala problem zredukować do obliczania granicy iloczynu, więc w dalszym ciągu do obliczania granicy ilorazu. Zdarzają się też inne sytuacje, w których nie są spełnione założenia dotychczas sformułowanych twierdzeń o granicach. Podobnie jak w przypadku ciągów istnieje twierdzenie, które w wielu sytuacjach ułatwia znalezienie granicy. Jest to tzw. reguła de l'Hospitala, francuskiego markiza, który po wysłuchaniu wykładów Jana Bernoulliego wydał drukiem notatki z nich pod tytułem *Analyse des infiniment petites* [24.1], co spowodowało protesty rzeczywistego autora tekstu, ale wtedy nie istniało jeszcze pojęcie praw autorskich. Twierdzenie, które znajduje się niżej, pochodzi z tej właśnie książki i — według historyków matematyki — powinno mieć inną nazwę.

Twierdzenie 24.2 (reguła de l'Hospitala)
Załóżmy, że funkcje $f, g\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne w każdym punkcie przedziału (a,b) oraz że $g(x) \neq 0 \neq g'(x)$ dla każdego $x \in (a,b)$. Jeśli istnieje granica $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = G \in [-\infty, +\infty]$ i spełniony jest jeden z dwóch warunków:

$$1^\circ \ \lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)\,, \qquad 2^\circ \ \lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty\,,$$

to iloraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ ma granicę przy $x \to a$ oraz $G = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Dowód. Udowodnimy najpierw twierdzenie przy bardzo mocnych założeniach. Chodzi nam o to, by wyjaśnić jego sens. Dowód w przypadku ogólnym podamy potem. Założymy mianowicie, że $a > -\infty$, że zachodzi warunek 1° oraz że istnieją **skończone** granice $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ i $\lim\limits_{x\to a} g'(x)$, przy czym ta druga jest różna od 0. W tej sytuacji można dookreślić funkcje f, g w punkcie a przyjmując $f(a) = 0 = g(a)$. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji f rozpatrywanej na przedziale $[a,x]$ wynika, że $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$ dla pewnego $c_x \in (a,x)$. Stąd wynika natychmiast, że $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$. Wykazaliśmy więc, że w tym przypadku funkcję f można potraktować jako określoną w punkcie a i wtedy $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$. To samo dotyczy oczywiście funkcji g. Oczywiście w obu przypadkach mamy na myśli różniczkowalność prawostronną. Niech $r(h) = \frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h}$ dla $h \neq 0$ oraz $r(0) = 0$. Oczywiście $\lim\limits_{h\to 0} r(h) = 0$. Analogicznie niech $\rho(h) = \frac{g(a+h)-g(a)-g'(a)h}{h}$.

[24.1] **Analiza nieskończenie małych**. Trzeba jednak powiedzieć, że tylko nieliczni potrafią zanotować zrozumiale wykład.

Wtedy $\lim\limits_{h\to 0}\rho(h)=0$. Stąd możemy wywnioskować, że

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-0}{g(x)-0}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(a)(x-a)+(x-a)r(x-a)}{g'(a)(x-a)+(x-a)\rho(x-a)}=$$
$$=\frac{f'(a)+r(x-a)}{g'(a)+\rho(x-a)}\xrightarrow[x\to a]{}\frac{f'(a)}{g'(a)}\,.$$

Ostatnie przejście graniczne jest wykonalne, bo założyliśmy **na razie**, że $g'(a)\neq 0$.

W dowodzie tym wykorzystaliśmy w istotny sposób założenia $f(a)=g(a)=0$. Oczywiście bez tych założeń teza może być w konkretnej sytuacji prawdziwa jedynie przypadkiem — pochodne decydują o wielkości funkcji w otoczeniu punktu, w którym wartością funkcji jest 0, jeśli $f(a)\neq 0$, to ,,w pierwszym przybliżeniu" $f(x)\approx f(a)$!

A teraz dowód właściwego twierdzenia. Niech m, M będą dwiema liczbami rzeczywistymi, takimi że $m<G<M$. Jeśli $G=-\infty$, to oczywiście nie rozpatrujemy m, jeśli $G=+\infty$, to nie rozpatrujemy M. Niech $\widetilde{m},\widetilde{M}$ będą takimi liczbami, dla których $m<\widetilde{m}<G<\widetilde{M}<M$. Ponieważ $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=G$, więc istnieje liczba $c\in(a,b)$, taka że $\widetilde{m}<\frac{f'(x)}{g'(x)}<\widetilde{M}$ dla $x\in(a,c)$. Z twierdzenia Cauchy'ego o wartości średniej wynika, że jeżeli $a<x<y<c$, to

$$\widetilde{m}<\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}<\widetilde{M}\,. \tag{H}$$

Załóżmy najpierw, że $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0=\lim\limits_{x\to a}g(x)$. Z tych dwu równości i z twierdzenia o granicy ilorazu funkcji wynika, że

$$m<\widetilde{m}\leqslant\lim_{x\to a}\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}=\frac{f(y)}{g(y)}\leqslant\widetilde{M}<M\,.$$

Stąd i z definicji granicy od razu wynika, że $\lim\limits_{y\to a}\frac{f(y)}{g(y)}=G$.

Teraz zakładamy, że $\lim\limits_{x\to a}|g(x)|=+\infty$. Ustalmy $y\in(a,c)$. Istnieje taka liczba $c_1\in(a,y)\subset(a,c)$, że jeśli $a<x<c_1$, to $\frac{g(y)}{g(x)}<1$, zatem $1-\frac{g(y)}{g(x)}>0$. Mamy $\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}=\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(y)}{g(x)}}{1-\frac{g(y)}{g(x)}}$. Nierówności można mnożyć przez liczby dodatnie, więc nierówność (H) jest równoważna następującej

$$\widetilde{m}\Big(1-\tfrac{g(y)}{g(x)}\Big)+\tfrac{f(y)}{g(x)}<\tfrac{f(x)}{g(x)}<\widetilde{M}\Big(1-\tfrac{g(y)}{g(x)}\Big)+\tfrac{f(y)}{g(x)}\,.$$

Mamy $\lim\limits_{x\to a}\widetilde{m}\Big(1-\frac{g(y)}{g(x)}\Big)+\frac{f(y)}{g(x)}=\widetilde{m}$, bo $\lim\limits_{x\to a}|g(x)|=+\infty$ i y jest ustalone. Wynika stąd, że istnieje taka liczba $c_2\in(a,c_1)$, że jeśli $x\in(a,c_2)$, to $m<\widetilde{m}\Big(1-\frac{g(y)}{g(x)}\Big)+\frac{f(y)}{g(x)}<\frac{f(x)}{g(x)}$. Po ewentualnym zmniejszeniu c_2 otrzymujemy nierówność podwójną:

$$m<\widetilde{m}\Big(1-\tfrac{g(y)}{g(x)}\Big)+\tfrac{f(y)}{g(x)}<\tfrac{f(x)}{g(x)}<\widetilde{M}\Big(1-\tfrac{g(y)}{g(x)}\Big)+\tfrac{f(y)}{g(x)}<M\,,$$

a z niej wynika, że $m<\frac{f(x)}{g(x)}<M$, więc $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=G$. Dowód został zakończony. ■

Uwaga 24.3

Twierdzenie pozostaje prawdziwe dla granicy $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}$ po kosmetycznych zmianach w założeniach i tezie. Stąd wynika, że można je też stosować w przypadku granic dwustronnych. ■

Uwaga 24.4

Istnieje ścisła analogia między regułą de l'Hospitala i twierdzeniem Stolza. Te rozważania nie będą ścisłe, bo mówić tu będziemy raczej o intuicjach. Ciąg można traktować jako funkcję określoną na zbiorze wszystkich liczb naturalnych. Wtedy $b=+\infty$. Niestety dziedzina nie jest w tym przypadku przedziałem, więc nie można mówić o pochodnej. Można jednak spojrzeć na zagadnienie nieco inaczej. Pochodna była nam potrzebna do oszacowania różnicy $f(x)-f(a)$, przy czym interesowała nas minimalna możliwa zmiana argumentu. Pisaliśmy przy odpowiednich założeniach, że $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\approx\frac{f'(a)}{g'(a)}$. W przypadku ciągu minimalna możliwa zmiana argumentu to 1. Wobec tego zamiast ilorazu pochodnych $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, który przybliża interesujący nas iloraz różnicowy $\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}=\frac{f(x+h)-f(x)}{g(x+h)-g(x)}$ rozpatrujemy iloraz $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$. W twierdzeniu Stolza zakładaliśmy, że ciąg (b_n) jest ściśle monotoniczny. W regule de l'Hospitala też występuje to założenie, zakładamy mianowicie, że pochodna funkcji g nie przyjmuje wartości 0 [24.2], z czego wynika, że jest ona albo dodatnia, albo ujemna, a to pociąga za sobą ścisłą monotoniczność funkcji g. ■

Przykład 24.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$. Możemy próbować zastosować regułę de l'Hospitala, bo mianownik ma granicę nieskończoną i jego pochodna, e^x, jest różna od 0 wszędzie. Nie jest ważne jaka jest granica licznika, a nawet czy licznik ma granicę. Iloraz pochodnych to $\frac{ax^{a-1}}{e^x}$, więc jest to wyrażenie tego samego typu co wyjściowe. Istotne jest pojawienie się w wykładniku $a-1$ w miejscu a. Jeśli $a \leqslant 1$, to licznik jest ograniczony z góry na półprostej $[1,+\infty)$, a mianownik dąży do $+\infty$, więc iloraz dąży do 0.

Niech k oznacza dowolną liczbę naturalną. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich wykładników $a \leqslant k$. Niech $\alpha \leqslant k+1$. Wykażemy, że $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$. Zastosujemy regułę de l'Hospitala. Ponieważ $\big(x^\alpha\big)' = \alpha x^{\alpha-1}$ i $\alpha - 1 \leqslant k+1-1 = k$, więc — na mocy założenia indukcyjnego — $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^x} = 0$.

Stąd i z twierdzenia de l'Hospitala wynika, że $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$, co kończy dowód. ■

Uwaga 24.5
Oczywiście wynik z ostatniego przykładu można otrzymać stosując jedynie elementarne metody: wykładnik a można zastąpić liczbą naturalną m większą od a, potem skorzystać z nierówności $e^x > \big(1+\frac{x}{n}\big)^n$ prawdziwej dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby $x>0$, następnie skorzystać z tego, że granicą ilorazu wielomianu stopnia m przez wielomian stopnia $n>m$ przy $x\to\infty$ jest liczba 0. Pokazaliśmy tu po prostu jak można wykorzystać twierdzenie de l'Hospitala, ta metoda pozwala na obliczanie granic w wielu sytuacjach, w których metody elementarne bywają trudne w użyciu, bo wymagają dobrego pomysłu! ■

Przykład 24.2 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$ dla każdego $a>0$ — tę

[24.2] bo ma własność Darboux (przyjmowania wartości pośrednich), niezależnie od tego, czy jest ciągła.

równość już poznaliśmy, ale pokażemy jak można ją uzyskać za pomocą reguły de l'Hospitala. Ponieważ mianownik jest funkcją ściśle rosnącą o granicy $+\infty$, więc obliczymy granicę ilorazu pochodnych: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1/x}{ax^{a-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{ax^a}=0$. Wobec tego istnieje też granica ilorazu funkcji i również jest równa 0. ■

Jest jasne, że funkcję x^a można w ostatnim przykładzie zastąpić dowolnym wielomianem dodatniego stopnia.

Przykład 24.3 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x=1$. Mamy bowiem: $x^x=e^{x\ln x}$. Funkcja wykładnicza jest ciągła, więc wystarczy udowodnić, że $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$. Mamy

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to+\infty}\tfrac{1}{y}\ln\tfrac{1}{y}=-\lim_{y\to+\infty}\tfrac{\ln y}{y}=0$$

— ostatnia równość wynika z wyniku uzyskanego w poprzednim przykładzie dla $a=1$, przedostatnia — z tego, że $\ln\frac{1}{y}=-\ln y$. ■

Przykład 24.4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x^3}$. Mamy $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}x-x=0=\lim\limits_{x\to 0}x^3$, więc można zastosować regułę de l'Hospitala. Zachodzi równość $(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$. Mamy

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{(\operatorname{tg}x-x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\tfrac{1+\operatorname{tg}^2 x-1}{3x^2}=\tfrac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\tfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^2=\tfrac{1}{3}.$$

Stąd i z twierdzenia de l'Hospitala wynika, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x^3}=\frac{1}{3}$. ■

Przykład 24.5 Znaleźć taki wielomian $w\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, jeśli istnieje, że $\lim\limits_{x\to 0}x^{-4}\big(\sin x-w(x)\big)=0$. Jest rzeczą oczywistą, że jeśli taki wielomian istnieje, to istnieje również wielomian stopnia nie większego niż 4 spełniający ten warunek (bo $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^k}{x^4}=0$ dla $k>4$). Załóżmy, że $w(x)=w_0+w_1x+w_2x^2+w_3x^3+w_4x^4$. Mamy $-w_0=\lim\limits_{x\to 0}\big(\sin x-w(x)\big)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-w(x)}{x^4}\cdot x^4=0$. Jeśli w istnieje, to $w_0=0$. Wobec tego
$0=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-w(x)}{x^4}\cdot x^3=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-(w_1x+w_2x^2+w_3x^3+w_4x^4)}{x}=1-w_1$, więc $w_1=1$. Kontynuując otrzymujemy (teraz stosujemy regułę de l'Hospitala dwa razy)

$$0=\lim_{x\to 0}\tfrac{\sin x-(x+w_2x^2+w_3x^3+w_4x^4)}{x^4}\cdot x^2=\lim_{x\to 0}\tfrac{\sin x-x}{x^2}-w_2=$$
$$=\lim_{x\to 0}\tfrac{\cos x-1}{2x}-w_2=\lim_{x\to 0}\tfrac{-\sin x}{2}-w_2=w_2\,.$$

Powtarzamy to rozumowanie stosując regułę de l'Hospitala dwa razy i otrzymujemy

$$0=\lim_{x\to 0}\tfrac{\sin x-(x+w_3x^3+w_4x^4)}{x^4}\cdot x=\lim_{x\to 0}\tfrac{\sin x-x}{x^3}-w_3=$$
$$=\lim_{x\to 0}\tfrac{\cos x-1}{3x^2}-w_3=\lim_{x\to 0}\tfrac{-\sin x}{6x}-w_3=-\tfrac{1}{6}-w_3\,.$$

Stąd mamy $w_3=-\frac{1}{6}$. Powtórzymy rozumowanie jeszcze raz.

$$0=\lim_{x\to 0}\tfrac{\sin x-(x-\frac{1}{6}x^3+w_4x^4)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\tfrac{\sin x-x+\frac{1}{6}x^3}{x^3}-w_4=$$
$$=\lim_{x\to 0}\tfrac{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2}{3x^2}-w_4=\lim_{x\to 0}\tfrac{-\sin x+x}{6x}-w_4=$$
$$=\lim_{x\to 0}\tfrac{-\cos x+1}{6}-w_4=-w_4\,.$$

Udowodniliśmy, że wielomian $x-\frac{1}{6}x^3$ spełnia żądany warunek. Oczywiście spełnia go też wielomian $x-\frac{1}{6}x^3+1410x^{1683}$ i wiele innych. Wśród nich jedynym wielomianem, którego stopień jest mniejszy (ostro) niż 5 jest wielomian $x-\frac{1}{6}x^3$. ■

W ostatnich przykładach stosowaliśmy regułę de l'Hospitala nie sprawdzając zawczasu tego, czy iloraz pochodnych ma granicę. Okazywało się w końcu, że ma i dopiero wtedy cała procedura była uzasadniona, wcześniej nie były sprawdzone założenia twierdzenia, więc z formalnego punktu nie wolno było go jeszcze stosować. Mogłoby okazać się, że granica nie istnieje i wtedy nie bylibyśmy w stanie nic wywnioskować, o czym świadczy poniższy przykład.

Przykład 24.6 Znajdziemy granicę $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$. Stosujemy regułę de l'Hospitala, bo $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=\infty$. Mamy więc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$, a ta granica nie istnieje, wystarczy przyjąć $x_n=\frac{1}{n\pi}$, by się o tym przekonać. Wobec tego reguła de l'Hospitala nie pomogła nam w rozwiązaniu tego problemu.

Oczywiście $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|$, zatem $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$. ■

Przykład 24.7 Obliczymy granicę $\lim\limits_{x\to0}\frac{x(\ln(\cos x+x^4\cdot\sqrt{1+x^2}\,))}{\operatorname{tg}x-\sin x}$. Jasne jest, że zarówno licznik jak i mianownik mają granicę 0. Jednak pochodne wypisanych funkcji nie wyglądają zbyt przyjaźnie. Postaramy się uprościć problem zastępując niektóre funkcje wielomianami. Zaczniemy od mianownika. Znajdziemy taką liczbę naturalną k, że granica $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^k}$ będzie skończona i różna od 0. Stosujemy regułę de l'Hospitala:

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{1+\operatorname{tg}^2x-\cos x}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to0}\frac{2\operatorname{tg}x(1+\operatorname{tg}^2x)+\sin x}{k(k-1)x^{k-2}}\,.$$

Jeśli $k\leqslant 2$, to ta granica jest równa 0, jeśli $k\geqslant 4$, to granica **prawostronna** jest równa ∞. Wobec tego $k=3$ i wtedy

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2\operatorname{tg}x(1+\operatorname{tg}^2x)+\sin x}{3(3-1)x^{3-2}}=\frac{2\cdot1}{3\cdot2}+\frac{1}{3\cdot2}=\frac12\,.$$

Skorzystaliśmy „po drodze" z równości $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1=\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}$. Możemy więc obliczać granicę korzystając z równości

$$\lim_{x\to0}\frac{x(\ln(\cos x+x^4\cdot\sqrt{1+x^2}\,))}{\operatorname{tg}x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x(\ln(\cos x+x^4\cdot\sqrt{1+x^2}\,))}{x^3}\cdot\frac{x^3}{\operatorname{tg}x-\sin x}=$$
$$=2\lim_{x\to0}\frac{x(\ln(\cos x+x^4\cdot\sqrt{1+x^2}\,))}{x^3}=2\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x+x^4\cdot\sqrt{1+x^2}\,)}{x^2}\,.$$

Mamy $\lim\limits_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$, więc obliczymy granicę

$$\lim_{x\to0}\frac{-1+\cos x+x^4\cdot\sqrt{1+x^2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-1+\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2x}=-\frac12\,.$$

Wynika stąd, że $\lim\limits_{x\to0}\frac{x(\ln(\cos x+x^4\cdot\sqrt{1+x^2}\,))}{\operatorname{tg}x-\sin x}=2\cdot(-\frac12)=-1$. ■

W kilku przypadkach obliczaliśmy pochodną pochodnej. To oczywiście zdarza się często, gdy trzeba ustalić jakie własności ma funkcja. Przyjmuje się następujące określenie.

Definicja 24.6 (pochodnej wyższego rzędu)
Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze zawierającym przedział otwarty I zawierający punkt p. Niech $f^{(0)}(x)=f(x)$ dla każdego x z dziedziny funkcji f. Załóżmy, że funkcja f ma pochodną $(n-1)$–ego rzędu $f^{(n-1)}$ w każdym punkcie przedziału I. Jeśli funkcja $f^{(n-1)}$ ma w punkcie p pochodną $\left(f^{(n-1)}\right)'(p)$, to tę pochodną nazywamy *pochodną n–tego rzędu funkcji f w punkcie*

p i oznaczamy przez $f^{(n)}(p)$. Jeśli pochodna n–tego rzędu jest *skończona*, to mówimy, że funkcja f jest n*–krotnie różniczkowalna* w tym punkcie. ∎

Jest jasne, że $f' = f^{(1)}$. Zamiast pisać $f^{(2)}$ piszemy na ogół f''. Niektórzy matematycy zamiast $f^{(3)}$ piszą f'''.

Przykład 24.8 Niech $f(x) = ax + b$. Wtedy dla każdego x mamy $f'(x) = a$, więc $f''(x) = 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wobec tego również $f^{(3)}(x) = 0$, a stąd wynika, że również $f^{(n)}(x) = 0$ dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ i każdej liczby rzeczywistej x. ∎

Przykład 24.9 Niech $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wtedy $f'(x) = 2ax + b$, więc $f''(x) = 2a$, zatem dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ i każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f^{(n)}(x) = 0$. ∎

Przykład 24.10 Niech f będzie wielomianem stopnia m, tzn. istnieją takie liczby rzeczywiste a_0, a_1, $\ldots, a_m$, przy czym $a_m \neq 0$, że dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$. Wtedy $f^{(m)}(x) = m! a_m$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz $f^{(n)}(x) = 0$ dla każdej liczby naturalnej $n > m$ i każdej liczby rzeczywistej x.
Twierdzenie to wykazaliśmy już w przypadku $m = 1, 2$. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich wielomianów stopnia *mniejszego* niż m. Wynika stąd, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x zachodzi równość $f'(x) = a_1 + 2a_2 + \cdots + m a_m x^{m-1} x$. Ponieważ f' jest wielomianem stopnia $m-1$, więc $(f')^{(m-1)}(x) = (m-1)! \cdot m a_m = m! a_m$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Ponieważ $(f')^{(m-1)} = f^{(m)}$, więc dla każdej liczby rzeczywistej x mamy $f^{(m)}(x) = m! a_m$. Stąd oczywiście wynika, że jeśli $n > m$ jest liczbą naturalną, to $f^{(n)}(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. ∎

Przykład 24.11 Niech $f(x) = e^x$. Zachodzi wtedy równość $f^{(1)}(x) = f'(x) = e^x$. Wobec tego dla każdej liczby naturalnej n i każdej rzeczywistej x zachodzi równość $f^{(n)}(x) = e^x$.

Przykład 24.12 Niech $f(x) = \sin x$. Zachodzi wtedy równość

$f^{(1)}(x) = f'(x) = \cos x$. Zatem $f^{(2)}(x) = f''(x) = -\sin x = -f(x)$. Stąd wynika, że $f^{(3)}(x) = -f'(x) = -\cos x$ oraz $f^{(4)}(x) = -f''(x) = \sin x$. Jasne jest, że od tego momentu będą się kolejno pojawiać, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$ i znów $\sin x$ itd. Można więc napisać $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x$ oraz $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$ dla dowolnego $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ i $x \in \mathbb{R}$. ■

Przykład 24.12 Tak jak w poprzednim przykładzie wykazujemy, że $(\cos x)^{(2n)} = (-1)^n \cos x$ i $(\cos x)^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \sin x$. ■

Przykład 24.13 Niech $f(x) = \ln x$. Mamy więc następującą równość $f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Wobec tego $f^{(2)}(x) = f''(x) = \left(x^{-1}\right)' = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2}$. Następnie $f^{(3)}(x) = \left(-x^{-2}\right)' = 2x^{-3}$. Stąd $f^{(4)}(x) = 2(-3)x^{-4} = -3!x^{-4}$. Analogicznie $f^{(5)}(x) = 4!x^{-5}$ itd. Ogólnie możemy napisać

$$f^{(n)}(x) = (\ln(x))^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$$

dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ i każdej liczby $x \in \mathbb{R}$. ■.

Przykład 24.14 Obliczymy kilka pochodnych funkcji tangens. Mamy $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Wobec tego zachodzi równość $(\operatorname{tg} x)'' = \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)' = 2\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 2(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x)$ — skorzystaliśmy z wzoru na pochodną funkcji złożonej. Stąd

$$(\operatorname{tg} x)^{(3)} = 2(1 + 3\operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 2(1 + 4\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg}^4 x),$$

a stąd otrzymujemy równość

$$(\operatorname{tg} x)^{(4)} = 2(8\operatorname{tg} x + 12\operatorname{tg}^3 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) = \\ = 8(2\operatorname{tg} x + 5\operatorname{tg}^3 x + 3\operatorname{tg}^5 x).$$

Te obliczenia można kontynuować, jednak w tym przypadku nie da się napisać równie prosto jak w poprzednich przypadkach ogólnego wzoru na n–tą pochodna funkcji. Można jednak zauważyć, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje taki wielomian w_n zmiennej t stopnia $n+1$, o nieujemnych współczynnikach, podzielny przez wielomian $1 + t^2$, że $(\operatorname{tg} x)^{(n)} = w_n(\operatorname{tg} x)$. Wielomian w_n jest funkcją parzystą, gdy n jest liczbą nieparzystą, a funkcją nieparzystą, gdy n jest liczbą parzystą. ■

Przykład 24.15 Znajdziemy teraz wzór na n–tą pochodną funkcji $\frac{x}{x^2+5x+6}=\frac{3}{x+3}-\frac{2}{x+2}$. Wystarczy znaleźć n–tą pochodną funkcji postaci $\frac{1}{x+c}$. Mamy $\left(\frac{1}{x+c}\right)'=-(x+c)^{-2}$. Wobec tego $\left(\frac{1}{x+c}\right)''=-(-2)(x+c)^{-2-1}=2(x+c)^{-3}$. Następnie otrzymujemy $\left(\frac{1}{x+c}\right)^{(3)}=-6(x+c)^{-4}=-6!(x+c)^{-4}$. Bez żadnych trudności piszemy wzór ogólny na n–tą pochodną tej funkcji: $\left(\frac{1}{x+c}\right)^{(n)}=(-1)^n n!(x+c)^{-n-1}$. Stąd wynika już od razu, że $\left(\frac{x}{x^2+5x+6}\right)^{(n)}=(-1)^n n!\left(3(x+3)^{-n-1}-2(x+2)^{-n-1}\right)$. Wypada jednak zaznaczyć, że bez rozłożenia na czynniki mianownika nasze szanse na sukces byłyby mniejsze. ■

Przykład 24.16 Wykazaliśmy poprzednio, że jeśli funkcja jest różniczkowalna na pewnym *przedziale* i jej pochodna jest na tym przedziale równa 0, to funkcja ta jest stała. Załóżmy teraz, że $f''(x)=0$ dla wszystkich $x\in(a,b)$ dla pewnych $a,b\in\mathbb{R}$. Wtedy na mocy poprzednio wykazanego stwierdzenia funkcja f' jest stała na przedziale (a,b). Niech $f'(x)=A$ dla wszystkich $x\in(a,b)$. Niech $g(x)=f(x)-Ax$. Zachodzi oczywista równość $g'(x)=0$ dla każdej liczby $x\in(a,b)$. Wobec tego g jest funkcją stałą. Oznaczając jej jedyną wartość przez B otrzymujemy równość $B=g(x)=f(x)-Ax$. Stąd od razu wynika, że $f(x)=Ax+B$ dla każdej liczby $x\in(a,b)$. Wykazaliśmy więc, że jeśli druga pochodna jest tożsamościowo równa 0, to funkcja jest wielomianem stopnia nie większego niż 1. Podobnie można wykazać, że jeśli trzecia pochodna jest tożsamościowo równa 0 na pewnym przedziale, to funkcja jest na tym przedziale wielomianem stopnia nie większego niż 2. Jeśli bowiem $f^{(3)}(x)=0$ dla każdego $x\in(a,b)$, to na mocy poprzedniego stwierdzenia funkcja f' jest wielomianem postaci $Ax+B$. Zgadujemy, że $\left(\frac{1}{2}Ax^2+Bx\right)'=$ $=Ax+B$. Stąd wynika, że $\left(f(x)-\frac{1}{2}Ax^2-Bx\right)'=0$ dla wszystkich $x\in(a,b)$. Wobec tego funkcja $f(x)-\frac{1}{2}Ax^2-Bx$ jest stała, co kończy dowód tego, że f jest wielomianem, którego stopień jest mniejszy niż 3. Jest całkowicie jasne, że kontynuując to rozumowanie wykażemy, że jeśli n–ta pochodna pewnej funkcji jest równa 0 w każdym punkcie pewnego przedziału, to funkcja ta na tym przedziale jest wielomianem, którego stopień jest mniejszy niż n. ■

Przykład 24.17 Załóżmy, że f jest funkcją różniczkowalną na pewnym przedziale oraz że dla pewnej liczby rzeczywistej k równość $f'(x) = kf(x)$ zachodzi dla wszystkich x. Wykażemy, że w tej sytuacji istnieje stała $C \in \mathbb{R}$, taka że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x) = Ce^{kx}$. W celu uzyskania tej równości starczy wykazać, że iloraz $\dfrac{f(x)}{e^{kx}}$ jest funkcja stałą, czyli że pochodna tego ilorazu jest wszędzie równa 0. Mamy

$$\left(\frac{f(x)}{e^{kx}}\right)' = \frac{f'(x)e^{kx} - ke^{kx}f(x)}{e^{2kx}} = \frac{f'(x) - kf(x)}{e^{kx}} = 0$$

— ostatnia równość wynika z założenia o funkcji f. Wykazaliśmy więc, że iloraz jest funkcją stałą. Tę stałą oznaczamy przez C. Jasne jest, że $f(x) = Ce^{kx}$. ■

Przykład 24.18 Rozważymy nieco bardziej skomplikowaną zależność niż w poprzednim przykładzie. Mianowicie założymy, że f jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną w każdym punkcie prostej [24.3] oraz że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f''(x) = f(x)$. Bez trudu stwierdzamy, że funkcje $g_1(x) = e^x$ oraz $g_2(x) = e^{-x}$ spełniają to równanie. Mając dwie, można ich znaleźć nieskończenie wiele. Jeśli c_1 i c_2 są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to funkcja $c_1g_1(x) + c_2g_2(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$ też spełnia to równanie. Funkcja $u(x) = f(x) - c_1g_1(x) - c_2g_2(x)$ również spełnia to równanie. Liczby c_1 i c_2 można dobrać w taki sposób, że $u(0) = 0 = u'(0)$ — wystarczy rozwiązać układ równań: $f(0) = c_1 + c_2$, $f'(0) = c_1 - c_2$ traktując c_1 i c_2 jako niewiadome, a $f(0)$ i $f'(0)$ jako dane liczby. Otrzymujemy $c_1 = =\frac{1}{2}\left(f(0) + f'(0)\right)$ oraz $c_2 = \frac{1}{2}\left(f(0) - f'(0)\right)$. Szukamy więc takiej dwukrotnie różniczkowalnej funkcji u, że dla każdego x za-

[24.3] Nie jest istotne, że dziedziną jest prosta, może być dowolny przedział.

chodzą wzory $u''(x) = u(x)$ i $u'(0) = 0 = u(0)$. Wykażemy, że u to funkcja zerowa. Niech $v(x) = u'(x) - u(x)$. Funkcja v jest różniczkowalna, $v'(x) + v(x) = u''(x) - u'(x) + u'(x) - u(x) = 0$ dla każdej liczby x i $v(0) = 0$. Istnieje więc takie C, że $v(x) = Ce^{-x}$ dla każdego x – twierdzenie z poprzedniego przykładu dla $k = -1$. W tej sytuacji $0 = v(0) = Ce^{-0} = C$, zatem $v(x) = 0$ dla każdej liczby x. Wynika stąd, że $u'(x) = u(x)$ dla każdej liczby x, więc istnieje taka liczba $\tilde{C}$, że $u(x) = \tilde{C}e^x$ dla każdego x — znów stosujemy rezultat z poprzedniego przykładu, tym razem dla $k = 1$. Ponieważ $0 = u(0) = \tilde{C}e^0 = \tilde{C}$, więc $u(x) = 0$ dla każdego x, zatem $f(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)$. ■

Przykład 24.19 Wykazaliśmy w poprzednich przykładach, że jeśli któraś z równości $f^{(n)}(x) = 0$, $f'(x) = kf(x)$, $f''(x) = f(x)$ jest spełniona w każdym punkcie pewnego przedziału, to funkcję f można opisać prostym wzorem. Omówimy jeszcze jeden przykład tego typu. Założymy, że dla wszystkich punktów pewnego przedziału I spełniony jest wzór $f''(x) = -f(x)$. [24.4]

Wykażemy, że w tej sytuacji istnieją liczby $a, b \in \mathbb{R}$, takie że dla każdej liczby $x \in I$ zachodzi równość $f(x) = a\cos x + b\sin x$. Niech p oznacza dowolny punkt przedziału I. Jasne jest, że w każdym punkcie $x \in I$ zachodzi równość

$$(a\cos x + b\sin x)'' = -(a\cos x + b\sin x),$$

tzn. funkcja postaci $a\cos x + b\sin x$ spełnia rozpatrywane równanie. Wybierzemy liczby a i b tak, by miały miejsce równości $f(p) = a\cos p + b\sin p$ oraz $f'(p) = -a\sin p + b\cos p$, czyli $a = f(p)\cos p - f'(p)\sin p$ oraz $b = f(p)\sin p + f'(p)\cos p$.

Niech $u(x) = f(x) - a\cos x - b\sin x$. Mamy $u''(x) = -u(x)$ dla każdej liczby $x \in I$ oraz że $u(p) = 0 = u'(p)$. Stąd wynika, że $\left((u'(x))^2 + (u(x))^2\right)' = 2\left(u''(x)u'(x) + u'(x)u(x)\right) = 0$. Wobec tego funkcja $(u'(x))^2 + (u(x))^2$ jest stała na przedziale I, zatem $(u'(x))^2 + (u(x))^2 = (u'(p))^2 + (u(p))^2 = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

[24.4] Taka zależność, a dokładniej $f'' = -\frac{g}{l}f$ pojawia się przy analizowaniu ruchu wahadła matematycznego o długości l przy założeniu, że amplituda jest tak mała, że przybliżenie $f \approx \sin f$ jest dostatecznie dokładne, g to przyspieszenie ziemskie.

Suma *kwadratów* liczb rzeczywistych jest równa 0 wtedy i tylko wtedy, gdy obie te liczby są zerami. Wobec tego dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $u(x) = 0$, a zatem $f(x) = a\cos x + b\sin x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Okazało się, że również w tym przypadku można łatwo opisać wszystkie funkcje spełniające równanie $f'' = -f$.

Tego typu równania nazywane są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Istnieje obszerna teoria równań różniczkowych zwyczajnych. Nie mamy tu możliwości omawiania jej. Jest ona stosowana również w wielu dziedzinach poza matematyką, przede wszystkim w fizyce, w chemii, w technice, również w ekonomii. ■

Znajdowanie pochodnych wyższego rzędu polega na obliczaniu pochodnych rzędu pierwszego, więc właściwie już się z tym zapoznaliśmy. Jeśli chodzi o wzory ogólne, to oczywistym — w zasadzie niewartym wspomnienia — jest wzór na n–tą pochodną sumy dwu funkcji różniczkowalnych n–krotnie:

$$(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)\,.$$

Leibniz zauważył, że jeśli funkcje f i g są n–krotnie różniczkowalne, to zachodzi równość przypominająca wzór dwumianowy Newtona:

$$(f\cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(n-j)}(x) g^{(j)}(x) \tag{Lz}$$

Prosty dowód tego wzoru wykorzystujący wzór na pochodną iloczynu dwu funkcji i znaną równość $\binom{n}{j} + \binom{n}{j+1} = \binom{n+1}{j+1}$, dzięki której współczynniki dwumianowe można obliczać za pomocą trójkąta Pascala, pozostawiamy Czytelnikom w charakterze ćwiczenia. Wzory na n–tą pochodną złożenia i funkcji odwrotnej są na tyle skomplikowane, że właściwie w ogóle nieprzydatne, zresztą trudno je znaleźć w literaturze.

Przejdziemy teraz do sformułowania jednego z najważniejszych wzorów analizy matematycznej, tzw. wzoru Taylora. Pierwszą pochodną funkcji wprowadziliśmy po to, by móc przybliżyć funkcję w pobliżu interesującego nas punktu wielomianem stopnia pierwszego. Drugie pochodne i pochodne wyższych rzędów pojawiły się w kilku miejscach w związku z bardziej szczegółowym badaniem funkcji . Okazuje się, że definicję pochodnej, związaną z przybliżaniem funkcji wielomianem stopnia pierwszego lub zerowego, można uogólnić. Tym zajmiemy się teraz. Efektem będzie zapowiadany wzór Taylora.

Poprzednio błąd przybliżenia miał być mały w porównaniu z pierwszą potęgą zmiany argumentu. Teraz zażądamy, by był mały w porównaniu z wyższymi potęgami h. Zmusi nas do użycia wielomianów stopnia wyższego niż 1.

Jeśli $0 < |h| < 1$, to $|h| > h^2 > |h|^3 > h^4 > \ldots$. Jasne jest też, że jeśli h jest bardzo blisko 0, to h^2 jest znacznie bliżej zera niż h, h^3 znacznie bliżej niż h^2 itd. Jest tak, bo $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^2}{h} = 0$ i ogólnie, jeśli $m > n$, to $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^m}{h^n} = 0$. Można myśleć o tym tak: jeżeli h jest bardzo małe i $m > n$, to liczba $h^m = h^{m-n}\cdot h^n$ stanowi znikomą część liczby h^n, oczywiście obie są wtedy bardzo małe, ale jedna jest istotnie mniejsza niż druga.

Wobec tego, z naszego punktu widzenia, różnica między dwiema funkcjami f i g będzie mała, jeśli będzie dążyć do 0 *po podzieleniu przez* h^n, gdzie oznacza liczbę naturalną. Następujący lemat podaje warunek konieczny i dostateczny na to, by jedna funkcja była bliska drugiej w tym sensie.

Lemat 24.7 (o funkcjach ściśle przylegających)
Jeśli funkcje f i g są n–krotnie różniczkowalne w punkcie 0, to $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x^n} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy pochodne funkcji f i g w punkcie 0 są równe do n–tego rzędu włącznie: $f^{(j)}(0) = g^{(j)}(0)$ dla $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Dowód. Załóżmy, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x^n} = 0$. Oznaczamy $r(x) = f(x) - g(x)$. Udowodnimy, że $r(0) = r'(0) = \ldots = r^{(n)}(0) = 0$. Jeśli że $0 \leqslant j \leqslant n$, to $\lim\limits_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^j} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^n}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x^{n-j} = 0$, bo pierwsza granica jest równa 0, a druga 0 lub 1 w zależności od tego, czy $j < n$ czy też $j = n$. Mamy $\lim\limits_{x\to 0} r(x) = 0$. Stąd i z tego, że funkcja r jest ciągła w punkcie 0, jako różniczkowalna, wynika, że $r(0)=0$. Mamy $0=\lim\limits_{x\to 0}\frac{r(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{r(x)-r(0)}{x}=r'(0)$. Wobec tego $r'(0)=0$.

Teraz wykażemy, że $r''(0)=0$ (zakładając, że $n\geqslant 2$). Stosujemy teraz regułę de l'Hospitala:

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{r'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{r'(x)-r'(0)}{x}=\frac{1}{2}r''(0).$$

Trzecia pochodna też równa jest 0:

$$0=\lim_{x\to 0}\tfrac{r(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\tfrac{r'(x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\tfrac{r''(x)}{6x}=\lim_{x\to 0}\tfrac{r''(x)-r''(0)}{6x}=\tfrac{r^{(3)}(0)}{6}.$$

Powtarzamy procedurę aż do uzyskania równości $\frac{1}{n!}r^{(n)}(0)=0$.

Wykażemy teraz, że jeśli $r(0)=r'(0)=\ldots=r^{(n)}(0)=0$, to $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{r(x)}{x^n}=0$. Stosujemy regułę de l'Hospitala:

$$\lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{r'(x)}{nx^{n-1}}=\ldots=\lim_{x\to 0}\frac{r^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\ldots 2x}.$$

Mamy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{r^{(n-1)}(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{r^{(n-1)}(x)-r^{(n-1)}(0)}{x}=r^{(n)}(0)=0$, co kończy dowód lematu. ■

Wniosek 24.8 (z dowodu)
Jeśli funkcja r jest n–krotnie różniczkowalna w punkcie 0 oraz $r(0)=r'(0)=r''(0)=r^{(n-1)}(0)=0$, to $\lim\limits_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^n}=\frac{r^{(n)}(0)}{n!}$. ■

Z lematu o funkcjach ściśle przylegających wynika, że jeśli chcemy przybliżyć funkcję w otoczeniu punktu p wielomianem w tak, by błąd przybliżenia był mały w porównaniu z h^n, to pochodne tego wielomianu w punkcie 0, do n–tego rzędu włącznie, muszą być równe odpowiednim pochodnym funkcji f w punkcie p: $f^{(j)}(p)=w^{(j)}(0)$. Jeżeli $w(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$, to $w^{(j)}(0)=j!\,a_j$ dla $j=0,1,2,\ldots,n$. Wynika stąd, że powinno być $a_j=\frac{f^{(j)}(p)}{j!}$. To motywuje wprowadzenie następującego określenia.

Definicja 24.9 (wielomianu Taylora i reszty)
Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie p pochodną n–tego rzędu. n–tym wielomianem Taylora funkcji f w punkcie p nazywamy

wielomian

$$T_{p,n,f}(h) = f(p)+f'(p)h+\frac{f''(p)}{2!}h^2+\frac{f^{(3)}(p)}{3!}h^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n$$

zmiennej h. n–tą resztą nazywamy różnicę

$r_n(h) = f(p+h) - T_{p,n,f}(h) =$

$$= f(p+h) - \Big(f(p) + f'(p)h + \tfrac{f''(p)}{2!}h^2 + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n\Big)\,. \ \blacksquare$$

Oczywiście wielomian Taylora określony jest dla wszystkich liczb h, natomiast reszta tylko dla takich h, dla których punkt $p+h$ znajduje się w dziedzinie funkcji f. Jasne jest też, że po to, by móc mówić o pochodnej $f^{(n)}(p)$ trzeba założyć istnienie pochodnej $f^{(n-1)}$ oraz wszystkich pochodnych niższego rzędu w pewnym otoczeniu punktu p. Zachodzi następujące

Twierdzenie 24.10 (G.Peano)
Jeśli f jest funkcją n–krotnie różniczkowalną w punkcie p, to zachodzi równość $\lim\limits_{h\to 0}\frac{r_n(h)}{h^n} = 0$.

Równość $f(p+h) = f(p)+f'(p)h+\frac{f''(p)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n+r_n(h)$ nazywana bywa wzorem Taylora z resztą Peano, jeśli dodamy informację zawartą w twierdzeniu Peano.
Twierdzenie Peano wynika natychmiast z lematu o funkcjach ściśle przylegających. $\blacksquare$

Również z tego lematu wynika, że innego wyboru nie ma, jeśli chcemy mieć tak dokładne przybliżenie i nie chcemy zwiększać stopnia wielomianu ponad niezbędne minimum.

Twierdzenie 24.11 (o jednoznaczności wielomianu Taylora)
Jeśli funkcja f jest n razy różniczkowalna w punkcie p, w jest wielomianem stopnia nie większego niż n, tzn. istnieją takie liczby a_0, $a_1, \ldots, a_n$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą wzory $w(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ i $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(p+h)-w(p)}{h^n} = 0$, to dla każdego $j \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ zachodzi wzór $f^{(j)}(p) = j!a_j$, więc w jest wielomianem Taylora funkcji f w punkcie p. $\blacksquare$

Nadmienić wypada, że Taylor był współczesny Newtonowi, wzór Taylora znaleziony został od razu. Idea przybliżania dokładniejszego niż liniowe była obecna w omawianej teorii od samego początku! Również współczesny Newtonowi był Szkot o nazwisku Maclaurin, którego nazwiskiem opatrywany jest wzór Taylora dla $p=0$. Zaznaczmy jeszcze, że z wzorem Taylora związane jest szereg Taylora funkcji: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n$. Szereg ten może mieć dodatni promień zbieżności lub zerowy. Chcąc o nim mówić trzeba założyć, że funkcja ma w punkcie p pochodne wszystkich rzędów. Nawet wtedy może mieć on zerowy promień zbieżności lub mieć sumę różną od $f(p+h)$. Gdy $p=0$ mówimy o szeregu Maclaurina.

Czytelnik poznał już rozwinięcia w szereg Maclaurina

funkcji wykładniczej o podstawie e: $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$,

funkcji sinus: $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

funkcji kosinus: $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$,

funkcji arkus tangens: $\operatorname{arctg} x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$,

oraz rozwinięcie w szereg Taylora:

funkcji ln wokół punktu $p=1$: $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$,

funkcji potęgowej o wykładniku $a\in\mathbb{R}$ wokół punktu $p=1$: $(1+x)^a=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$.

Przykład 24.20 Rozwiniemy wokół punktu $x=2$ funkcję $\frac{x}{x^2+5x+6}$. Mamy $\frac{x}{x^2+5x+6}=\frac{3}{x+3}-\frac{2}{x+2}=\frac{3}{(x-2)+5}-\frac{2}{(x-2)+4}=$

$$=\frac{3}{5[(x-2)/5+1]}-\frac{2}{2[(x-2)/4+1]}=\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-2}{5}\right)^n-$$

$$-\frac{2}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-2}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{5^{n+1}}-\frac{2}{4^{n+1}}\right)(x-2)^n.$$

Wobec tego n–ty wielomian Taylora w punkcie 2 rozwijanej funkcji jest równy $\frac{1}{10}-\left(\frac{3}{25}-\frac{1}{8}\right)(x-2)+\dots+(-1)^n\left(\frac{3}{5^{n+1}}-\frac{2}{4^{n+1}}\right)(x-2)^n$.

Bez sztuczek algebraicznych, od których zaczęliśmy rozwijanie tej funkcji w szereg, otrzymanie krótkich wzorów na współczynniki wielomianu Taylora byłoby trudniejsze. ■

Uwaga 24.12

Jeśli $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ dla $x\in(-r,r)$, $r>0$, to n-tym wielomianem Taylora funkcji f w punkcie 0 jest $a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$. Dla dowodu wystarczy przekonać się, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\left(a_{n+1}x^{n+1}+a_{n+2}x^{n+2}+\cdots\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}a_jx^j=0$.

Wynika to jednak łatwo z równości: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}a_jx^j=$

$$\lim_{x\to 0}\sum_{j=n+1}^{\infty}a_jx^{j-n}=\lim_{x\to 0}\sum_{j=1}^{\infty}a_{j+n}x^j=\sum_{j=1}^{\infty}a_{j+n}0^j=0.$$

Przedostatnia równość wynika np. z jednostajnej zbieżności szeregu na jakimkolwiek przedziale postaci $[-c,c]$ dla $c\in(0,r)$. ■

Przykład 24.21 Przedstawimy funkcję $\arcsin x$ w postaci sumy szeregu Maclaurina. Jeśli $|x|<1$, to

$$\left(\arcsin x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-x^2)^n=1+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{2n-1}{2}\right)(-x^2)^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!\cdot 2^n}x^{2n}=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)}x^{2n}=\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n+1)}x^{2n+1}\right)',$$ zatem funkcja $\arcsin x-\left(x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n+1)}x^{2n+1}\right)$ jest stała na przedziale $(-1,1)$, na którym szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-x^2)^n$ jest zbieżny. Wartość tej funkcji w punkcie 0 jest równa 0. Stąd

wniosek: $\arcsin x = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n+1)} x^{2n+1}$ dla $x \in (-1,1)$.

Wyjaśnimy jeszcze kwestię $x = \pm1$. Zauważmy, że $\left(1-\frac12\right)^2 < \left(1-\frac12\right)\left(1-\frac13\right)$, $\left(1-\frac14\right)^2 < \left(1-\frac14\right)\left(1-\frac15\right)$, ... , $\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2 < \left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$. Wobec tego

$\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}\sqrt{\left(1-\frac12\right)^2\left(1-\frac14\right)^2\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2} <$
$< \frac{1}{2n+1}\sqrt{\left(1-\frac12\right)\left(1-\frac13\right)\left(1-\frac14\right)\left(1-\frac15\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)} =$
$= \frac{1}{2n+1}\sqrt{\frac{1}{2n+1}} = \frac{1}{(2n+1)^{3/2}}$. Wynika stąd, że dla $x = 1$ szereg $x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n+1)} x^{2n+1}$ jest zbieżny [24.5], co więcej z kryterium Weierstrassa wynika, że szereg ten jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[-1,1]$, zatem jego suma jest funkcją ciągłą na tym przedziale. Ponieważ ta suma i funkcja $\arcsin x$ są równe w przedziale $(-1,1)$ i ciągłe w punkcie $x = -1$ i w punkcie $x = 1$, więc są też równe w punktach ±1. Dodajmy jeszcze, że jeśli $|x| > 1$, to szereg $x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n+1)} x^{2n+1}$ jest rozbieżny, o czym Czytelnik może przekonać się np. stosując kryterium ilorazowe d'Alemberta. Stąd wynika, że $(2n+1)$–szy wielomian Taylora funkcji $\arcsin x$ jest równy

$$x + \frac{1}{2\cdot3}x^3 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}x^5 + \cdots + \frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n+1)} x^{2n+1}. \ \blacksquare$$

Przykład 24.22 Niech $f(0) = 0$ i $f(x) = e^{-1/x^2}$ dla $x \neq 0$. Jeśli $x \neq 0$, to $f'(x) = 2x^{-3}e^{-1/x^2}$, $f''(x) = \left(-x^{-4}+4x^{-6}\right)e^{-1/x^2}$ i ogólnie dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ istnieje taki wielomian w_n stopnia $3n$, że $f^{(n)}(x) = w_n\left(\frac1x\right)e^{-1/x^2}$ dla każdego $x \neq 0$. Dowodzimy tego przez indukcję względem n. Dla $n = 1$ tezę już sprawdziliśmy. Jeśli $f^{(n)}(x) = w_n\left(\frac1x\right)e^{-1/x^2}$, to

$$f^{(n+1)}(x) = \left(-x^{-2}w_n'\left(\tfrac1x\right) + 2x^{-3}w_n\left(\tfrac1x\right)\right)e^{-1/x^2},$$

[24.5] Można też posłużyć się kryterium Raabe'go, jeśli ktoś je pamięta.

więc $w_{n+1}(y) = 2y^3 w_n(y) - y^2 w_n'(y)$. Mamy teraz $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x) = = \lim\limits_{x\to 0} w_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2} = \lim\limits_{y\to\infty} w_n(y)e^{-y^2} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{w_n(y)}{e^{y^2}} = 0$. Ta ostatnia równość wynika z tego, że dla każdej liczby rzeczywistej a zachodzi równość $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{y^a}{e^y} = 0$, więc tym bardziej $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{y^a}{e^{y^2}} = 0$. Ponieważ f jest funkcją ciągłą w punkcie 0 i $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$, więc $f'(0) = 0$ — wynika to wprost z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej, można też zastosować regułę de l'Hospitala. Stąd, w taki sam sposób, wnioskujemy, że $f''(0) = 0$ itd. (indukcja). Wobec tego dla każdego n mamy $f^{(n)}(0) = 0$. Z tych rozważań wynika, że funkcja f ma pochodne dowolnego rzędu oraz, że $T_{0,n,f}(h) = 0$ dla każdego h. Stąd wynika, że w tym przypadku dzięki badaniu wielomianu Taylora nic o funkcji dowiedzieć się nie można! Tym razem cała informacja jest ukryta w reszcie.

Oczywiście $0 = f(0)$ jest najmniejszą wartością funkcji f, ale to wynika wprost z definicji tej funkcji. ■

Przykład 24.23 Niech $g(x) = xf(x)$, gdzie f oznacza funkcję zdefiniowaną w poprzednim przykładzie. Z wzoru na pochodną iloczynu dwu funkcji i tego, że $f^{(n)}(0) = 0$ dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 0$ wynika, że $g^{(n)}(0) = 0$ dla każdego całkowitego $n \geqslant 0$. Funkcja g przyjmuje wartości dodatnie dla $x > 0$, a dla $x < 0$ — ujemne. Wobec tego w punkcie 0 nie ma lokalnego ekstremum. ■

Przykład 24.24 Niech $\varphi(x) = \sin\frac{1}{x} \cdot e^{-1/x^2}$ dla $x \neq 0$ oraz $\varphi(0) = 0$. Rozumując tak, jak w przykładzie 24.22 dowodzimy, że funkcja φ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna oraz że $\varphi^{(n)}(0) = 0$ dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 0$. Bez trudu można stwierdzić, że nie istnieje taka liczba $\delta > 0$, że na przedziale $(0,\delta)$ funkcja φ jest wypukła lub wklęsła. Wobec tego 0 nie jest punktem przegięcia funkcji φ. W punkcie 0 funkcja φ nie ma też lokalnego ekstremum.

Podobnie jak w dwóch poprzednich przykładach przyjrzenie się wielomianowi Taylora w punkcie 0 nic nie daje, cała informacja o funkcji φ jest ukryta w reszcie, która jest równa funkcji. ■

Twierdzenie 24.13 (o lokalnych ekstremach)
Załóżmy, że funkcja f jest n–krotnie różniczkowalna w punkcie p oraz że zachodzą równości $0 = f'(p) = f''(p) = \ldots = f^{(n-1)}(p)$ i nierówność $f^{(n)}(p) \neq 0$. Wtedy

1. jeśli n jest liczbą nieparzystą, to funkcja f nie ma w punkcie p lokalnego ekstremum — w dowolnie małym otoczeniu punktu p przyjmuje zarówno wartości większe niż w punkcie p jak i wartości większe niż w punkcie p,
2. jeśli n jest liczbą parzystą, funkcja to f ma w punkcie p lokalne ekstremum właściwe: minimum, gdy $f^{(n)}(p) > 0$; maksimum, gdy $f^{(n)}(p) < 0$.

Dowód. Skorzystamy z wzoru Taylora: $f(p+h) = f(p) + + \frac{f'(p)}{1!}h + \frac{f''(p)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n + r_n(h)$. Wobec założeń o pochodnych funkcji f w punkcie p możemy napisać

$$f(p+h) - f(p) = \frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n + r_n(h) = h^n \left(\frac{f^{(n)}(p)}{n!} + \frac{r_n(h)}{h^n} \right)$$

Ponieważ $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r_n(h)}{h^n} = 0$, więc taka liczba istnieje $\delta > 0$, że jeśli $0 < |h| < \delta$, to $\left|\frac{r_n(h)}{h^n}\right| < \left|\frac{f^{(n)}(p)}{n!}\right|$. Znak sumy dwu liczb jest taki sam jak znak tej z nich, której wartość bezwzględna jest większa. W przypadku sumy $\frac{f^{(n)}(p)}{n!} + \frac{r_n(h)}{h^n}$ jest on więc, przy założeniu, że $0 < |h| < \delta$, taki jak znak liczby $f^{(n)}(p)$ ($n!$ nie ma wpływu znak). Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to znak iloczynu $h^n \left(\frac{f^{(n)}(p)}{n!} + \frac{r_n(h)}{h^n} \right)$ zmienia się wraz ze zmianą znaku h. Jeśli n jest liczbą parzystą, to znak ten jest niezależny od znaku h: w przypadku $f^{(n)}(p) < 0$ liczba $h^n \left(\frac{f^{(n)}(p)}{n!} + \frac{r_n(h)}{h^n} \right)$ jest ujemna, zaś w przypadku $f^{(n)}(p) > 0$ – dodatnia. Stąd wynika teza. ■

Twierdzenie 24.14 (o punktach przegięcia)

1. Jeśli p jest punktem przegięcia funkcji f, która jest dwukrotnie różniczkowalna w tym punkcie, to $f''(p) = 0$.

2. Jeżeli $n > 2$ i funkcja f jest n–krotnie różniczkowalna w punkcie p oraz $0 = f''(p) = f^{(3)}(p) = \ldots = f^{(n-1)}(p)$ i $f^{(n)}(p) \neq 0$, to jeśli n jest liczbą nieparzystą, to p jest punktem przegięcia funkcji f, jeśli natomiast liczba n jest parzysta, to p nie jest punktem przegięcia funkcji f.

Dowód. **1.** Z definicji punktu przegięcia wynika, że istnieje taka liczba $\delta > 0$, że na jednym z przedziałów $(p-\delta, p]$, $[p, p+\delta)$ funkcja f jest wypukła, a na drugim — wklęsła. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że na przedziale $(p-\delta, p]$ funkcja f jest wypukła, a na przedziale $[p, p+\delta)$ — wklęsła. Ponieważ f jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie p, więc jest różniczkowalna w punktach pewnego przedziału o środku w punkcie p. Bez straty ogólności można przyjąć, że tym przedziałem jest $(p-\delta, p+\delta)$. Wobec tego na przedziale $(p-\delta, p]$ pochodna f' funkcji f jest niemalejąca i wobec tego jej pochodna, czyli f'', jest nieujemna w każdym punkcie, w którym jest określona, więc w szczególności $f''(p) \geqslant 0$. Na przedziale $[p, p+\delta)$ funkcja f jest wklęsła i wobec tego $f''(p) \leqslant 0$. Ponieważ $f''(p) \leqslant 0 \leqslant f''(p)$, więc $f''(p) = 0$.

2. Zastosujemy wzór Taylora do funkcji f'' w punkcie p biorąc pod uwagę zerowanie się kolejnych pochodnych. Mamy

$$f''(p+h) - f''(p) = h^{n-2}\left(\tfrac{f^{(n)}(p)}{(n-2)!} + \tfrac{r_{n-2}(h)}{h^{n-2}}\right).$$

Niech $\delta > 0$ będzie taką liczbą dodatnią, że jeśli $0 < |h| < \delta$, to $\left|\frac{r_{n-2}(h)}{h^{n-2}}\right| < \frac{|f^{(n)}(p)|}{(n-2)!}$. Liczby $\frac{f^{(n)}(p)}{(n-2)!} + \frac{r_{n-2}(h)}{h^{n-2}}$ i $\frac{f^{(n)}(p)}{(n-2)!}$ mają więc taki sam znak. Jeśli liczba n jest nieparzysta, to liczba h^{n-2} jest dodatnia dla dodatnich h i ujemna dla h ujemnych. Wobec tego liczba $f''(p+h) = h^{n-2}\left(\frac{f^{(n)}(p)}{(n-2)!} + \frac{r_{n-2}(h)}{h^{n-2}}\right)$ jest na jednym z przedziałów $(-\delta, 0)$, $(0, \delta)$ dodatnia, a na drugim — ujemna. Wobec tego na jednym z przedziałów $(p-\delta, p]$, $[p, p+\delta)$ funkcja f jest ściśle wklęsła, a na drugim — ściśle wypukła. Wynika stąd, że p jest punktem przegięcia funkcji f. Jeżeli natomiast liczba n jest parzysta, to wtedy funkcja f'' ma w punkcie p lokalne ekstremum właściwe, więc albo na całym przedziale $(p-\delta, p+\delta)$ z wyjątkiem punktu p funkcja f'' jest dodatnia, albo na całym przedziale $p-\delta, p+\delta$ funkcja f'' jest ujemna. W pierwszym przypadku funkcja f jest ściśle wypukła na calutkim przedziale $(p-\delta, p+\delta)$, a w drugim — ściśle wklęsła. W żadnym z tych przypadków p nie jest punktem przegięcia funkcji f. Dowód został zakończony. ■

Dowody dwóch ostatnich twierdzeń ilustrują, jak stosowany jest wzór Taylora: pewna własność przysługuje wielomianowi Taylora, reszta nie jest w stanie jej zmienić, bo jest za mała. Oczywiście istotnym założeniem jest $f^{(n)}(p) \neq 0$ — bez niego nie mamy podstaw do twierdzenia, że reszta jest mała w porównaniu z wielomianem Taylora funkcji $f(x)-f(p)$, przeciwnie w takim przypadku wszystkie informacje o zachowaniu się funkcji w pobliżu punktu p zawarte są w reszcie, o której niewiele wiemy! Wypada podkreślić, że mówimy tu jedynie o zachowaniu się funkcji w pobliżu punktu p, na nic więcej nie możemy liczyć, bo założenia, które uczyniliśmy dotyczą jedynie pochodnych w tym jednym punkcie! O wielkości liczby δ również nic nie możemy powiedzieć. Jeżeli w konkretnej sytuacji musimy czegoś konkretnego o niej dowiedzieć się, to wymaga to dalszego badania konkretnej funkcji.

Kończąc przytoczymy twierdzenie pozwalające napisać resztę r_n w konkretnej postaci przy dodatkowym założeniu, że istnieje następna pochodna funkcji w pewnym otoczeniu interesującego nas punktu. Z trzech często przytaczanych wzorów podamy tylko jeden, bo ich stosowalność jest dosyć ograniczona z wyjątkiem jednego, w którym występuje całka, więc na razie niedostępnego.

Twierdzenie 24.15 (Lagrange'a o postaci reszty)
Jeśli funkcja $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest $(n+1)$–krotnie różniczkowalna w przedziale (a,b), to między dowolnymi liczbami $x, y \in (a,b)$ można znaleźć taką liczbę c, że $r_{x,n,f}(y-x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(y-x)^{n+1}$.

Dowód. Niech $g(x) = r_{x,n,f}(y-x) = f(y) - \left(\sum\limits_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}(y-x)^j\right)$.

Wtedy $g'(x) = -\sum\limits_{j=0}^{n} \frac{f^{(j+1)}(x)}{j!}(y-x)^j + \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{(j-1)!}(y-x)^{j-1} =$

$= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(y-x)^n$. Niech $w(x) = (y-x)^{n+1}$, więc $w'(x) = = -(n+1)(y-x)^n$. Z twierdzenia Cauchy'ego o wartości średniej wynika, że między liczbami x i y można znaleźć taka liczbę c, że $\frac{g(x)-g(y)}{w(x)-w(y)} = \frac{g'(c)}{w'(c)} = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(y-c)^n / \big(-(n+1)(y-c)^n\big) = = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$, więc $g(x) = g(x) - g(y) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\big(w(x) - w(y)\big) = = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(y-x)^{n+1}$, a właśnie ten wzór chcieliśmy udowodnić. ■

Uwaga 24.16
Można uzyskać inne postaci reszty zastępując w dowodzie twierdzenia Lagrange'a wielomian $(y-x)^{n+1}$ innym wielomianem zerującym się w punkcie y, np. $y-x$. Ogólny wzór wygląda wtedy tak: $r_{x,n,f}(y-x) = -\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(c)\frac{w(x)}{w'(c)}$. Dodajmy jeszcze, że dowód twierdzenia jest bardzo krótki, ale jednak jest oparty na pomyśle: traktujemy resztę $r_{x,n,f}(y-x)$ jako funkcję zmiennej x przy ustalonym y, choć w pierwszej chwili mamy ochotę zmieniać y przy ustalonym x. ■

Zadania

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, jeśli $f(x) =$

1. $\frac{\sin x - x}{x^3}$;
2. x^x;
3. $\frac{\big(1-(\cos x)^{\sin x}\big)^2}{(\operatorname{tg} x)^6}$;
4. $\frac{\sin(1683x)}{\sin(x\sqrt{2})}$;
5. $\frac{x-\sin x}{\operatorname{tg} x - x}$;
6. $\frac{\sin(\operatorname{tg} x - \sin x)}{(-\ln(\cos x))^a}$, $a \in \mathbb{R}$;
7. $\frac{x\operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$;
8. $\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$;
9. $\frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2}$;
10. $\frac{\arcsin(2x) - 2\arcsin x}{x^3}$;
11. $x^{x^x - 1}$;
12. $\frac{2^x - 2^{\sin x}}{x^3}$;
13. $x^{2/(1+\ln x)}$;
14. $\frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$;
15. $x^{-3}\big(1 - (\cos x)^{\sin x}\big)$;
16. $(\ln\frac{1}{x})^x$;
17. $\big((\ln x)\cdot \ln(1-x)\big)$;
18. $x^\varepsilon \ln x$, gdzie $\varepsilon > 0$;
19. $\big(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\big)$;
20. $\big(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\big)$;
21. $\frac{1}{x}\cdot\big((1+x)^{1/x} - e\big)$;
22. $\big(\frac{\arcsin x}{x}\big)^{-1/x^2}$;

23. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$;

24. $\frac{x\ln(\cos x)}{\sin x-\operatorname{tg} x}$;

25. $\frac{\ln(1+\operatorname{tg} x)-\sin x}{\sin^3 x}$;

26. $\frac{\ln(\cos x+\arcsin x)}{e^x \operatorname{tg} x}$;

27. $\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x))+\arcsin x}{x}$;

28. $\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$;

29. $\frac{\sin(\sin x)+e^{1-\cos x}\operatorname{tg} x+\sqrt[3]{1-x}-\sqrt{\cos x}}{\sqrt[3]{x-\sin x}+\sqrt[5]{x-\operatorname{tg} x+(x^3/3)}}$;

30. $\frac{1}{x(\ln(\cos x))^4}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}-\sin x\right)$;

31. $\frac{(\sin(\operatorname{tg} x))^{5/3}\cdot\sqrt[3]{x^x-1}}{(\ln x)^{1/3}\cdot(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}$;

32. $\frac{1}{\ln(\cos x)}\cdot\left(\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{\sin x\cdot\operatorname{tg} x}-\frac{1}{e}\right)$;

33. $\frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2}}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{3}}\right)$.

2. Obliczyć granicę

a. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$;

b. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}$

c. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg} x-1}{2\sin^2 x-1}$;

d. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{1000}(1.001)^{-x}$;

e. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{-1/x}$;

f. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot e^{-x/1000}$;

g. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}$;

h. $\lim\limits_{x\to1}x^{1/(1-x)}$;

i. $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$;

j. $\ln(x+e^x)\left((1+\frac{1}{x})^x-e\right)$.

3. Obliczyć, jeśli istnieje, granicę $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$. Czy można użyć regułę de l'Hospitala (bez dodatkowych przekształceń)?

4. Obliczyć, jeśli istnieje, granicę $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$. Czy można użyć regułę de l'Hospitala (bez dodatkowych przekształceń)?

5. Obliczyć, jeśli istnieje, granicę $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}}$. Czy można użyć regułę de l'Hospitala (bez dodatkowych przekształceń)?

6. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}$ lub wykazać, że ta granica nie istnieje. Czy można zastosować regułę de l'Hospitala (bez dodatkowych przekształceń)?

7. Niech $P(x)$ oznacza pole odcinka koła o promieniu 1 odciętego cięciwą $c(x)$, na której oparty jest kąt x. Znaleźć trzeci wielomian Taylora w punkcie 0 funkcji P. Wykazać, że $P(x) \approx \frac{2}{3}c(x)h(x)$, gdzie $h(x)$ jest równe różnicy promienia okręgu i wysokości trójkąta równoramiennego T_2, którego podstawą jest cięciwa c a wierzchołkiem leżącym naprzeciw niej — środek okręgu.

8. Oszacować błąd $r(x)$ popełniany przy stosowaniu następującego przybliżenia: długość łuku $A(x)$, na którym oparty jest kąt o wielkości x, jest równa sumie sumie ramion trójkąta równoramiennego T_1, którego podstawą jest cięciwa $c(x)$, na której oparty jest łuk $A(x)$ a wysokością jest odcinek o długości $\sqrt{\frac{4}{3}}$ odległości środków $A(x)$ i $c(x)$.

9. Dowieść, że $(\operatorname{tg} x)^{(n)}(0) > 0$ dla dowolnego nieparzystego n.

10! Dowieść, że wielomian w jest podzielny przez $(x-c)^k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 = w(0) = w'(0) = \ldots = w^{(k-1)}(0)$.

11. Niech f oznacza funkcję trzykrotnie różniczkowalną i niech $S_f(x) = \frac{f^{(3)}(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$ dla każdej liczby x, dla której $f'(x) \neq 0$. Dowieść, że jeśli $S_f < 0$ i $S_g < 0$ i złożenie $f \circ g$ jest zdefiniowane, to $S_{f\circ g} < 0$.

12. Dowieść, że jeśli $S_f < 0$ dla pewnej funkcji f, to funkcja f' nie ma minimów lokalnych (S_f z poprzedniego zadania).

13. Dowieść, że jeśli $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją $(p+q)$–krotnie różniczkowalną w punktach przedziału $[a,b]$ i ma pochodną rzędu $p+q+1$ w punktach przedziału (a,b) i $f(a) = f'(a) = {}$ $=f''(a) = \ldots = f^{(p)}(a) = 0 = f^{(q)}(b) = \ldots = f'(b) = f(b)$, to istnieje taka liczba $c \in (a,b)$, że $f^{p+q+1}(c) = 0$.

14! Dowieść, że jeśli wielomian $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ ma n pierwiastków rzeczywistych liczonych z krotnościami, to k–ta pochodna tego wielomianu ma $n-k$ pierwiastków rzeczywistych liczonych z krotnościami.

15. Dowieść, że funkcja $e^x\left(x^ne^{-x}\right)^{(n)}$ jest wielomianem, który ma n różnych pierwiastków dodatnich.

16. Udowodnić, że jeśli $f^{(n)}(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to funkcja f jest wielomianem stopnia mniejszego niż n.

17. Dowieść, że jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną i dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje taka liczba naturalna $n_x \leqslant 100$, że $f^{(n_x)}(x) = 0$, to funkcja f jest wielomianem stopnia mniejszego niż 100.

18*. Dowieść, że jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną i dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje taka liczba naturalna n_x, że $f^{(n_x)}(x) = 0$, to f jest wielomianem.

19*. Dowieść, że jeśli $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną, że $0 = f(0) = f'(0) = = f''(0) = \ldots$ i $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ dla każdej liczby $x \geqslant 0$ i każdej liczby całkowitej $n \geqslant 0$, to $f(x) = 0$ dla każdego $x \geqslant 0$.

20. Dowieść, że jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją dwukrotnie różniczkowalną, że $f''(x) = -\omega^2 f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to $f(x) = f(0)\cos(\omega x) + f'(0)\sin(\omega x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

21. Dowieść, że jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją dwukrotnie różniczkowalną, że $f''(x) = \omega^2 f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to $f(\frac{x}{\omega}) = \frac{1}{2}\big[f(0)\big(e^x + e^{-x}\big) + f'(0)\big(e^x - e^{-x}\big)\big]$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

22. Dowieść, że jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją dwukrotnie różniczkowalną na przedziale $[a,b]$, że $f'(a) = 0 = f'(b)$, to istnieje takie $c \in (a,b)$, że $|f''(x)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}\big|f(b) - f(a)\big|$.

23. Dowieść, że jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną w punkcie x, to $f''(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$.

24. Dowieść, że jeśli $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją n–krotnie różniczkowalną, że $f(x_j) = 0$ dla pewnych $x_0, x_1, \ldots, x_n$ z przedziału $[a,b]$, $j = 0, 1, \ldots, n$ i $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, to istnieje taka liczba $c \in (a,b)$, że $f^{(n)}(c) = 0$.

25. Dowieść, że jeśli $T_m(x) = 2^{1-m}\cos(\arccos x)$, gdy $|x| < 1$, to $(1-x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2 T_m(x) = 0$.

26. Dowieść, że jeśli $P_m(x) = \frac{1}{2^m m!}\big((x^2-1)^m\big)^{(m)}$, to

$$(1-x^2)P_m''(x) - xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0.$$

27. Czy szereg $\sum \frac{x^n}{n!}$ jest jednostajnie zbieżny na całej prostej?

28. Wyjaśnić, czy szereg $\sum(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ jest jednostajnie zbieżny na całej prostej.

29. Niech $f(0)=0$ i $f(x)=e^{-1/x^2}\sin\frac{1}{x}$ dla $x\neq 0$. Wykazać, że funkcja f jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna.

30. Podać przykład takiej nieskończenie wiele razy różniczkowalnej funkcji f, że $xf(x)>0$ dla $x\neq 0$ i że na żadnym przedziale postaci $[0,\delta]$, $\delta>0$, funkcja ta nie jest wypukła ani wklęsła.

31. Dowieść, że jeśli $f\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$ jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną i $M_j=\sup\{|f^{(j)}(x)|:\quad x>0\}$ dla $j=0,1,2$, to $M_1\leqslant 2M_0M_2$ oraz że w tej nierówności współczynnika 2 nie można zmniejszyć.

32. Dowieść, że jeśli $f\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$ jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ i funkcja f'' jest ograniczona, to $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$.

33. Załóżmy, że funkcja f jest k–krotnie różniczkowalna w punkcie p, a funkcja g jest k–krotnie różniczkowalna w punkcie $f(p)$, to zachodzi równość

$(g\circ f)^{(k)}(p)=$

$$=\sum\frac{k!}{n_1!n_2!\cdot\ldots\cdot n_j!}g^{(j)}(f(p))\Big(\frac{f'(p)}{1!}\Big)^{n_1}\Big(\frac{f''(p)}{2!}\Big)^{n_2}\ldots\Big(\frac{f^{(j)}(p)}{1!}\Big)^{n_j},$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie takie układy liczb naturalnych $(n_1,n_2,\ldots,n_j)$, że $n_1+2n_2+\cdots+jn_j=k$.

34. Dowieść, że jeśli dwukrotnie różniczkowalna na $\mathbb{R}$ funkcja f spełnia warunki $\big(f(x)\big)^2\leqslant a$ i $\big(f'(x)\big)^2+\big(f''(x)\big)^2\leqslant b$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$, to $\forall_{x\in\mathbb{R}}\big(f(x)\big)^2+\big(f'(x)\big)^2\leqslant\max(a,b)$.

35. Dowieść, że istnieje taka nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, że $f(x)=0$, gdy $x\leqslant 0$ oraz $f(x)>0$, gdy $x>0$.

36. Dowieść, że istnieje taka nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, że $f(x)=0$, gdy $x\leqslant 0$, $0<f(x)<1$, gdy $0<x<1$ oraz $f(x)=1$, gdy $x\geqslant 1$.

37. Dowieść, że istnieje taka nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, że $f(x)=0$, gdy $|x|\geqslant 2$, $0<f(x)<1$, gdy $1<|x|<2$ oraz $f(x)=1$, gdy $|x|\leqslant 1$.

38. Wykazać, że dla każdego wielomianu w i każdych $h, p \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $w(p+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} w^{(n)}(p)$.

39. Udowodnić, że jeśli $f(x) = \ln x$ i $p > |h| > 0$, to zachodzi równość $f(p+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(p)$.

40. Udowodnić, że jeśli $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$, $p \in \mathbb{R}$, to istnieje taka liczba $r > 0$, że jeśli $|h| < r$, to $f(p+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(p)$.

41. Dowieść, że jeśli $f(x) = \frac{x+2}{1+3x+3x^2+x^3}$, $p \neq -1$, to istnieje taka liczba $r > 0$, że jeśli $|h| < r$, to $f(p+h) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(p)$.

42. Dowieść, że jeśli $f(x) = \sqrt{x+2}$, $p > -2$, to istnieje taka liczba $r > 0$, że jeśli $|h| < r$, to $f(p+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(p)$.

43. Dowieść, że jeśli $f(x) = \sin(1+x^2)$, $p \in \mathbb{R}$, to istnieje taka liczba $r > 0$, że jeśli $|h| < r$, to $f(p+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(p)$.

44. Dowieść, że jeśli $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $p \neq -1$, to istnieje taka liczba $r > 0$, że jeśli $|h| < r$, to $f(p+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(p)$.

45. Dla jakich $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi wzór $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x-(a+b\cos x)\sin x}{x^5} = 0$?

46. Dla jakich $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ funkcja $x^{-5}\left(e^{-x} - \frac{1+ax+bx^2}{1+cx+dx^2}\right)$ jest ograniczona w pewnym otoczeniu liczby 0?

CIĄGI I SZEREGI FUNKCYJNE II

Widzieliśmy już, że wiele funkcji można zapisać w postaci sumy szeregu lub granicy ciągu. Podamy teraz twierdzenie, które pozwala w licznych sytuacjach obliczać pochodną granicy ciągu funkcyjnego. Zaczniemy od przykładu pokazującego, że rzecz wymaga pewnego zastanowienia.

Przykład 25.1 Niech $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n^2x)$. Jasne jest, że zachodzi nierówność $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}$, więc ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji zerowej. Mamy $f_n'(x) = n^2\frac{1}{n}\cos(n^2x) = n\cos(n^2x)$, więc $f_n'(0) = n$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = \infty$. Jeśli n jest liczbą parzystą, to $f_n'(\pi) = n$. Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to $f_n'(\pi) = -n$. Ciąg $(f_n'(\pi))$ w ogóle nie ma granicy (ani skończonej ani nieskończonej). Wynika stąd, że z jednostajnej zbieżności ciągu funkcyjnego nie wynika jednostajna zbieżność ciągu pochodnych, nie wynika nawet punktowa i to nawet wtedy, gdy granica jest funkcją różniczkowalną. ■

Bardzo użyteczne bywa twierdzenie, które mówi, że jednak przy pewnych założeniach pochodna granicy ma związek z pochodnymi wyrazów ciągu.

Twierdzenie 25.1 (o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych) Załóżmy, że (F_n) jest ciągiem funkcji ciągłych określonym na przedziale domkniętym $[a,b]$ oraz że każda funkcje F_n jest różniczkowalna na przedziale otwartym (a,b). Jeśli ciąg (F_n') jest jednostajne zbieżny na przedziale (a,b) do funkcji f, a ciąg (F_n) jest zbieżny w co najmniej jednym punkcie przedziału $[a,b]$, to

25.1.1 ciąg (F_n) jest jednostajnie zbieżny na przedziale $[a,b]$ do pewnej funkcji F i

25.1.2 $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in (a,b)$, co można zapisać też tak $\big(\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)\big)' = \lim\limits_{n\to\infty} F_n'(x)$.

Dowód. Wykażemy najpierw, że ciąg (F_n) jest zbieżny jednostajnie. Niech $p\in[a,b]$ będzie takim punktem, że ciąg $(F_n(p))$ jest zbieżny. Niech $\varepsilon>0$. Istnieje n_ε takie, że dla każdych $n,k>n_\varepsilon$ i dowolnego x zachodzą nierówności $|F'_n(x)-F'_k(x)|<\varepsilon$ oraz $\big|F_n(p)-F_k(p)\big|<\varepsilon$. Wobec tego

$$|F_n(x)-F_k(x)|\leqslant\Big|F_n(x)-F_k(x)-\big(F_n(p)-F_k(p)\big)\Big|+$$

$$+\big|F_n(p)-F_k(p)\big|=$$

$$=\big|F'_n(c_x)-F'_k(c_x)\big|\big|x-p\big|+\big|F_n(p)-F_k(p)\big|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

Zastosowaliśmy twierdzenie Lagrange'a do funkcji F_n-F_k! Ciąg $\big(F_n\big)$ jest więc ciągiem Cauchy'ego, zatem jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji F. Funkcja ta jest ciągła jako granica ciągu funkcji ciągłych zbieżnego jednostajnie.

Wykażemy, że $F'(x)=f(x)$ dla każdego x. Stosując znów twierdzenie Lagrange'a do różnicy F_n-F_k otrzymujemy dla dostatecznie dużych n i k nierówność

$$\left|\frac{F_n(x+h)-F_n(x)}{h}-F'_n(x)-\left(\frac{F_k(x+h)-F_k(x)}{h}-F'_k(x)\right)\right|=$$

$$=\left|F'_n(c_{n,k})-F'_n(x)-\Big(F'_k(c_{n,k})-F'_k(x)\Big)\right|<\varepsilon$$

— bowiem dla dostatecznie dużych n,k i dowolnego t zachodzi nierówność

$$\big|F'_n(t)-F'_n(t)\big|<\tfrac{\varepsilon}{2},$$

którą stosujemy w przypadku $t=c_{n,k}$ oraz $t=x$. Ponieważ $\lim\limits_{k\to\infty}F_k(t)=F(t)$ i $\lim\limits_{k\to\infty}F'_k(t)=f(t)$, więc dla dostatecznie dużego n wszystkich liczb $x\in[a,b]$ i wszystkich takich h, że $x+h\in[a,b]$, zachodzi nierówność

$$\left|\frac{F_n(x+h)-F_n(x)}{h}-F'_n(x)-\left(\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right)\right|\leqslant\varepsilon.$$

Dla ustalonego, dostatecznie dużego n i ustalonego x istnieje taka liczba $\delta_n>0$, że

$$0<|h|<\delta_n\Rightarrow\left|\frac{F_n(x+h)-F_n(x)}{h}-F'_n(x)\right|<\varepsilon,$$

jeśli tylko $x+h\in I$. Stąd wynika, że jeśli $0<|h|<\delta_n$, to
$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|\leqslant\varepsilon+\left|\frac{F_n(x+h)-F_n(x)}{h}-F'_n(x)\right|\leqslant 2\varepsilon$$
dla tego ustalonego x, jeśli $x+h\in I$. Oznacza to, że zachodzi równość $f(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$, tzn. $f(x)=F'(x)$. ■

Uwaga 25.2
Jeśli pochodne $F'_1,F'_2,\ldots$ są ciągłe, to ich granica f też, bo granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest ciągła. ■

Z twierdzenia o różniczkowaniu ciągów wynika

Twierdzenie 25.3 (o różniczkowaniu szeregu funkcyjnego)
Niech $\sum F_n$ będzie takim szeregiem funkcji ciągłych na przedziale $[a,b]$, różniczkowalnych na przedziale (a,b), że szereg $\sum F'_n$ jest jednostajnie zbieżny na przedziale (a,b) a szereg $\sum F_n$ jest zbieżny w co najmniej jednym punkcie przedziału $[a,b]$. Wtedy szereg $\sum F_n$ jest jednostajnie zbieżny na przedziale $[a,b]$, jego suma jest funkcją różniczkowalną i dla każdego $x\in(a,b)$ zachodzi równość $\big(\sum F_n(x)\big)'=\sum F'_n(x)$. ■

Uwaga 25.4
Nie korzystaliśmy w dowodzie tego twierdzenia w istotny sposób z żadnych własności funkcji określonych na przedziale domkniętym. Oznacza to, że w twierdzeniu o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych możemy zastąpić przedział domknięty $[a,b]$ przedziałem (a,b), $[a,b)$ lub $(a,b]$ zakładając, że $-\infty<a<b<\infty$. Czytelnik zechce zastanowić się nad tym, gdzie wykorzystujemy założenie $-\infty<a<b<\infty$ i sformułować twierdzenie w przypadku przedziału nieskończonego. ■

Udowodnimy teraz bardzo twierdzenie, z którego później skorzystamy kilka razy.

Twierdzenie 25.5 (o istnieniu funkcji pierwotnej)
Jeśli $I \subseteq \mathbb{R}$ jest przedziałem a $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcją ciągłą, to istnieje taka funkcja $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in I$ zachodzi równość [25.1] $F'(x) = f(x)$.

Dowód. Niech a będzie lewym końcem przedziału I, b — prawym, być może $a = -\infty$ lub $b = \infty$. Niech (a_n) będzie nierosnącym ciągiem zbieżnym do a, (b_n) — niemalejącym ciągiem zbieżnym do b i niech $a < a_1 < b_1 < b$. Mamy więc

$$[a_1, b_1] \subseteq [a_2, b_2] \subseteq \ldots [a_n, b_n] \subseteq \ldots \quad \text{i} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = (a, b)\,.$$

Załóżmy jeszcze, że jeśli $a \in I$, to $a_n = a$ dla $n = 1, 2, \ldots$, a jeśli $b \in I$, to $b_n = b$ dla $n = 1, 2, \ldots$

Niech w_n będzie takim wielomianem, że dla każdej liczby $x \in [a_n, b_n]$ zachodzi nierówność $|w_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$.[25.2] Z tego, że $[c, d] \subseteq I$ wynika istnienie takiego $k \in \mathbb{N}$, że $[c, d] \subseteq [a_k, b_k]$. Wobec tego nierówność $|w_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$ zachodzi dla $n \geqslant k$ i $x \in [a_k, b_k]$. Wynika stąd jednostajna zbieżność ciągu (w_n) na przedziale $[a_k, b_k]$, więc również na przedziale $[c, d]$.

Niech p będzie dowolnym punktem przedziału (a_1, b_1). Niech W_n oznacza taki wielomian, że $W_n(p) = 0$ i $W_n'(x) = w_n(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Taki wielomian W_n istnieje: jeśli zachodzi równość $w_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$, to przyjmujemy

$$W_n(x) = a_0 x + \tfrac{1}{2} a_1 x^2 + \tfrac{1}{3} a_2 x^3 + \cdots + \tfrac{1}{m+1} a_m x^{m+1} - \\ - \left[a_0 p + \tfrac{1}{2} a_1 p^2 + \tfrac{1}{3} a_2 p^3 + \cdots + \tfrac{1}{m+1} a_m p^{m+1}\right].$$

Z twierdzenia o różniczkowalności ciągu funkcyjnego wynika od razu, że ciąg (W_n) jest jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji F na przedziale $[c, d]$ i $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in [c, d]$.

Zauważmy jeszcze, że żadnych ograniczeń na przedział $[c, d]$

[25.1] W końcu przedziału pochodna jednostronna.

[25.2] Istnienie takiego wielomianu wynika z twierdzenia Weierstrassa o przybliżaniu funkcji ciągłych wielomianami.

nie nakładaliśmy. Oczywiście dla każdego $x \in I$ istnieją takie liczby c, d, że $x \in [c, d]$, a stąd wynika, że równość $F'(x) = f(x)$ zachodzi dla każdej liczby $x \in I$. ■

Przypomnijmy, że z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika natychmiast, że jeśli $F_1'(x) = f(x) = F_2'(x)$ dla każdego $x \in I$, to istnieje taka liczba C, że dla każdego $x \in I$ zachodzi równość $F_2(x) = F_1(x) + C$, czyli funkcja F, której istnienie wykazaliśmy nie jest co prawda określona jednoznacznie, ale z dokładnością do stałej.

Uwaga 25.6

Z dowodu twierdzenia o istnieniu funkcji pierwotnej możemy łatwo wyeliminować twierdzenie Weierstrassa o przybliżaniu funkcji ciągłych wielomianami. Wystarczy zamiast wielomianami przybliżać funkcjami przedziałami liniowymi, czyli funkcjami postaci

$$ax + b + a_1|x - x_1| + a_2|x - x_2| + \cdots + a_n|x - x_n|,$$

w rozdziale poświęconym ciągom i szeregom funkcyjnym wykazaliśmy, że jest to możliwe. Mamy oczywiście $\left(\frac{1}{2}|x|x\right)' = |x|$ dla **każdego** $x \in \mathbb{R}$. Z tego wzoru wnioskujemy bez trudu, że

$$\tfrac{1}{2}\big(ax^2 + 2bx + a_1|x - x_1|(x - x_1) + a_2|x - x_2|(x - x_2) + \\ + \cdots + a_n|x - x_n|(x - x_n)\big)' = \\ = ax + b + a_1|x - x_1| + a_2|x - x_2| + \cdots + a_n|x - x_n|.$$

W dowodzie zamiast wielomianów w_n używamy funkcji przedziałami liniowych — to jedyna zmiana. ■

Następne dwa twierdzenia ilustrują możliwe kłopoty z różniczkowalnością.

Twierdzenie 25.7

Dla każdego ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb rzeczywistych istnieje funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, która jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots\}$ i która nie pochodnej w żadnym z punktów $a_1, a_2, \ldots$

Dowód. Możemy oczywiście założyć, że jeśli $i \neq j$, to $a_i \neq a_j$, czyli że w ciągu (a_n) nie ma powtórzeń — wystarczy wykreślić wszystkie wyrazy, które pojawiły się w ciągu wcześniej.

Niech $g(x) = \sin|x|$. Funkcja g jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \neq 0$ — wynika to z twierdzenia o pochodnej złożenia dwu funkcji. W punkcie 0 pochodne jednostronne są różne, więc funkcja różniczkowalna nie jest, ale jest ciągła.

Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g(x - a_n)$. Dla każdego n zachodzi nierówność $|2^{-n} g(x - a_n)| \leqslant 2^{-n}$, a ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ jest zbieżny, więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g(x - a_n)$ jest jednostajnie zbieżny (kryterium Weierstrassa), zatem jego suma jest funkcją ciągłą.

Załóżmy, że $x \neq a_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$ i że $\varepsilon > 0$. Istnieje taka liczba naturalna k, że $\sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-k+1} < \frac{\varepsilon}{3}$. Mamy też $|g(x+h) - g(x)| = \big|\sin|x+h| - \sin|x|\big| \leqslant \big||x+h| - |x|\big| \leqslant |h|$, więc $\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right| = \left|\frac{\sin|x+h|-\sin|x|}{h}\right| \leqslant \frac{|h|}{|h|} = 1$. Wynika stąd, że $\left|\frac{1}{h}\left(\sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} g(x+h-a_n) - \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} g(x-a_n)\right)\right| =$
$=\left|\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{g(x+h-a_n)-g(x-a_n)}{h}\right| \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left|\frac{g(x+h-a_n)-g(x-a_n)}{h}\right| \leqslant$
$\leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{k-1}} < \frac{\varepsilon}{3}$.

Z różniczkowalności funkcji g poza punktem 0 wynika, że istnieje taka liczba $\delta_k > 0$, że jeśli $0 < |h| < \delta_k$, to

$$\left|\frac{1}{h}\Big(\sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{2^n} g(x+h-a_n) - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{2^n} g(x-a_n)\Big) - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{2^n} g'(x-a_n)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Stąd i z tego, że $|g'(x)| \leqslant 1$ wynika, że jeśli $0 < |h| < \delta_k$, to

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g'(x-a_n)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{h}\Big(\sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{2^n} g(x+h-a_n) - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{2^n} g(x-a_n)\Big) - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{2^n} g'(x-a_n)\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{h}\Big(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} g(x+h-a_n) - \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} g(x-a_n)\Big)\right| + \left|\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} g'(x-a_n)\right| <$$

$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$

Wynika z tych oszacowań, że $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g'(x-a_n)\,.$

Zauważmy teraz, że funkcja $\sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n} g(x-a_n)$ jest różniczkowalna dla każdego $x \in \mathbb{R}$ z wyjątkiem punktów $a_2, a_3, \ldots$, w szczególności jest różniczkowalna w punkcie a_1. Ponieważ funkcja $g(x-a_1) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g(x-a_n) - \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n} g(x-a_n)$ nie jest różniczkowalna w punkcie a_1, więc funkcja $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g(x-a_n)$ jest nieróżniczkowalna w punkcie a_1. W taki sam sposób można udowodnić, że funkcja $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g(x-a_n)$ jest nieróżniczkowalna w punktach a_2, a_3, … ■

Twierdzenie 25.8 (**funkcja ciągła nigdzie nieróżniczkowalna** [25.3])
Istnieje funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie ma skończonej pochodnej w żadnym punkcie.

Dowód. Niech $u(x) = \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$. Tę funkcję przedłużamy na całą prostą tak, by równość $u(x+1) = u(x)$ zachodziła dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$. Niech $u_n(x) = 4^{-n} u(4^n x)$. [25.4]
Niech $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Szereg $\sum u_n$ jest jednostajnie zbieżny na całej prostej, bo $|u_n(x)| \leqslant \frac{1}{2} \cdot 4^{-n}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i $\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} = \frac{4}{3} < \infty$. Wobec tego, że funkcje $u_0, u_1, \ldots$ są ciągłe, funkcja f jest ciągła. Wykażemy, że nie ma ona skończonej pochodnej w żadnym punkcie (jednostronne nieskończone ma w wielu punktach).

Ustalmy x oraz n. Niech h_n będzie taką liczbą, że na przedziale $P_{x,n}$ o końcach x, $x + h_n$ funkcja u_n jest monotoniczna i $|h_n| = 4^{-n-1}$. Oznacza to, że między punktami x i $x + h_n$ nie ma ani jednego punktu postaci $\frac{p}{2} \cdot 4^{-n}$, gdzie $p \in \mathbb{Z}$. Wynika stąd, że jeśli $k \leqslant n$, to funkcja u_k jest monotoniczna na

[25.3] Twierdzenie udowodnił Weierstrass, a podany niżej dowód pochodzi od van der Waerdena

[25.4] A może Czytelnik narysuje sobie wykresy u_0, u_1?

przedziale $P_{x,n}$. Jasne jest też, że $\frac{u_k(x+h_n)-u_k(x)}{h_n} = \pm 1$. Jeśli $k > n$, to $u_k(x+h_n) = u_k(x)$, bo okresem funkcji u_k jest liczba 4^{-k}, więc liczba $4^{-n} = 4^{k-n} \cdot 4^{-k}$ jako wielokrotność okresu jest też okresem funkcji u_k. Stąd wynika, że iloraz $\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$ jest sumą $n+1$ składników, z których każdy równy jest ± 1, więc jest liczbą nieparzystą, gdy n jest parzyste i parzystą, gdy n jest nieparzyste. Wynika stąd, że wartość bezwzględną różnicy między kolejnymi wyrazami ciągu $\left(\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right)$ nie jest mniejsza niż 1, więc ciąg ten nie ma granicy skończonej. Jeśli więc funkcja f ma pochodną w punkcie x, to ta pochodna jest nieskończona. ■

Uwaga 25.9 A.S.Besicovitch podał przykład funkcji ciągłej, która w żadnym punkcie nie ma ani jednej pochodnej jednostronnej (ani skończonej ani nieskończonej), ale jego przykład jest istotnie trudniejszy od podanego w tekście i został podany kilkadziesiąt lat po pojawieniu się przykładu Weierstrassa. Oryginalny przykład Weiertrassa był nieco inny od podanego w dowodzie. Była to funkcja postaci $\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$, gdzie oznacza liczbę całkowitą nieparzystą, $b \in (0,1)$ oraz $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Później założenia o liczbach a i b zostały istotnie osłabione: wystarczy założyć, że $0 < b < 1$ i $ab \geqslant 1$, zob. Hardy G. H., *Weierstrass's nondifferentiable function*, Transactions of the American Mathematical Society 17(1916), strony 301-325. Później okazało się, że funkcje o tak nieoczekiwanych własnościach pojawiają się w fizyce, np. w modelu matematycznym ruchów Browna. ■

Zadania

1. Podać przykład takiego ciągu (f_n) funkcji różniczkowalnych na całej prostej, który jest jednostajnie zbieżny do funkcji zerowej, że ciąg (f_n') jego pochodnych jest zbieżny punktowo do funkcji niezerowej.

2. Dowieść, że funkcja ciągła, nigdzie nieróżniczkowalna, którą skonstruowaliśmy w tym rozdziale, nie jest monotoniczna na żadnym przedziale.

3*. Dowieść, że funkcja ciągła, nigdzie nieróżniczkowalna zdefiniowana w tym rozdziale ma nieskończoną pochodną w co najmniej jednym punkcie.

4. Niech I_1, I_2, ... będą otwartymi przedziałami parami rozłącznymi. Dowieść, że istnieje taka nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$, że $f(x) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \ldots$

5. Niech $G_1 \subseteq \mathbb{R}$, $G_2 \subseteq \mathbb{R}$, ... będą zbiorami otwartymi (G_n jest otwarty, jeśli dla każdego $x \in G_n$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że $(x-\delta, x+\delta) \subseteq G_n$). Załóżmy, że $G_1 \cup G_2 \cup \ldots = \mathbb{R}$. Dowieść, ze istnieją takie funkcje $f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$, że jeśli $f_n(x) > 0$, to $x \in G_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

6*. Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Dowieść, że istnieje taka nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $f^{(n)}(0) = a_n$ dla $n = 0, 1, \ldots$ *Jeśli dla pewnej liczby $r > 0$ szereg $\sum a_n \frac{x^n}{n!}$ jest zbieżny na pewnym przedziale $(-r, r)$, a g jest taką nieujemną funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną, że jeśli $|x| \leqslant \frac{1}{3}r$, to $g(x) = 1$ a jeśli $|x| \geqslant \frac{2}{3}r$, to $g(x) = 0$, to możemy przyjąć, że $\varphi(x) = a_0 g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$, funkcja g istnieje, zob. zad 37 z poprzedniego rozdzialu i poprawiać wzór dalej.*

7! Dowieść, że jeśli I jest przedziałem, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcją ciągłą, to dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka funkcja $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, że $F^{(n)} = f$, czyli dowolna funkcja ciągła jest n–tą pochodną pewnej funkcji. Dowieść, że jeśli $F^{(n)} = G^{(n)}$ na przedziale I, to funkcja $F - G$ jest wielomianem stopnia mniejszego niż n.

8. Dowieść, że jeśli funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale domkniętym $[a,b]$ i $f_n(x) = n\big(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\big)$, to $f_n \rightrightarrows f'$

9. Niech $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ dla $x > 1$. Udowodnić, że funkcja ζ jest dobrze zdefiniowana oraz, że jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna.

10. Zbadać, dla jakich $x \in \mathbb{R}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x}{n+x}$ jest zbieżny i znaleźć zbiór wszystkich punktów różniczkowalności jego sumy.

11. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną. Załóżmy, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = g(x)$, przy czym na każdym przedziale ograniczonym ta zbieżność jest jednostajna. Dowieść, że istnieje taka liczba c, że $f(c) = ce^x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

12. Ile pochodnych ma funkcja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin(nx)$?

13. Niech $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin^2(2^{n+1}\pi x)$, jeśli $\frac{1}{2^{n+1}} < x < \frac{1}{2^n}$ oraz $f_n(x) = 0$ dla pozostałych x z przedziału $[0,1]$. Dowieść, że szereg $\sum f_n$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[0,1]$ i $\sum \sup\{f_n(x)\colon \quad x \in [0,1]\} = \infty$.

Oznacza to, że zbieżności jednostajnej tego szeregu nie można wywnioskować z kryterium Weierstrassa.

SZEREGI POTĘGOWE

Przypomnijmy, że szeregiem potęgowym o środku w punkcie p nazywamy szereg postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n$. Udowodniliśmy wcześniej, że dla każdego ciągu (a_n) istnieje takie $r \in [0,\infty]$, że jeśli $|x-p|<r$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n$ jest bezwzględnie zbieżny, a jeśli $|x-p|>r$, to ten szereg jest rozbieżny. Takie r nazywamy promieniem zbieżności szeregu potęgowego. W wielu podręcznikach podawany jest wzór na r. Podamy go też, choć nie jest on nam potrzebny do sformułowania żadnego twierdzenia.

Definicja 26.1 (granicy górnej)
$M \in [-\infty,+\infty]$ jest granicą górną ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy gdy spełnione są oba warunki

(i) dla każdego rosnącego ciągu (k_n), dla którego istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n}$ zachodzi nierówność $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} \leqslant M$ oraz

(ii) M jest najmniejszym elementem zbioru $[-\infty,+\infty]$, dla którego spełniony jest warunek (i). ■

Analogicznie definiowana jest granica dolna ciągu. Granicę górną ciągu (a_n) oznaczamy symbolem $\limsup a_n$, a granicę dolną — symbolem $\liminf a_n$. Granica górna ciągu to kres górny granic wszystkich jego podciągów zbieżnych.

Z definicji wynika od razu, że jeśli ciąg ma granicę, to jest ona też jego granicą górną i dolną.

Lemat 26.2
Istnieje podciąg, którego granica jest równa granicy górnej ciągu.
Dowód. Niech $M=\limsup a_n$. Jeśli $M=-\infty$, to $-\infty$ jest granicą wszystkich tych podciągów ciągu (a_n), które mają granice. Oznacza to, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, więc w tym przypadku twierdzenie jest prawdziwe. Załóżmy, że $M>-\infty$. Niech (M_j) będzie ściśle rosnącym ciągiem o granicy M. Ponieważ $M_1<M$, więc istnieje podciąg (a_{k_n}) ciągu (a_n), którego granica jest większa niż M_1, zatem istnieje takie m_1, że $a_{m_1}>M_1$. Ponieważ $M_2<M$, więc istnieje podciąg (a_{k_n}) ciągu (a_n), którego granica jest większa niż M_2, zatem istnieje takie $m_2>m_1$, że $a_{m_2}>M_2$.

Analogicznie istnieje taka liczba $m_3 > m_2$, że $a_{m_3} > M_3$, itd. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M$, więc z ciągu (a_{m_n}) nie można wybrać podciągu, który ma granicę mniejszą niż $\lim\limits_{n\to\infty} a_{m_n} = M$, a większa niż $M = \limsup a_n$ ta granica też być nie może. Oznacza to, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_{m_n} = M$, co kończy dowód lematu. ■

Lemat 26.3
Jeśli $q > \limsup a_n$, to istnieje taka liczba naturalna n_q, że jeśli $n > n_q$, to $a_n < q$.

Dowód. Załóżmy, ze tak nie jest. Wtedy istnieje taki podciąg (a_{k_n}) ciągu (a_n), że $a_{k_n} \geqslant q$ dla każdego n. To jednak nie jest możliwe, bo wybierając z niego podciąg, który ma granicę, otrzymujemy podciąg ciągu (a_n), którego granica nie jest mniejsza niż $q > \limsup a_n$, wbrew definicji granicy górnej. ■

Z tego lematu wynika, że kryterium pierwiastkowe zbieżności szeregu można wypowiedzieć tak:

Twierdzenie 26.4 (Cauchy'ego)
Jeśli $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, to szereg $\sum a_n$ jest bezwzględnie zbieżny. Jeśli $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny, co więcej jego wyraz nie dąży do 0.

Dowód. Zbieżność wynika natychmiast z lematu poprzedzającego twierdzenie, wystarczy przyjąć np. $q = \frac{1}{2}(1 + \limsup |a_n|)$. W tej sytuacji dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $\sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$, więc $|a_n| < q^n$, więc twierdzenie wynika z kryterium porównawczego. Rozbieżność jest konsekwencją tego, że dla nieskończenie wielu n zachodzi nierówność $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, więc również $|a_n| > 1$, zatem wyraz szeregu nie dąży do 0. ■

Twierdzenie 26.5 (Cauchy'ego – Hadamarda)
Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem liczb. rzeczywistych. Niech $r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$. Wtedy $r \in [0,\infty]$ jest promieniem zbieżności szeregu $\sum a_n(x-p)^n$ dla dowolnego $p \in \mathbb{R}$. Oznacza to, że jeśli $x \in (p-r, p+r)$, to szereg $\sum a_n(x-p)^n$ jest zbieżny, a jeśli $x \notin [p-r, p+r]$, to — rozbieżny.

Dowód. Jeśli $|x-p| < r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$, to zachodzi nierówność $\limsup \sqrt[n]{|a_n||x-p|^n} < 1$, więc szereg $\sum a_n(x-p)^n$ jest bezwzględnie zbieżny, na mocy kryterium pierwiastkowego Cauchy'ego. Jeśli $|x-p| > r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$, to zachodzi nierówność $\limsup \sqrt[n]{|a_n||x-p|^n} > 1$, więc szereg $\sum a_n(x-p)^n$ jest rozbieżny, na mocy kryterium pierwiastkowego Cauchy'ego. ■

Twierdzenie 26.6 (**o jednostajnej zbieżności szeregu potęgowego**) Szereg potęgowy jest zbieżny jednostajnie na każdym domkniętym przedziale ograniczonym, zawartym w przedziale zbieżności.

Dowód. Wystarczy zajmować się szeregami potęgowymi o środku w punkcie 0. Udowodniliśmy już w rozdziale *Ciągi i szeregi funkcyjne I*, że szereg potęgowy jest jednostajnie zbieżny na każdym przedziale postaci $[-a, a]$, jeśli $0 \leqslant a < r$.

Załóżmy teraz, że $0 < r < \infty$ i że szereg $\sum a_n \varrho^n$ jest zbieżny, gdzie $\varrho = r$ lub $\varrho = -r$. Niech $\alpha_n = a_n \varrho^n$ i $t = \frac{x}{\varrho}$, zatem $a_n x^n = \alpha_n t^n$. Twierdzenie zostanie udowodnione, jeśli wykażemy, że jednostajna zbieżność szeregu $\sum \alpha_n t^n$ na przedziale $[0,1]$ wynika ze zbieżności szeregu $\sum \alpha_n$, bo *iksom* z przedziału domkniętego o końcach 0 i ϱ odpowiadają *te* z przedziału $[0,1]$.

Przyjmijmy $s_{n,k} = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+k}$. Mamy wtedy
$\alpha_{n+1}t^{n+1} + \alpha_{n+2}t^{n+2} + \cdots + \alpha_{n+k}t^{n+k} =$
$= s_{n,1}t^{n+1} + (s_{n,2} - s_{n,1})t^{n+2} + \cdots + (s_{n,k} - s_{n,k-1})t^{n+k} =$
$= (1-t)\big(s_{n,1}t^{n+1} + s_{n,2}t^{n+2} + \cdots + s_{n,k-1}t^{n+k-1}\big) + s_{n,k}t^{n+k}$.
Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą. Szereg $\sum \alpha_n$ jest zbieżny, więc spełnia warunek Cauchy'ego, więc dla dostatecznie dużych n i dowolnych k zachodzą nierówności $|s_{n+1}| < \varepsilon$, $|s_{n+2}| < \varepsilon$, $\ldots$, $|s_{n+k}| < \varepsilon$. Stąd, z tego, że $0 \leqslant t \leqslant 1$ i z poprzednich równości wynika, że $\left|s_{n,k}t^{n+k}\right| < \varepsilon$ oraz
$\left|(1-t)\big(s_{n,1}t^{n+1} + s_{n,2}t^{n+2} + \cdots + s_{n,k-1}t^{n+k-1}\big)\right| \leqslant$
$\leqslant \varepsilon(1-t)\big(t^{n+1} + t^{n+2} + \cdots + t^{n+k-1}\big) = \varepsilon(t^{n+1} - t^{n+k}) < \varepsilon$,
więc $\left|a_{n+1}t^{n+1} + a_{n+2}t^{n+2} + \cdots + a_{n+k}t^{n+k}\right| < 2\varepsilon$, co dowodzi jednostajnej zbieżności szeregu $\sum a_n x^n$ na przedziale $[0,1]$. ■

Przypomnijmy, że suma szeregu potęgowego $\sum a_n(x-p)^n$ jest różniczkowalna w punktach wewnętrznych przedziału zbieżności i $\left(\sum a_n(x-p)^n\right)' = \sum na_n(x-p)^{n-1}$, więc pochodna też jest sumą szeregu potęgowego, który ma taki sam promień zbieżności, jak szereg wyjściowy. Stąd —łatwa indukcja — wynika

Twierdzenie 26.7
Suma szeregu potęgowego jest wewnątrz swego przedziału zbieżności różniczkowalna nieskończenie wiele razy.
Jeśli $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n$, to $f^{(k)}(p) = k!a_k$. ■

Z tego twierdzenia wynika, że jeśli równość $\sum a_n(x-p)^n = \sum b_n(x-p)^n$ zachodzi dla wszystkich liczb z pewnego przedziału o środku w punkcie p, to $a_n = b_n$ dla $n = 0, 1, \ldots$ To twierdzenie można wzmocnić osłabiając jego założenia.

Twierdzenie 26.8 (zasada identyczności)
Jeśli istnieje ciąg (x_j) zbieżny do punktu p przy czym $x_j \neq p$ dla dowolnego j i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_j-p)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x_j-p)^n$ dla $j = 1, 2, \ldots$, to $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ...

Dowód. Zdefiniujmy funkcje dwie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n$ oraz $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-p)^n$. Są one nieskończenie wiele razy różniczkowalne na pewnym przedziale o środku p. Ponieważ $f(x_j) = g(x_j)$ i $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = p$ więc,

$$a_0 = f(p) = \lim_{j\to\infty} f(x_j) = \lim_{j\to\infty} g(x_j) = g(p) = b_0 .$$

Wobec tego dla każdego $j \in \{1, 2, \ldots\}$ zachodzi wzór

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_j-p)^{n-1} = \tfrac{f(x_j)-f(p)}{x_j-p} = \tfrac{g(x_j)-g(p)}{x_j-p} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x_j-p)^{n-1} .$$

Funkcje $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_j-p)^{n-1}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x_j-p)^{n-1}$ spełniają założenia dowodzonego twierdzenia, zatem z już udowodnionej części twierdzenia wynika, że $a_1 = b_1$, co pozwala kontynuować indukcyjny dowód wzoru $a_n = b_n$. ■

Definicja 26.9 (funkcji analitycznej)
Funkcja f jest analityczna w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczba $r > 0$ i ciąg (a_n) takie, że jeśli $|x-p| < r$, to

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n$. Funkcję analityczną w każdym punkcie pewnego zbioru A nazywamy analityczną w zbiorze A. ■

Z ostatnio wykazanych twierdzeń wynika, że jeśli funkcja f jest analityczna w punkcie p, to jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w pewnym przedziale o środku w punkcie p. Wiele z dotychczas poznanych funkcji to funkcje analityczne, np. wielomiany, funkcja wykładnicza e^x, logarytm naturalny, sinus, kosinus, funkcja potęgowa x^a. Analityczność sprawdzaliśmy czasem w punkcie 0, czasem w punkcie 1, ale łatwo można było wykazać analityczność w innych punktach. W rozdziale poświęconym regule de l'Hospitala i wzorowi Taylora pojawiły się również funkcje nieskończenie wiele razy różniczkowalne, które nie są analityczne przynajmniej w pewnych punktach.

W przypadku funkcji analitycznych twierdzenia o lokalnych ekstremach i punktach przegięcia umożliwiają wyjaśnienie charakteru punktu, w którym pierwsza pochodna zeruje się. Wynika to stąd, że jeśli funkcja analityczna w punkcie p nie jest stała w pewnym otoczeniu tego punktu, to któraś pochodna w tym punkcie jest różna od zera.

Wiele twierdzeń w przypadku funkcji analitycznych ma prostszą postać niż ich odpowiedniki dla funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych. Teraz udowodnimy kilka twierdzeń, które pozwolą łatwo przekonywać się o analityczności różnych funkcji. Warto w tym miejscu dodać, że długo sądzono, że wszystkie funkcje nieskończenie wiele razy różniczkowalne są analityczne!

Twierdzenie 26.10 (o analityczności w otoczeniu)
Jeżeli funkcja f jest analityczna w punkcie p, to jest analityczna w pewnym przedziale otwartym o środku w punkcie p.

Dowód poprzedzimy twierdzeniem o niezależności sumy szeregu bezwzględnie zbieżnego od kolejności jego wyrazów.

Lemat 26.11 (o dużej zmianie kolejności sumowania)
Jeśli zachodzi jedno z dwóch założeń:

(i) dla każdej liczby całkowitej $m \geqslant 0$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}|$ jest zbieżny i $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}|\Big) < +\infty$,

(ii) dla pewnego różnowartościowego przekształcenia

$\tilde{\sigma}\colon \mathbb{N} \xrightarrow{na} \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ zachodzi nierówność $\sum_{j=0}^{\infty} |a_{\tilde{\sigma}(j)}| < \infty$,

to dla każdego różnowartościowego $\sigma\colon \mathbb{N} \xrightarrow{na} \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ zachodzi wzór

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\Bigr) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{\sigma(j)}\,.$$

Dowód. Zaczniemy od równoważności warunków (i) oraz (ii).

Załóżmy, że spełniony jest warunek (i). Dla dowolnego różnowartościowego $\sigma\colon \mathbb{N} \xrightarrow{na} \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ szereg $\sum_{j=0}^{\infty} |a_{\sigma(j)}|$ jest zbieżny, bo

$$\sum_{j=0}^{\ell} |a_{\sigma(j)}| \leqslant \sum_{m=0}^{p}\Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}|\Bigr) \leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}|\Bigr)$$

dla każdej liczby naturalnej p większej lub równej największemu z pierwszych elementów par $\sigma(0)$, $\sigma(1)$, …, $\sigma(\ell)$).

Załóżmy teraz, że spełniony jest warunek (ii). Dla dowolnych liczb naturalnych p, q i dla każdej liczby naturalnej k spełniona jest nierówność

$$\sum_{m=0}^{q}\Bigl(\sum_{n=0}^{p} |a_{m,n}|\Bigr) \leqslant \sum_{j=0}^{\ell} |a_{\tilde{\sigma}(j)}| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |a_{\tilde{\sigma}(j)}|\,,$$

gdzie ℓ jest tak dużą liczbą, że wśród par $\tilde{\sigma}(0), \tilde{\sigma}(1), \ldots, \tilde{\sigma}(\ell)$ znajdują się wszystkie pary

$$(0,0)\,,\ (0,1)\,,\ \ldots,\ (0,p)\,,\ (1,0)\,,\ \ldots,\ (1,p)\,,\ (q,0)\,,\ \ldots,\ (q,p)\,.$$

Ustalając q i przechodząc do granicy przy $p \longrightarrow \infty$ otrzymujemy nierówność

$$\sum_{m=0}^{q}\Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}|\Bigr) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |a_{\tilde{\sigma}(j)}|\,.$$

Z definicji sumy szeregu wynika, że

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |a_{\tilde{\sigma}(j)}|\,.$$

Wykazaliśmy, że z założenia (ii) wynika założenie (i).

W istocie rzeczy z dowodu równoważności warunków (i) i (ii) wynika równość:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}| = \sum_{j=0}^{\infty} |a_{\tilde{\sigma}(j)}|\,,$$

przy czym jest ona prawdziwa zawsze, również wtedy, gdy sumy nie są skończone.

Niech $\varepsilon > 0$. Dla każdego m istnieje taka liczba $k(m) \in \mathbb{N}$, że $\sum_{n=k(m)+1}^{\infty} |a_{m,n}| < \frac{\varepsilon}{2^{m+3}}$. Wtedy

$$\Big|\sum_{n=k(m)+1}^{\infty} a_{m,n}\Big| \leqslant \sum_{n=k(m)+1}^{\infty} |a_{m,n}| < \frac{\varepsilon}{2^{m+3}},$$

zatem

$$\Big|\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=k(m)+1}^{\infty} a_{m,n}\Big)\Big| < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon}{32} + \cdots = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Niech $r(\varepsilon)$ i $\mu(\varepsilon)$ będą takimi liczbami naturalnymi, że

$$\sum_{j=r(\varepsilon)+1}^{\infty} |a_{\sigma(j)}| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{i} \qquad \sum_{m=\mu(\varepsilon)+1}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}|\Big) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Niech $\rho(\varepsilon)$ oznacza taką liczbę naturalną, że

$$\Big\{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma\big(r(\varepsilon)\big)\Big\} \subseteq$$

$$\subseteq \Big\{\big(0,0\big), \big(0,1\big), \ldots, \big(0,k(0)\big)\Big\} \cup \Big\{\big(1,0\big), \ldots, \big(1,k(1)\big)\Big\} \cup$$

$$\cup \ldots \cup \Big\{\big(\mu(\varepsilon),0\big), \ldots, \big(\mu(\varepsilon), k[\mu(\varepsilon)]\big)\Big\} \subseteq$$

$$\subseteq \Big\{\sigma(0),\, \sigma(1),\, \sigma(2),\, \ldots,\, \sigma\big[\rho(\varepsilon)\big]\Big\}.$$

Wtedy zachodzą nierówności

$$\Big|\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\Big) - \sum_{j=0}^{\infty} a_{\sigma(j)}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big|\sum_{m=\mu(\varepsilon)+1}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\Big)\Big| + \Big|\sum_{m=0}^{\mu(\varepsilon)}\Big(\sum_{n=0}^{k(m)} a_{m,n}\Big) - \sum_{j=0}^{\rho(\varepsilon)} a_{\sigma(j)}\Big| +$$

$$+ \Big|\sum_{m=0}^{\mu(\varepsilon)}\Big(\sum_{n=k(m)+1}^{\infty} a_{m,n}\Big)\Big| + \Big|\sum_{j=\rho(\varepsilon)+1}^{\infty} a_{\sigma(j)}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=\mu(\varepsilon)+1}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}|\Big) + \sum_{j=r(\varepsilon)+1}^{\rho(\varepsilon)} |a_{\sigma(j)}| +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\mu(\varepsilon)}\Big(\sum_{n=k(m)+1}^{\infty}|a_{m,n}|\Big) + \sum_{j=\rho(\varepsilon)+1}^{\infty}|a_{\sigma(j)}| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Ponieważ ε jest dowolną liczbą dodatnią, więc zachodzi równość

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_{m,n}\Big)=\sum_{j=0}^{\infty}a_{\sigma(j)}\,. \ \blacksquare$$

Dowód twierdzenia o analityczności w otoczeniu. Niech $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-p)^n$, r niech będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego i niech q będzie taką liczbą, że $|q-p|<r$. Jeśli $|x-q|<r-|q-p|$, czyli $|x-q|+|q-p|<r$, to

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}|a_n|\tbinom{n}{k}|x-q|^k|q-p|^{n-k}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\big(|x-q|+|q-p|\big)^n<\infty.$$

Korzystając z lematu o dużej zmianie kolejności sumowania możemy napisać:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-p)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\tbinom{n}{k}(x-q)^k(q-p)^{n-k}\Big)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\tbinom{n}{k}(x-q)^k(q-p)^{n-k}\Big)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\tbinom{n}{k}(q-p)^{n-k}\Big)(x-q)^k\,,$$

a to oznacza, że funkcja f jest analityczna w punkcie q. Dowód został zakończony. $\blacksquare$

Uwaga 26.12

Z dowodu twierdzenia o analityczności w otoczeniu wynika, że promień zbieżności szeregu Taylora funkcji f w punkcie q jest równy co najmniej $r-|q-p|$. Może być większy, o czym przekonamy się niebawem. Niech $f(x)=\frac{1}{1+x}$. Zachodzi równość

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\,,$$

więc w tym przypadku promień zbieżności szeregu Taylora w punkcie 0 jest równy 1. Rozwiniemy funkcję f wokół punktu $\frac{1}{2}$. Mamy też

$$f(x)=\frac{1}{3/2+(x-1/2)}=\frac{2}{3}\frac{1}{1+(2/3)(x-1/2)}=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\big(-\tfrac{2}{3}\big)^n\big(x-\tfrac{1}{2}\big)^n\,,$$

więc teraz promień zbieżności jest równy $\frac{3}{2}>\frac{1}{2}=1-\left|\frac{1}{2}-0\right|$. W podobny sposób wykazujemy, że promień zbieżności szeregu Taylora funkcji f w punkcie $-\frac{1}{2}$ jest równy $\frac{1}{2}=1-\left|-\frac{1}{2}-0\right|$. $\blacksquare$

Wniosek 26.13
Z twierdzenia o analityczności w otoczeniu wynika, że funkcja wykładnicza, funkcje sinus i kosinus, wielomiany są analityczne w każdym punkcie. Z dowodu twierdzenia wynika natomiast, że promienie zbieżności ich szeregów Taylora w każdym punkcie są równe $+\infty$. ■

Przykład 26.1 Udowodniliśmy wcześniej, że dla $x \in (-1,1]$ zachodzi równość $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1} x^{n+1}$. Wynika stąd analityczność funkcji $\ln$ w każdym punkcie przedziału otwartego $(-1,1)$. w rzeczywistości jest ona analityczna w każdym punkcie półprostej $(0,\infty)$. Jeśli $p > 0$, to $\ln(p+h) = \ln p + \ln\left(1+\frac{h}{p}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}\left(\frac{h}{p}\right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1}\left(\frac{-1}{p}\right)^{n+1} x^{n+1}$. Oczywiście promień zbieżności otrzymanego szeregu jest równy $|p|$. ■

Uwaga 26.14
Rozwinięcie logarytmu naturalnego wokół punktu 1 można uzyskać znacznie prościej niż poprzednio: wystarczy stwierdzić, że promień zbieżności szeregu jest równy 1, np. stosując kryterium ilorazowe, a następnie stwierdzić, że zachodzi następująca równość $\left(\ln(1+x) - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1} x^{n+1}\right)' = 0$, z której wynika, że funkcja $\ln(1+x) - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ jest stała na przedziale $(-1,1)$, a potem obliczyć jej wartość w punkcie 0. ■

Przykład 26.2 Udowodniliśmy już wcześniej, że dla dowolnej liczby $x \in (-1,1)$ zachodzi wzór $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n} x^n$, więc wykazaliśmy analityczność funkcji x^a w punkcie 1. Stąd wynika łatwo, że jest ona analityczna w każdym punkcie $p > 0$. Mamy $(p+h)^a = p^a\left(1+\frac{h}{p}\right)^a = p^a \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}\left(\frac{h}{p}\right)^n$ dla dowolnej liczby h, której wartość bezwzględna jest mniejsza niż p. ■

Uwaga 26.15
Rozwinięcie $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n} x^n$ można uzyskać prościej niż poprzednio. Bez trudu stwierdzamy, że dla każdego $a \in \mathbb{R}$, które nie jest liczbą całkowitą nieujemną, promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n} x^n$ jest równy 1, a gdy a jest liczbą całkowitą nieujemną promieniem zbieżności jest $+\infty$. Jeśli $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n} x^n$, to

$$(1+x)f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\tbinom{a}{n}x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}n\tbinom{a}{n}x^{n}=a+a\sum_{n=2}^{\infty}\tbinom{a-1}{n-1}x^{n-1}+$$

$$+a\sum_{n=1}^{\infty}n\tbinom{a-1}{n-1}x^{n}=a+a\sum_{n=1}^{\infty}\tbinom{a-1}{n}x^{n}+a\sum_{n=1}^{\infty}\tbinom{a-1}{n-1}x^{n}=$$

$$=a+a\sum_{n=1}^{\infty}\tbinom{a}{n}x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\tbinom{a}{n}x^{n}=af(x)$$ — skorzystaliśmy z tego, że $n\binom{a}{n}=a\binom{a-1}{n-1}$ i $\binom{a-1}{n}+\binom{a-1}{n-1}=\binom{a}{n}$. Teraz mamy

$$\big(f(x)(1+x)^{-a}\big)'=f'(x)(1+x)^{-a}-af(x)(1+x)^{-a-1}=$$
$$=(1+x)^{-a-1}\big((1+x)f'(x)-af(x)\big)=0\,,$$

więc dla każdego $x\in(-1,1)$ zachodzi równość $f(x)(1+x)^{-a}=$ $=f(0)(1+0)^{-a}=1$, czyli $f(x)=(1+x)^{a}$. ■

Z tego, co napisaliśmy wyżej wynika, że w często warto przyjrzeć się szeregowi Taylora, który można znaleźć np. obliczając pochodne funkcji w interesującym nas punkcie, następnie wykazać jakoś zbieżność szeregu, a potem wykazać równość funkcji i sumy szeregu. Celowo unikamy postaci reszty we wzorze Taylora, bo w pewnych przypadkach to skuteczna metoda, ale w innych wymaga sporo wysiłku, np. $\ln(1+x)$, $(1+x)^a$. Można przekonać się o tym oglądając starsze podręczniki, w których stosowano wzory na postać reszty zgodnie z panującą wówczas modą.

Wykażemy teraz jeszcze kilka własności funkcji analitycznych, które ułatwiają zajmowanie się nimi.

Twierdzenie 26.16
Jeśli funkcje f i g są analityczne w punkcie p, to również funkcje $f+g$, $f-g$ i $f\cdot g$ są analityczne w tym punkcie p.

Dowód. Jeśli $f(p+h)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nh^n$, $g(p+h)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nh^n$, to $(f+g)(p+h)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)h^n$, co dowodzi analityczności sumy funkcji analitycznych. W taki sam sposób dowodzimy analityczności różnicy funkcji analitycznych. Analityczność iloczynu funkcji analitycznych wynika z twierdzenia Cauchy'ego o mnożeniu szeregów bezwzględnie zbieżnych (szeregi potęgowe wewnątrz swych przedziałów zbieżności są bezwzględnie zbieżne). ■

Twierdzenie 26.17 (o analityczności złożenia)
Jeśli funkcja f jest analityczna w punkcie p, a funkcja g jest analityczna w punkcie $f(p)$, to ich złożenie $g \circ f$ jest analityczne w punkcie p.

Dowód. Niech $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n$, jeśli $|x-p| < r$ i $r > 0$ oraz $g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\big[y - f(p)\big]^n$, jeśli $|y - f(p)| < \rho$, $\rho > 0$. Ponieważ funkcja zdefiniowana szeregiem potęgowym jest ciągła i szereg potęgowy jest wewnątrz swego przedziału zbieżności jest zbieżny bezwzględnie, więc istnieje taka liczba dodatnia $r_0 < r$, że jeśli $|x - p| < r_0$, to $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x - p|^n < \rho$. Wynika stąd, że $\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x - p|^n\big)^j < \infty$, dzięki czemu możemy zmieniać kolejność sumowania dowolnie. Z twierdzenia o mnożeniu szeregów wynika można szereg potęgowy podnieść do dowolnej naturalnej potęgi. W wyniku otrzymujemy szereg potęgowy. Niech $\big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (x-p)^n\big)^j = \sum_{n=j}^{\infty} a_{j,n}(x-p)^n$. Z nierówności trójkąta wnioskujemy, że prawdziwa jest nierówność

$$\sum_{n=j}^{\infty} |a_{j,n}| \cdot |x - p|^n \leqslant \big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x - p|^n\big)^j .$$

Wynika stąd, że szeregu podwójnym $\sum_{j=0}^{\infty} b_j \left(\sum_{n=j}^{\infty} a_{j,n}(x-p)^n\right)$ można zmieniać kolejność wyrazów dowolnie nie wpływając na jego zbieżność ani sumę. Mamy więc

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j \left(\sum_{n=j}^{\infty} a_{j,n}(x - p)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} \Big(b_j\, a_{j,n}\Big)(x - p)^n .$$

Dowód został zakończony. ■

Wniosek 26.18
Iloraz funkcji analitycznej przez funkcję analityczną różną od 0 jest funkcją analityczną

Dowód. Jeśli g jest funkcją analityczną i $g(p) \neq 0$, to funkcja $\frac{1}{g(x)}$ jest analityczna w punkcie p, bo jest złożeniem funkcji analitycznej g z funkcją $\frac{1}{y}$ analityczną w punkcie $g(p)$. Jeśli funkcja f jest analityczna w punkcie p, to iloraz $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ jest analityczny w punkcie p jako iloczyn funkcji analitycznych. ■

Wniosek 26.19
Każda funkcja wymierna jest analityczna. ■

Twierdzenie 26.20 (o analityczności funkcji odwrotnej)
Jeśli funkcja f jest analityczna w punkcie p i $f'(p) \neq 0$, to po ograniczeniu jej dziedziny do dostatecznie małego otoczenia punktu p otrzymujemy funkcję różnowartościową, której funkcja odwrotna jest analityczna.

Dowód. Niech $T(y) = y - f(p)$ i $S(x) = x + p$. Funkcje T i S są analityczne i odwrotne do nich też, więc możemy zająć się istnieniem funkcji odwrotnej do funkcji $g := T \circ f \circ S$. Jeśli zdołamy wykazać, że to złożenie ma funkcję odwrotną, to będziemy mogli napisać, że prawdziwy jest wzór $f^{-1} = S \circ (T \circ f \circ S)^{-1} \circ T$, więc na mocy poprzedniego twierdzenia funkcja f^{-1} okaże się być funkcją analityczną. Oczywiście $g(0) = T \circ f \circ S(0) = 0$. Niech $g(x) = T \circ f \circ S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Wtedy $a_1 = g'(0) = f'(p) \neq 0$. Chcemy udowodnić, że funkcja g^{-1} jest analityczna w punkcie 0.

Załóżmy, że $g^{-1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ dla dostatecznie małych liczb $|x|$. Udowodnimy, że ta równość wyznacza liczby $b_1, b_2, \ldots$. Wynika z niej i z twierdzenia o złożeniu funkcji analitycznych, że w pewnym otoczeniu 0 spełniona jest równość

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big(\sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j\Big)^n = a_1\big(b_1 x + b_2 x^2 + \cdots\big) + \\ + a_2\big(b_1 x + b_2 x^2 + \cdots\big)^2 + a_3\big(b_1 x + b_2 x^2 + \cdots\big)^3 + \cdots.$$

Zmieniając kolejność sumowania otrzymujemy:

$$x = a_1 b_1 x + \big[a_1 b_2 + a_2 b_1^2\big] x^2 + \big[a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3\big] x^3 + \\ + \big[a_1 b_4 + 2a_2 b_1 b_3 + a_2 b_2^2 + 3a_3 b_1^2 b_2 + a_4 b_1^4\big] x^4 + \cdots.$$

Wynika z tej równości kolejno, że

$$b_1 = \tfrac{1}{a_1}$$
$$b_2 = -\tfrac{1}{a_1}\big[a_2 b_1^2\big];$$
$$b_3 = -\tfrac{1}{a_1}\big[2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3\big];$$
$$b_4 = -\tfrac{1}{a_1}\big[2a_2 b_1 b_3 + a_2 b_2^2 + 3a_3 b_1^2 b_2 + a_4 b_1^4\big].$$

. . . .

Widzimy więc, że udaje się obliczyć kolejno $b_1, b_2, \ldots$ Wobec tego możliwe jest napisanie wzoru na funkcję odwrotną w postaci szeregu potęgowego, co prawie kończy dowód. Nie wiemy nic o zbieżności otrzymanego szeregu. Teoretycznie mogłoby się okazać, że jego promień zbieżności równy jest 0.

Zajmiemy się tym problemem. Ponieważ promień zbieżności szeregu $\sum a_n x^n$ jest dodatni, więc istnieje taka liczba $c>0$, że szereg $\sum a_n c^n$ jest zbieżny bezwzględnie. Wynika stąd, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c^n = 0$, zatem ciąg $\big(a_n c^n\big)$ jest ograniczony. Oznacza to, że istnieje liczba $M>0$ taka, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $|a_n c^n| \leqslant M$, zatem $|a_n| \leqslant Mc^{-n}$. Zdefiniujemy pomocniczą funkcję analityczną za pomocą wzoru

$$h(x) = |a_1|x - Mc^{-2}x^2 - Mc^{-3}x^3 - \cdots .$$

Znajdujemy współczynniki $d_1, d_2, \ldots$ szeregu Maclaurina funkcji h^{-1}. Wyrażamy je za pomocą wzorów otrzymanych na współczynniki funkcji g^{-1}, w których liczby a_1, a_2, a_3,... zastępujemy kolejno liczbami $|a_1|, -Mc^{-2}, -Mc^{-3}, \ldots$. Mamy więc

$$d_1 = \tfrac{1}{|a_1|} \geqslant |b_1|,$$

$$d_2 = -\tfrac{1}{|a_1|}\big[-Mc^{-2}d_1^2\big] = \tfrac{1}{|a_1|}\big[Mc^{-2}d_1^2\big] \geqslant \Big| -\tfrac{1}{a_1}\big[a_2 b_1^2\big]\Big| = |b_2|,$$

$$d_3 = -\tfrac{1}{|a_1|}\big[-2Mc^{-2}d_1d_2 - Mc^{-3}d_1^3\big] =$$

$$= \tfrac{1}{|a_1|}\big[2Mc^{-2}d_1d_2 + Mc^{-3}d_1^3\big] \geqslant \Big| -\tfrac{1}{a_1}\big[2a_2b_1b_2 + a_3b_1^3\big]\Big| = |b_3|.$$

Analogicznie $d_4 \geqslant |b_4|$ itd. (INDUKCJA!). Wynika stąd, że wystarczy wykazać, że promień zbieżności szeregu $\sum d_n x^n$ jest dodatni![26.1] Mamy

$$y = h(x) = |a_1|x - Mc^{-2}x^2 - Mc^{-3}x^3 - \cdots =$$

$$= |a_1|x - \tfrac{Mc^{-2}x^2}{1-c^{-1}x} = \tfrac{|a_1|c^2x - (|a_1|c+M)x^2}{c^2-cx},$$

czyli $(|a_1|c+M)x^2 - (cy+|a_1|c^2)x + c^2y = 0$. Otrzymane równanie kwadratowe rozwiązujemy bez trudu:

$$x = \tfrac{1}{2(|a_1|c+M)}\Big[(cy+|a_1|c^2) \pm \sqrt{(cy+|a_1|c^2)^2 - 4c^2y(|a_1|c+M)}\Big].$$

Ponieważ $h(0)=0$, więc również $h^{-1}(0)=0$. Stąd

[26.1] Ze zbieżności szeregu o większych, nieujemnych wyrazach wynika zbieżność szeregu o mniejszych, nieujemnych wyrazach.

$x = \frac{1}{2(|a_1|c+M)}\Big[(cy+|a_1|c^2)-\sqrt{(cy+|a_1|c^2)^2-4c^2y(|a_1|c+M)}\Big]$.
Wyraziliśmy x jako funkcję zmiennej y i to funkcję analityczną, bowiem złożenie funkcji analitycznych, suma i różnica funkcji analitycznych są funkcjami analitycznymi, wielomian i pierwiastek kwadratowy też są analityczne. Dowód został zakończony. ■

Z udowodnionych twierdzeń wynika od razu, że funkcje analityczne w ustalonym punkcie tworzą zbiór zamknięty ze względu na dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez te, które nie przyjmują wartości 0. Można je też składać i odwracać. Wyjaśnia to, dlaczego praktycznie wszystkie, którymi się zajmujemy, są analityczne, czasem z wyjątkiem nielicznych punktów, jak np. funkcja $x^{13}|x|$, która nie jest analityczna w punkcie 0. Bardziej ambitny przykład to funkcja zdefiniowana równościami $f(x) = 0$ dla $x \leqslant 0$ i $f(x) = e^{-1/x}$ dla $x > 0$. Ta funkcja jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna. Mamy $f^{(n)}(0) = 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Gdyby była analityczna w punkcie 0, to zachodziłaby równość $f(x) = 0 + \frac{0}{1!}x + \frac{0^2}{2!}x^2 + \cdots = 0$ dla dostatecznie małych $|x|$, ale tak nie jest dla **żadnego** $x > 0$.

Przykład 26.3 Rozwiniemy funkcję $\frac{1}{(1+x)^3}$ w szereg potęgowy o środku w punkcie 0. Natychmiast nasuwają się trzy metody postępowania:

1° obliczyć pochodne funkcji w punkcie 0 i stwierdzić, że jest ona równa sumie swego szeregu Taylora w pewnym otoczeniu punktu 0, bo jest analityczna w tym punkcie jako iloraz funkcji analitycznych;

2° rozwinąć w szereg potęgowy o środku w punkcie 0 funkcję $\frac{1}{1+x}$ i podnieść wynik do trzeciej potęgi korzystając z twierdzenia Cauchy'ego o mnożeniu szeregów zbieżnych bezwzględnie;

3° rozwinąć w szereg potęgowy o środku w punkcie 0 funkcję $\frac{1}{1+x}$ i skorzystać z wzoru $\left(\frac{1}{1+x}\right)'' = \frac{2}{(1+x)^3}$ oraz twierdzenia o różniczkowaniu szeregów potęgowych.

Nie korzystamy z już poznanego wzoru dwumianowego Newtona $(1+x)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}x^n$, choć to najłatwiejsza metoda w tym przypadku, bo na jednym prostym przykładzie pokazujemy, jak działają różne metody omijające postać reszty we wzorze Taylora.

1° Mamy $\big((1+x)^{-3}\big)^{(n)} = (-1)^n \frac{(n+2)!}{2!}(1+x)^{-3-n}$. W punkcie 0 ta pochodna równa jest $(-1)^n \frac{(n+2)!}{2!}$. Stąd wynika równość $(1+x)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+2)!}{n!\cdot 2!}x^n$ dla każdej liczby x, dla której szereg $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+2)!}{n!\cdot 2!}x^n$ jest zbieżny, więc dla $x \in (-1,1)$.

2° Z wzoru na sumę szeregu geometrycznego dla $x \in (-1,1)$ wynika, że $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$, a stąd:

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\Big) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}(-x)^k(-x)^{n-k}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}(-x)^n\Big) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-x)^n .$$

Mnożymy dalej

$$\frac{1}{(1+x)^3} = \frac{1}{(1+x)^2}\cdot\frac{1}{1+x} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-x)^n\Big)\cdot\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\Big) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}(k+1)(-x)^k(-x)^{n-k}\Big) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}(k+1)(-x)^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{2}(-x)^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}(-x)^n .$$

3° Mamy $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$, zatem

$$\frac{1}{(1+x)^3} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1+x}\Big)'' = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)(-x)^{n-2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}(-x)^n . \ \blacksquare$$

Przykład 26.4 Niech $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ dla tych $x \in \mathbb{R}$, dla których $1 - x - x^2 \neq 0$, tzn. dla $x \neq \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$. Funkcja f jest analityczna jako iloraz dwu funkcji analitycznych. Znajdziemy jej szereg Taylora w punkcie 0. Zachodzi równość $1 - x - x^2 = -\big(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\big)\big(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\big)$. Oznaczmy $b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $c = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Mamy $b + c = -1$, $bc = -1$ i $b - c = \sqrt{5}$. Wobec tego możemy napisać $\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{-x}{(x-b)(x-c)} = \frac{-x}{b-c}\big(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c}\big) =$

$$= \frac{-x}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{c}\frac{1}{1-x/c} - \frac{1}{b}\frac{1}{1-x/b}\Big) = \frac{-x}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{x}{c}\Big)^n - \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{x}{b}\Big)^n\Big) =$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{x}{b}\Big)^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{x}{c}\Big)^{n+1}\Big) = \frac{\sqrt{5}}{5}\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n(c^n - b^n) =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{\infty}x^n\big((-c)^n-(-b)^n\big)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{\infty}x^n\Big(\big(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^n-\Big(\big(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\big)\Big)^n\ . \ \blacksquare$$

Przykład 26.5 Znajdziemy wzór na n–ty wyraz ciągu Fibonacciego, który jest zdefiniowany w następujący sposób: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ oraz $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Niech $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ dla tych x, dla których szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny. Z definicji ciągu (a_n) wynika, że

$$x^2 f(x) + x f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} x^{n+2} + a_1 x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} + a_1 x^2 =$$

$$= F(x) - (a_1 x + a_2 x^2) + a_1 x^2 = F(x) - a_1 x = F(x) - x\,.$$

Stąd wynika, że $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ dla wszystkich tych x, dla których szereg jest zbieżny. Bez trudu (łatwa indukcja) dowodzimy, że $0 < a_n < 2^n$, a to oznacza, że dla każdego $x \in \big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)$ szereg jest zbieżny. Z rezultatów uzyskanych w poprzednim przykładzie wynika, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}\sum_{n=1}^{\infty} x^n\Big(\big(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^n - \big(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^n\Big)\,.$$

Oznacza to, że $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^n - \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^n\Big)$. ■

Teraz udowodnimy twierdzenie udowodnione przez L.Eulera, z którego skorzystamy w dalszym ciągu. Samo twierdzenie też jest warte poznania.

Twierdzenie 26.21 (o postaci iloczynowej sinusa)
Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$\sin x = x\big(1-\tfrac{x^2}{\pi^2}\big)\big(1-\tfrac{x^2}{4\pi^2}\big)\big(1-\tfrac{x^2}{9\pi^2}\big)\cdot\ldots = x\prod_{n=1}^{\infty}\big(1-\tfrac{x^2}{n^2\pi^2}\big)\,.$$

Dowód. Udowodnimy najpierw, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją takie wielomiany P_n i Q_n stopnia n, że dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzą równości

$\sin(2n+1)\alpha = \sin\alpha P_n(\sin^2\alpha)$ i $\cos(2n+1)\alpha = \cos\alpha Q_n(\cos\alpha)$.
Wynika to z następujących wzorów (indukcja):

$\sin(2n+1)\alpha = \sin\big((2n-1)\alpha + 2\alpha\big) = \sin(2n-1)\alpha\cos 2\alpha +$
$+\sin 2\alpha\cos(2n-1)\alpha = \sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)P_{n-1}(\sin^2\alpha) +$
$+\,2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)Q_{n-1}(1-\sin^2\alpha)\,;$
$\cos(2n+1)\alpha = \cos\big((2n-1)\alpha + 2\alpha\big) = \cos(2n-1)\alpha\cos 2\alpha -$
$-\sin(2n-1)\alpha\sin 2\alpha = \cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1)Q_{n-1}(\cos^2\alpha) -$
$-\,2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)P_{n-1}(1-\cos^2\alpha)\,.$

Każda z liczb $\sin^2\frac{\pi}{2n+1} < \sin^2\frac{2\pi}{2n+1} < \ldots < \sin^2\frac{n\pi}{2n+1}$ jest pierwiastkiem P_n, bo $0 = \sin(k\pi) = \sin\frac{k\pi}{2n+1}P_n(\sin^2\frac{k\pi}{2n+1})$ oraz $\sin\frac{k\pi}{2n+1} \neq 0$ dla $k = 1,2,\ldots,n$. Niech $x_k = \sin^2\frac{k\pi}{2n+1}$ dla $k = 1,2,\ldots,n$. Wobec tego, że liczba pierwiastków jest równa stopniowi wielomianu, istnieje taka liczba A_n, że równość

$$P_n(x) = A_n\big(1-\tfrac{x}{x_1}\big)\big(1-\tfrac{x}{x_2}\big)\ldots\big(1-\tfrac{x}{x_n}\big)$$

zachodzi dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$, zatem

$$\tfrac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha} = A_n\big(1-\tfrac{\sin^2\alpha}{x_1}\big)\big(1-\tfrac{\sin^2\alpha}{x_2}\big)\cdot\ldots\cdot\big(1-\tfrac{\sin^2\alpha}{x_k}\big)\,.$$

Z równości $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha} = 2n+1$ i $\lim\limits_{\alpha\to 0}\big(1-\frac{\sin^2\alpha}{x_j}\big) = 1$ wynika, że $A_n = 2n+1$. Mamy więc

$$\sin(2n+1)\alpha = (2n+1)\cdot\sin\alpha\cdot$$
$$\cdot\big(1-\tfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\big)\cdot\big(1-\tfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\big)\cdot\ldots\cdot\big(1-\tfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\big)\,.$$

Podstawiając $\alpha = \frac{x}{2n+1}$ otrzymujemy

$$\sin x = (2n+1)\cdot\sin\tfrac{x}{2n+1}\cdot\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right).$$

Zajmiemy się granicą prawej strony przy $n\longrightarrow\infty$. Niech

$$r_{n,k}(x) = \left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{(k+1)\pi}{2n+1}}\right)\cdot\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{(k+2)\pi}{2n+1}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right).$$

Zakładać będziemy, że $k>1$ jest tak dużą liczbą naturalną, że zachodzą nierówności $\frac{x^2}{4k^2} < \frac{1}{2}$ i $x^2 < k$.

Sinus jest funkcją ściśle wklęsłą na przedziale $[0,\pi]$, więc $\frac{2\alpha}{\pi} < \sin\alpha < \alpha$ dla $\alpha\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big)$. Dalej zakładamy, że $n>\ell>k$. Mamy $\sin^2\frac{x}{2n+1} \leqslant \frac{x^2}{(2n+1)^2}$ i $\sin^2\frac{\ell\pi}{2n+1} > \frac{4}{\pi^2}\frac{\ell^2\pi^2}{(2n+1)^2} = \frac{4\ell^2}{(2n+1)^2}$.

Stąd wynika, że: $\quad 1 \geqslant 1-\dfrac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\ell\pi}{2n+1}} \geqslant 1-\frac{x^2}{4\ell^2} \geqslant 1-\frac{x^2}{\ell^2}\,.$

Jeśli $-1 < c_j \leqslant 0$ dla $j = 1, 2, \ldots, m$, to zachodzi nierówność Bernoulliego $(1 + c_1)(1 + c_2)\ldots(1 + c_m) \geqslant 1 + c_1 + c_2 + \cdots + c_m$ — łatwiutka indukcja. Mamy wobec tego

$r_{n,k}(x) \geqslant \left(1 - \frac{x^2}{(k+1)^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(k+2)^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \geqslant$

$\geqslant 1 - \frac{x^2}{(k+1)^2} - \frac{x^2}{(k+2)^2} - \cdots - \frac{x^2}{n^2} >$

$> 1 - \frac{x^2}{k(k+1)} - \frac{x^2}{(k+1)(k+2)} - \cdots - \frac{x^2}{(n-1)n} =$

$= 1 - \frac{x^2}{k} + \frac{x^2}{k+1} - \frac{x^2}{k+1} + \frac{x^2}{k+2} - \cdots - \frac{x^2}{n-1} + \frac{x^2}{n} = 1 - \frac{x^2}{k} + \frac{x^2}{n} > 1 - \frac{x^2}{k}$.

Z otrzymanego oszacowania wynika, że iloczyn

$s_{n,k}(x) = x\,\frac{\sin\frac{x}{2n+1}}{\frac{x}{2n+1}}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\right)\ldots\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right)$

znajduje się między liczbami $\sin x$ i $\frac{k}{k-x^2}\sin x$, bowiem $\sin x = s_{n,k}(x) \cdot r_{n,k}(x)$. Obliczając granicę otrzymujemy następującą równość $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n,k}(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$, a z niej wynika, że $\sin x \leqslant x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \leqslant \frac{k}{k-x^2}\sin x$, jeśli $\sin x > 0$. Jeżeli natomiast $\sin x < 0$, to otrzymujemy nierówność $\sin x \geqslant x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \geqslant \frac{k}{k-x^2}\sin x$. Z twierdzenia o trzech ciągach wynika więc, że jeśli $\sin x \neq 0$, to zachodzi równość $\sin x = x\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$, której dowód był naszym celem. Jeśli natomiast $\sin x = 0$, to $x = \ell\pi$ dla pewnej liczby całkowitej ℓ, ale wtedy $x\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = 0$, więc również w tym przypadku równość ma miejsce. ■

Uwaga 26.22
W istocie rzeczy wykazaliśmy, że zbieżność jest nie tylko punktowa, ale jednostajna na przedziałach ograniczonych, choć nie jest jednostajna na całej prostej. ■

Przykład 26.6 Jeśli liczba x nie jest całkowitą wielokrotnością liczby π, to zachodzi równość $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$.

Mamy $|\sin x| = |x|\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left|1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right|\left|1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right|\ldots\left|1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|\right)$, więc $\ln|\sin x| = \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|$. Szereg pochodnych, czyli $\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{-2x}{n^2\pi^2}}{1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}} = \frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$, jest jednostajnie zbieżny na każdym przedziale, który nie zawiera całkowitych wielokrotności liczby π, bo jeśli $k\pi < a \leqslant x \leqslant b < (k+1)\pi$, to $\left|\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}\right| \leqslant \frac{2(1+|k|)\pi}{n^2\pi^2-(1+|k|)^2\pi^2} \leqslant \frac{2(1+|k|)}{\pi}\cdot\frac{2}{n^2} = \frac{4(1+|k|)}{\pi n^2}$ dla każdej liczby naturalnej n, dla której $n^2-(1+|k|)^2 > \frac{1}{2}n^2$. Stąd i ze zbieżności szeregu $\sum\frac{1}{n^2}$ wynika jednostajna zbieżność szeregu pochodnych na przedziale $[a,b]$. Wobec tego wolno różniczkować szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\left|1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|$ „wyraz po wyrazie", zatem

$$\operatorname{ctg} x = (\ln|\sin x|)' = \frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}\,. \blacksquare$$

Przykład 26.7 Przedstawimy funkcję $x\operatorname{ctg} x$ w postaci sumy szeregu potęgowego o środku w punkcie 0 — jest to możliwe, bo funkcja $\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots}$ jest analityczna w punkcie 0 i wobec tego funkcja $x\operatorname{ctg} x = \frac{x}{\sin x}\cdot\cos x$ jest analityczna jako iloczyn funkcji analitycznych. Jeśli $|x|<\pi$ i $n\geqslant 1$, to $\frac{2x^2}{x^2-n^2\pi^2} = \frac{-2x^2}{n^2\pi^2}\frac{1}{1-x^2/(n\pi)^2} = \frac{-2x^2}{n^2\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)^k = -2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{n\pi}\right)^{2(k+1)}$.
Szeregi te są zbieżne bezwzględnie, więc

$$x\operatorname{ctg} x = 1+\frac{2x^2}{x^2-n^2\pi^2} = 1-2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{n\pi}\right)^{2(k+1)} =$$
$$= 1-2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n\pi}\right)^{2k} = 1-2\sum_{k=1}^{\infty}\left(x^{2k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}\pi^{2k}}\right).$$

Przypomnijmy, że $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$, więc $\zeta(2k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$. Wobec tego $x\operatorname{ctg} x = 1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^{2k}}\zeta(2k)\,x^{2k}$. Mamy $\big(x\operatorname{ctg} x\big)' = \operatorname{ctg} x-\frac{x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x\sin x-x}{\sin^2 x}$. Obliczamy drugą pochodną w zerze: $\big(x\operatorname{ctg} x\big)''_{x=0} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos h\sin h-h}{h\sin^2 h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{(1-h^2/2)(h-h^3/6)-h}{h^3} = -\frac{2}{3}$ — zastąpiliśmy funkcje kosinus i sinus ich trzecimi wielomianami Taylora. Stąd wniosek: $\frac{1}{2}\big(-\frac{2}{3}\big) = -\frac{2}{\pi^2}\zeta(2) = -\frac{2}{\pi^2}\big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\big)$, zatem $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. $\blacksquare$

Uwaga 26.23 (o funkcjach hiperbolicznych)
Podamy teraz definicje kosinusa i sinusa hiperbolicznego.
$\cosh x = \frac{1}{2}\big(e^x+x^{-x}\big)$, $\sinh x = \frac{1}{2}\big(e^x-x^{-x}\big)$.

Czytelnik sprawdzi, że jeśli $x,y\in\mathbb{R}$, to zachodzą równości

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,,$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y\,,$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y\,,$$
$$\lim_{x\to 0} \tfrac{\sinh x}{x} = 1\,.$$

Podobnie jak w przypadku kosinusa i sinusa można udowodnić, że podane równości jednoznacznie definiują te funkcje.

Definiowany jest również tangens hiperboliczny i kotangens hiperboliczny: $\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ i $\operatorname{ctgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$. Można dowieść, że $\sinh x = x\prod_{n=1}^{\infty}\big(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\big)$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$. Z tego wzoru Czytelnik może wyprowadzić wzór $\operatorname{tgh} x = \frac{1}{x} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2\pi^2}$. Można też wykazać, że $x\operatorname{ctgh} x = 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\zeta(2n)\frac{x^{2n}}{\pi^{2n}}$. ■

Przykład 26.8 Opowiemy krótko o tzw. liczbach Bernoulliego, które zaczął używać Jacob Bernoulli (1654 – 1705)[26.2] w związku z wzorami na sumę potęg kolejnych liczb naturalnych.

Wykażemy najpierw, że dla każdej liczby całkowitej $k\geqslant 0$ istnieje taki wielomian w_k stopnia $k+1$, że dla każdego n zachodzi wzór $1^k+2^k+\dots+n^k = w_k(n)$. Dla $k=0$ mamy $1^0+2^0+\dots+n^0 = n$, więc $w_0(n)=n$. Dla $k=1$ mamy $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac12 n + \frac12 n^2 = w_1(n)$. Załóżmy, że dla każdego $j=0,1,\dots,k$ istnieje taki wielomian stopnia $j+1$, że dla każdego naturalnego n zachodzi wzór

$$1^j+2^j+\dots+n^j = w_j(n)\,.$$

Napiszmy wzory:

$$(1+1)^{k+1} - 1^{k+1} = \tbinom{k+1}{k}1^k + \tbinom{k+1}{k-1}1^{k-1} + \dots + \tbinom{k+1}{1}1 + 1\,,$$
$$(2+1)^{k+1} - 2^{k+1} = \tbinom{k+1}{k}2^k + \tbinom{k+1}{k-1}2^{k-1} + \dots + \tbinom{k+1}{1}2 + 1\,,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = \tbinom{k+1}{k}n^k + \tbinom{k+1}{k-1}n^{k-1} + \dots + \tbinom{k+1}{1}n + 1\,.$$

Dodając je stronami i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy:

$$n^{k+1} + \tbinom{k+1}{k}n^k + \dots + \tbinom{k+1}{1}n = (n+1)^{k+1} - 1 =$$
$$= \tbinom{k+1}{k}(1^k+2^k+\dots+n^k) + \tbinom{k+1}{k-1}(1^{k-1}+2^{k-1}+\dots+n^{k-1}) +$$

[26.2] Książkę, w której pojawiły się te liczby opublikowano 8 lat po jego śmierci, w 1713 r

$+\cdots+\binom{k+1}{k}(1+2+\cdots+n)+n=\binom{k+1}{k}(1^k+2^k+\cdots+n^k)+$
$+\binom{k+1}{k-1}w_{k-1}(n)+\cdots+\binom{k+1}{1}w_1(n)+\binom{k+1}{0}w_0(n)$, zatem

$$1^k+2^k+\cdots+n^k=\tfrac{1}{k+1}\Big[n^{k+1}+\binom{k+1}{k}n^k+\cdots+\binom{k+1}{1}n-$$
$$-\binom{k+1}{k-1}w_{k-1}(n)-\ldots-\binom{k+1}{1}w_1(n)-\binom{k+1}{0}w_0(n)\Big].$$

n^{k+1} występuje w nawiasie tylko raz, zatem istnieje taki wielomian w_k stopnia $k+1$, że $1^k+2^k+\cdots+n^k=w_k(n)$.

Niech $w_j(n)=a_{j,0}+a_{j,1}n+a_{j,2}n^2+\cdots+a_{j,j+1}n^{j+1}$ dla $j=1,2,\ldots$. Mamy więc

$$w_k(n)=\tfrac{1}{k+1}\Big(n^{k+1}+\binom{k+1}{k}n^k+\cdots+\binom{k+1}{1}n-$$
$$-\binom{k+1}{k-1}w_{k-1}(n)-\cdots-\binom{k+1}{1}w_1(n)-\binom{k+1}{0}w_0(n)\Big).$$

Oznacza to, że dla każdego n zachodzi równość

$$n^{k+1}+\binom{k+1}{k}n^k+\cdots+\binom{k+1}{1}n=$$
$$=\binom{k+1}{k}w_k(n)+\binom{k+1}{k-1}w_{k-1}(n)+\cdots+\binom{k+1}{1}w_1(n)+\binom{k+1}{0}w_0(n).$$

Współczynniki przy n^i po obu stronach równości są równe, więc

$$\binom{k+1}{i}=\binom{k+1}{k}a_{k,i}+\binom{k+1}{k-1}a_{k-1,i}+\cdots+\binom{k+1}{i-1}a_{i-1,i} \qquad (\spadesuit)$$

oraz $a_{j,0}=w_j(0)=0$ dla $j=1,2,\ldots$ — prosta indukcja.

Jeśli $i=k+1$, to $1=\binom{k+1}{k+1}=\binom{k+1}{k}a_{k,k+1}$, stąd $a_{k,k+1}=\frac{1}{k+1}$.

Dalej $k+1=\binom{k+1}{k}a_{k,k}+\binom{k+1}{k-1}a_{k-1,k}=(k+1)a_{k,k}+\frac{(k+1)k}{2}\cdot\frac{1}{k}$, zatem $a_{k,k}=\frac{1}{2}$ dla $k=1,2,\ldots$

Oznaczmy $b_{j,i}=a_{j,i}$ dla $j\neq i$ oraz $b_{i,i}=-a_{i,i}=-\frac{1}{2}$. Dla $i=1,2,\ldots,k$ równość $(\spadesuit)$ można więc przepisać w taki sposób

$$0=\binom{k+1}{k}b_{k,i}+\binom{k+1}{k-1}b_{k-1,i}+\cdots+\binom{k+1}{i-1}b_{i-1,i}. \qquad (\heartsuit)$$

Wraz z równością $b_{i-1,i}=a_{i-1,i}=\frac{1}{i}$, pozwala on na znajdowanie kolejnych liczb $b_{j,i}$. Dla kolejnych $i=1,2,\ldots,k$ otrzymujemy:

$0=\binom{k+1}{k}b_{k,1}+\binom{k+1}{k-1}b_{k-1,1}+\cdots+\binom{k+1}{0}b_{0,1}, \quad b_{0,1}=1,$

$0=\binom{k+1}{k}b_{k,2}+\binom{k+1}{k-1}b_{k-1,2}+\cdots+\binom{k+1}{1}b_{1,2}, \quad b_{1,2}=\frac{1}{2},$

$0=\binom{k+1}{k}b_{k,3}+\binom{k+1}{k-1}b_{k-1,3}+\cdots+\binom{k+1}{2}b_{2,3}, \quad b_{2,3}=\frac{1}{3},$

....

$0=\binom{k+1}{k}b_{k,k}+\binom{k+1}{k-1}b_{k-1,k}, \quad b_{k-1,k}=\frac{1}{k}.$

Wykażemy, że dla każdego $p\in\mathbb{N}$ i każdego $k\geqslant p-1$ zachodzi wzór $b_{k+1,p+1}=\frac{k+1}{p+1}b_{k,p}$. Zastosujemy indukcję względem k.

Dla $k=p-1$ mamy $b_{p-1+1,p+1}=\frac{1}{p+1}=\frac{p}{p+1}\cdot\frac{1}{p}=\frac{p-1+1}{p+1}b_{p-1,p}$. Załóżmy, że $b_{j+1,p+1}=\frac{j+1}{p+1}b_{j,p}$ dla wszystkich $j\in[p-1,k]\cap\mathbb{Z}$. Z równości $(\heartsuit)$, w której zastępujemy k przez $k+2$ wynika, że
$b_{k+2,p+1}=-\frac{1}{k+3}\left[\binom{k+3}{k+1}b_{k+1,p+1}+\binom{k+3}{k}b_{k,p+1}+\dots+\binom{k+3}{p}b_{p,p+1}\right]=$
$=-\frac{1}{k+3}\left[\binom{k+3}{k+1}\frac{k+1}{p+1}b_{k,p}+\binom{k+3}{k}\frac{k}{p+1}b_{k-1,p}+\dots+\binom{k+3}{p}\frac{p}{p+1}b_{p-1,p}\right]=$
$=-\frac{1}{p+1}\left[\binom{k+2}{k}b_{k,p}+\binom{k+2}{k-1}b_{k-1,p}+\dots+\binom{k+2}{p-1}b_{p-1,p}\right]=$
$=\frac{1}{p+1}\binom{k+2}{k+1}b_{k+1,p}=\frac{k+2}{p+1}b_{k+1,p}$ — przedostatnia równość to konsekwencja wzoru $(\heartsuit)$. Indukcja została zakończona.

Stosując udowodnioną równość $p-1$ razy otrzymujemy
$b_{k,p}=\frac{k}{p}b_{k-1,p-1}=\frac{k(k-1)}{p(p-1)}b_{k-2,p-2}=\ldots=\frac{k(k-1)\ldots(k-p+2)}{p(p-1)\ldots2}b_{k-p+1,1}$.
Z otrzymanej właśnie równości wynika, że jeśli znamy wyrazy ciągu $(b_{k,1})_{k=0}^{\infty}$, to możemy znaleźć liczby $b_{k,i}$ dla $i\leqslant k+1$.

Niech $b_k=b_{k,1}$. Dla $k\geqslant1$ mamy więc

$$\binom{k+1}{k}b_k+\binom{k+1}{k-1}b_{k-1}+\dots+\binom{k+1}{1}b_1+\binom{k+1}{0}b_0=0 \qquad (\mathbf{B}),$$

zatem

$$\frac{1}{1!}\frac{b_k}{k!}+\frac{1}{2!}\frac{b_{k-1}}{(k-1)!}+\dots+\frac{1}{k!}\frac{b_1}{1!}+\frac{1}{(k+1)!}\frac{b_0}{0!}=0 \qquad (\clubsuit).$$

Niech $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}x^n$. Jeśli promień zbieżności tego szeregu jest dodatni, to z twierdzenia Cauchy'ego o mnożeniu szeregów wynika, że każdego x z przedziału zbieżności zachodzi równość
$g(x)(e^x-1)=b_0x+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1!}\frac{b_k}{k!}+\frac{1}{2!}\frac{b_{k-1}}{(k-1)!}+\dots+\frac{1}{k!}\frac{b_1}{1!}+\frac{1}{(k+1)!}\frac{b_0}{0!}\right)x^{k+1}$,
gdzie $b_0=1$. Jeśli promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}x^n$ jest dodatni, to $g(x)\big(e^x-1\big)=x$, zatem $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}x^n=g(x)=\frac{x}{e^x-1}$. Funkcja $\frac{x}{e^x-1}=\frac{1}{1+x/2!+x^2/3!+\cdots}$ jest analityczna w punkcie 0, bo jest ilorazem funkcji analitycznych w tym punkcie. Jeśli $\frac{x}{e^x-1}=$ $=B_0+\sum_{k=1}^{\infty}B_nx^n$, $B_0=1$, to zastępując w równościach $(\clubsuit)$ liczby $b_1,b_2,\ldots$ liczbami $B_1,B_2,\ldots$ otrzymujemy wzory:

$$\frac{1}{1!}\frac{B_k}{k!}+\frac{1}{2!}\frac{B_{k-1}}{(k-1)!}+\dots+\frac{1}{k!}\frac{B_1}{1!}+\frac{1}{(k+1)!}\frac{B_0}{0!}=0.$$

Ponieważ te wzory jednoznacznie definiują ciąg (B_n) i $b_0=B_0$, więc $b_n=B_n$ dla każdego n. Wykazaliśmy zatem, że $\frac{x}{e^x-1}=$ $=b_0x+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1!}\frac{b_k}{k!}+\frac{1}{2!}\frac{b_{k-1}}{(k-1)!}+\dots+\frac{1}{k!}\frac{b_1}{1!}+\frac{1}{(k+1)!}\frac{b_0}{0!}\right)x^{k+1}=g(x)$.

Zauważmy, że funkcja

$h(x) := g(x) + \frac{x}{2} = \frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{x}{2}\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}} = \frac{x}{2}\operatorname{ctgh}\frac{x}{2}$ jest parzysta, więc jej pochodne nieparzystego rzędu w punkcie 0 są równe 0. Mamy $h^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = b_n$ dla $n = 2, 3, \ldots$ i $h'(0) = g'(0) + \frac{1}{2}$. Wobec tego $b_{2n+1} = 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$ i $h'(0) = 0$, więc $g'(0) = -\frac{1}{2}$.

Liczby $B_0, B_1, B_2, \ldots$ nazywane są często liczbami Bernoulliego. Z wzoru **(B)** wynikają kolejno równości: $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$ itd.

Przypomnijmy, że dla $|x| < \pi$ zachodzi wzór [26.3] $x \operatorname{ctgh} x = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\zeta(2n)\frac{x^{2n}}{\pi^{2n}}$. Wynika stąd, że

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\zeta(2n)\frac{x^{2n}}{2^{2n}\pi^{2n}} = \frac{x}{2}\operatorname{ctgh}\frac{x}{2} = g(x) + \frac{x}{2} = 1 + \frac{B_2}{2!}x^2 + \frac{B_4}{4!}x^4 + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n},$$

więc $2(-1)^{n-1}\frac{\zeta(2n)}{2^{2n}\pi^{2n}} = \frac{B_{2n}}{(2n)!}$, co można przepisać w postaci

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \cdots = \zeta(2n) = (-1)^{n-1}B_{2n}\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}.$$

W przykładzie 26.7 udowodniona została następującą równość $x \operatorname{ctg} x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^{2n}}\,\zeta(2n)\,x^{2n}$, którą teraz zapiszemy tak

$$x \operatorname{ctg} x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^{2n}}\,(-1)^{n-1}B_{2n}\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}\,x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}B_{2n}x^{2n}.$$

Mamy $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = -2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = -2\operatorname{ctg} 2x$, zatem

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2\operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{x}\big(x\operatorname{ctg} x - 2x\operatorname{ctg} 2x\big) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}B_{2n}\big(x^{2n} - (2x)^{2n}\big) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}(1-2^{2n})}{(2n)!}B_{2n}x^{2n-1}.$$

Znaleźliśmy szereg Maclaurina funkcji tangens. Wszystkie pochodne nieparzystego rzędu funkcji tangens są dodatnie, zatem $(-1)^{n-1}B_{2n} > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Liczby $B_2, B_6, B_{10}, \ldots$ są więc dodatnie, zaś liczby $B_4, B_8, B_{12}, \ldots$ — ujemne. Kończymy krótki przegląd zagadnień związanych z liczbami Bernoulliego. ■

[26.3] zob. uwaga 26.23

Zadania

1. Dowieść, że jeżeli funkcja f jest nieparzysta i analityczna w punkcie 0, to $f^{(2n)}(0) = 0$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

2. Znaleźć szereg Maclaurina funkcji f, jeśli $f(x) =$

1. $(1+x)\ln(1+x)$;
2. $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$;
3. $\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$;
4. $\operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}$;
5. $\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$;
6. $\arccos(1-2x^2)$;
7. $x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$;
8. $x\arcsin x - \sqrt{1-x^2}$;
9. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$;
10. $(1+x)e^{-x}$;
11. $e^x \sin x$;
12. $(1-x)^2\cosh\sqrt{|x|}$;
13. $\big(\ln(1-x)\big)^2$;
14. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;
15. $e^x\cos x$;
16. $(1+x)^{-1}\ln(1+x)$;
17. $\cos(b\arcsin x)$, $b \in \mathbb{R}$;
18. $x^{-2}(\arcsin x)^2$;
19. $\cos^2 x$;
20. $\sin^3 x$;
21. $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$;
22. $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$;
23. $(1+x+x^2+x^3+x^4)^{-1}$;
24. $(1+x+x^2)^{-1}$;
25. $e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
26. $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$
27. $\sin(b\arcsin x)$, $b \in \mathbb{R}$;
28. $(\operatorname{arctg} x)^2$;
29. $\sin(b\arccos x)$, $b \in \mathbb{R}$;
30. $\sin(3x)\sin(5x)$.

3. Znaleźć przedział zbieżności szeregu potęgowego

a. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}x^n$, $p \in \mathbb{R}$;

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\big(3^n + (-2)^n\big)x^n$;

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x+1)^n$;

d. $\sum_{n=1}^{\infty}\big(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\big)^p x^n$;

e. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2}x^n$, $a \in (0,1)$;

f. $\sum_{n=1}^{\infty}\big(1+\frac{1}{n}\big)^{n^2}x^n$;

g. $\sum_{n=1}^{\infty}\big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\big)x^n$;

h. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{n^2}$;

i. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}x^n$;

j. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sin^n n}x^n$;

k. $\sum_{n=1}^{\infty}\big(\frac{1}{\ln n}\big)^n\big(1+2\cos\frac{n\pi}{4}\big)x^n$;

l. $\sum_{n=1}^{\infty}\big(\frac{1}{n}a^n + \frac{1}{n^2}b^n\big)^{n^2}\big(\frac{x+1}{2}\big)^n$, gdzie $a > 0$, $b > 0$;

m. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}10^{\ell(n)}(2-x)^n$, $\ell(n)$ to liczba cyfr liczby n.

4. Przedstawić funkcję $\ln(2+2x+x^2)$ w postaci $\sum a_n(x+1)^n$.

5. Przedstawić funkcję $(1-x)^{-1}$ w postaci $\sum a_n\frac{1}{x^n}$.

6. Przedstawić funkcję $\ln x$ w postaci $\sum a_n\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$.

7. Przedstawić funkcję $\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ w postaci $\sum a_n\left(\frac{x}{1+x}\right)^n$.

8. Zsumować szereg

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$; b. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$;

c. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$;

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)} x^n$; f. $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$;

g. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 x^n$; h. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^n$.

9. Znaleźć n–tą pochodną w punkcie 0 funkcji

a. e^{x^2}; b. $\operatorname{arctg}(2x)$.

10. Znaleźć n–tą pochodną funkcji

a. e^{x^2}; b. $\operatorname{arctg}(2x)$; c. $e^{10/x}$.

11. Niech $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dla $x \in \mathbb{R}$ i $F(x) = \frac{f(x)}{1-x}$ dla $x < 1$. Znaleźć $F^{(n)}(0)$.

12. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest analityczna oraz $a < x_0 < b$, to $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ dla każdej liczby x, dla której szereg występujący po prawej stronie równości jest zbieżny.

13. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon (-2,2) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna we wszystkich punktach przedziału $[-1,1]$ i $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ dla każdego n i każdego $x \in [-1,1]$, to funkcja ta jest analityczna w przedziale $(-1,1)$ promień zbieżności i promień zbieżności jej szeregu Maclaurina nie jest mniejszy niż 1.

14. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna oraz $|f^{(n)}(x)| \leqslant c^n$ dla każdego $x \in (a,b)$ i każdego $n \in \mathbb{Z}$, to dla dowolnych $x, x_0 \in (a,b)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

ELEMENTY TEORII CAŁKOWANIA

Operacja odwrotna do różniczkowania nazywana jest całkowaniem. Dana funkcja traktowana jest jako pochodna pewnej funkcji, którą trzeba znaleźć. Zaczniemy od definicji.

Definicja 27.1 (funkcji pierwotnej czyli całki nieoznaczonej) Niech $G \subset \mathbb{R}$ będzie sumą pewnej rodziny parami rozłącznych przedziałów. Jeżeli $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją na zbiorze G, to każdą funkcję $F\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$, dla której równość $F'(x) = f(x)$ ma miejsce dla każdego $x \in G$ nazywamy funkcją pierwotną lub całką nieoznaczoną funkcji f. Oznaczamy: $F(x) = \int f(x)\,dx$. ■

Zauważmy, że jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji f, to dla każdej liczby rzeczywistej C funkcja $F + C$ też jest funkcją pierwotną funkcji f. Zachodzi

Twierdzenie 27.2 (o jednoznaczności funkcji pierwotnej) Jeśli P jest przedziałem, $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcją a F_1 i F_2 jej funkcjami pierwotnymi, to istnieje liczba $C \in \mathbb{R}$, taka że dla każdego $x \in P$ zachodzi równość $F_2(x) = F_1(x) + C$.

Dowód. Teza wynika natychmiast z tego, że pochodną funkcji $F_2 - F_1$ jest funkcja tożsamościowo równa 0, więc funkcja $F_2 - F_1$ jest stała na przedziale zawartym w swej dziedzinie. ■

Podkreślić od razu wypada, że jeśli dziedzina nie jest przedziałem, to teza przestaje być prawdziwa. Funkcja $\ln|x|$ jest funkcją pierwotną funkcji $\frac{1}{x}$. Niech $F_1(x) = \ln|x|$. Przyjmijmy $F_2(x) = 1 + \ln x$ dla $x > 0$ i $F_2(x) = \ln(-x)$ dla $x < 0$. Jasne jest, że $F_2'(x) = \frac{1}{x}$ dla każdego $x \neq 0$, więc F_2 jest funkcją pierwotną funkcji ln, podobnie jak F_1. Funkcja $F_2 - F_1$ przyjmuje jednak dwie wartości, mianowicie 0 dla $x < 0$ oraz 1 dla $x > 0$. Nie jest więc stała, chociaż *jest stała na każdym przedziale zawartym w dziedzinie funkcji* f. Czasami taką funkcję nazywamy lokalnie stałą. W dalszym ciągu będziemy, zgodnie z przyjętym zwyczajem, pisać

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,,$$

jeśli F jest jakąś funkcją pierwotną funkcji f, przy czym C oznaczać tu będzie zawsze funkcję lokalnie stałą, czyli funkcję, która *jest stała na każdym przedziale zawartym w dziedzinie funkcji* f.

Przykład 27.1 $\int dx = x + C$. ■

Przykład 27.2 $\int e^x\, dx = e^x + C$. ■

Przykład 27.3 $\int \cos x\, dx = \sin x + C$. ■

Przykład 27.4 $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$. ■

Przykład 27.5 $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$. ■

Przykład 27.6 $\int x^a\, dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$ dla $a \neq -1$ i każdego x, dla którego funkcja x^a jest określona. ■

Przykład 27.7 $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x + C$. ■

Jasne jest, że nie każda funkcja ma funkcję pierwotną. Przypomimamy, że jeśli funkcja ma funkcję pierwotną, czyli jest pochodną pewnej funkcji, to na każdym przedziale przysługuje jej własność przyjmowania wartości pośrednich, czyli własność Darboux (twierdzenie 23.10). Udowodniliśmy też (tw. 25.5)

Twierdzenie 27.3 (o istnieniu funkcji pierwotnej funkcji) Jeśli $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcją ciągłą na przedziale P, to f ma na nim funkcję pierwotną. ■

Przekonamy się niebawem, że znalezienie funkcji pierwotnej pozwoli znajdować pola obszarów i objętości pewnych brył, a także długości krzywych. W istocie rzeczy pierwsze wzory na pola figur bardziej skomplikowanych uzyskano już w starożytności (koło, parabola, powierzchnia kuli itd.). Istotny postęp uzyskany został dzięki Archimedesowi. Jednak jego pomysłowe rozumowania długo musiały czekać na kontynuatorów. W praktyce następne poważne osiagnięcia w tej dziedzinie uzyskano dopiero dzięki zauważeniu związku liczenia pól, objętości z różniczkowaniem. Wyniki Archimedesa i jego współczesnych stały się teraz banalnymi zadaniami, z którymi radzą sobie uczniowie i studenci, choć wielu z nich miałoby istotne trudności ze zrozumieniem tego, co pisał Archimedes (nawet po przetłumaczeniu na polski lub inny język współczesmy).

Warto też wyraźnie stwierdzić, że choć wiemy, że funkcje ciągłe mają funkcje pierwotne, to jednak nie zawsze daje się je wyrazić za pomocą funkcji, którymi do tej pory operujemy, wiele z nich to tzw. funkcje nieelementarne. Ważny przykład to e^{-x^2}. Jej funkcji pierwotnej nie można wyrazić za pomocą wielomianów, sinusa, kosinusa, funkcji wykładniczej, funkcji odwrotnych do wymienionych, jeśli dopuścimy działania arytmetyczne i składanie funkcji. Tego typu twierdzenia udało się wykazać w drugiej połowie XIX wieku. Ich dowody, a nawet dokładniejsze omówienie, daleko wykraczają poza program nauczania matematyki w wyższych uczelniach, z wyjątkiem niektórych wydziałów matematyki. Wspominamy jednak o tych twierdzeniach, bo funkcja e^{-x^2} jest jedną z częściej używanych w statystyce. Z przyczyn podanych przed chwilą stworzono tablice jej całek, można wybierać funkcję pierwotną tak, by jej granicą przy $x \longrightarrow -\infty$ była liczba 0. Druga przyczyna to ostrzeżenie, że problemy wyglądające na elementarne czasem są nierozwiązywalne. Jest wiele innych funkcji tego typu, np. $\frac{\sin x}{x}$, $\sin x^2$, $\sqrt{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}$ przy założeniu, że wyrażenie pod pierwiastkiem jest wielomianem stopnia >2 i to nie szczególnie dobranym (x^4+2x^2+1 nie powoduje żadnych kłopotów, bo pierwiastek to tylko dekoracja!). Często też pozornie mała zmiana zmienia zasadniczo trudność problemu, który trzeba rozwiązać: całka z funkcji e^{-x^2} jest nieelementarna, natomiast $\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$!

Definicja 27.4 (całki oznaczonej Newtona)
Całką oznaczoną funkcji $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy liczbę rzeczywistą $F(b)-F(a)$, gdzie F oznacza funkcję pierwotną funkcji f. Stosujemy oznaczenie

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)\,. \quad \blacksquare$$

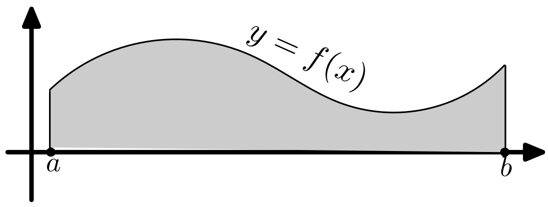
Często piszemy: $F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b$, więc można napisać

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b .$$

Później przekonamy się, że jeśli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest dodatnia i ciągła, to liczbę

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

należy uznać za pole obszaru



$\{(x,y)\colon \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, czyli pole pod wykresem funkcji f.

Przykład 27.8 $\int_a^b dx = x\Big|_a^b = b-a$ (pole prostokąta o podstawie $b-a$ i wysokości 1 równe jest $b-a$). ■

Przykład 27.9 $\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}$. Jeśli $0 \leqslant a \leqslant b$, to $\int_a^b x\,dx$ to pole trapezu o podstawach a i b, którego wysokość równa jest $b-a$, czyli $\frac{1}{2}(b+a)(b-a)$. Jeśli $b \leqslant 0$,to podstawy trapezu równe są $|a| = -a$ oraz $|b| = -b$, a wysokość równa jest b-a, zatem całka jest liczbą przeciwną do pola, więc równa jest $-\frac{1}{2}\big(-b+(-a)\big)(b-a) = \frac{b^2-a^2}{2}$. Pozostał jeszcze jeden przypadek: $a < 0 < b$. Mamy oczywiście $\int_a^b x\,dx = \int_a^0 x\,dx + \int_0^b x\,dx$. Wobec tego tym razem całka równa jest różnicy pól dwóch trójkątów prostokątnych równoramiennych o ramionach $|a|$ i b. Te pola to oczywiście $\frac{1}{2}b^2$ i $\frac{1}{2}a^2$, całka równa jest $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$. ■

Przykład 27.10 $\int_0^a x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_a^b = \frac{a^3}{3}$. Wobec tego ,,pole pod parabolą” równe jest $\frac{1}{3}$ pola prostokąta o wierzchołkach (0,0), $(a,0)$, (a^2,a), $(0,a^2)$. Wzór ten znał już Archimedes, ale jego wyprowadzenie – nie znano jeszcze wtedy całek – było trudne. ■

Obliczanie całek jest na ogół dosyć trudne, wymaga pomysłowości. My podamy kilka prostych wzorów i pokażemy jak można je stosować w prostych sytuacjach. Obecnie istnieją liczne programy komputerowe, np. Mathematica, Maple, Derive, za pomocą których można obliczyć wiele całek. Tym nie mniej warto znać podstawowe wzory i umieć stosować w prostych sytuacjach.

Twierdzenie 27.5 (o całce sumy dwu funkcji.)
Załóżmy, że funkcje f i g mają funkcje pierwotne. Wtedy funkcje $f \pm g$ też mają funkcje pierwotne i zachodzą wzory

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \qquad \text{oraz}$$

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Pierwszy z tych wzorów wynika od razu z tego, że pochodna sumy jest sumą pochodnych, różnicy – różnicą pochodnych. Wzór drugi wynika z pierwszego. ■

Twierdzenie 27.6 (o całce iloczynu funkcji przez liczbę)
Jeśli funkcja f ma funkcję pierwotną, to dla każdej liczby rzeczywistej c funkcja cf ma funkcję pierwotną i zachodzi równość

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx\,.$$

Dla całki oznaczonej

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Wzory wynikają od razu z odpowiednich własności pochodnej. ■

Z obliczaniem całki iloczynu jest o wiele gorzej, bo wzór na pochodną iloczynu jest bardziej skomplikowany. Istnieją również funkcje (nieciągłe), które maja funkcje pierwotne a ich iloczyn pochodną nie jest. Podamy dwa twierdzenia, które często pozwalają uprościć obliczanie całki z iloczynów bardzo szczególnej postaci.

Twierdzenie 27.7 (o całkowaniu przez części)
Załóżmy, że funkcje f i g mają ciągłe pochodne. Wtedy zachodzi wzór:

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

Dla całki oznaczonej

$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx =$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx\,.$$

Wzór ten jest natychmiastową konsekwencją twierdzenia o pochodnej iloczynu. ■

Twierdzenie 27.8 (o całkowaniu przez podstawienie)
Załóżmy, że funkcje f i g' są ciągłe oraz że F jest funkcją pierwotną funkcji f. Wtedy

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Dla całki oznaczonej

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} F(y)\,dy = F(g(b)) - F(g(a))\,.$$

Ten wzór wynika natychmiast z twierdzenia o pochodnej złożenia dwu funkcji. ■

Umowa 27.9 (w kwestii oznaczeń)
Zamiast $g'(x)\,dx$ będziemy czasem pisać $dg(x)$; w konsekwencji jeżeli $y = g(x)$, to piszemy $dy = g'(x)\,dx = dg(x)$. ■

Zauważmy, że jeśli funkcja g jest różnowartościowa, czyli ma funkcję odwrotną g^{-1}, to równość $y = g(x)$ równoważna jest równości $x = g^{-1}(y)$. Wtedy, zgodnie z przyjętą umową, możemy napisać $dx = d(g^{-1})(y) = (g^{-1})'(y)\,dy$. Z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej wynika: $\big(g^{-1}\big)'(y) = \big(g^{-1}\big)'\big(g(x)\big) = \frac{1}{g'(x)}$. Wobec tego $dx = d\big(g^{-1}\big)(y) = \frac{1}{g'(x)}\,dy$, co w świetle wzoru $dy = dg(x) = g'(x)\,dx$, wygląda na zupełnie oczywiste stwierdzenie. Jednak należy pamiętać o tym, że symbole dx, dy nie oznaczają liczb, co więcej: w ogóle ich nie zdefiniowaliśmy. Występują jedynie w połączeniu z innymi. Wobec tego nie jest całkiem jasne, czy reguły działań na liczbach maja zastosowanie również w tym przypadku, a dokładniej: które reguły pozostają w mocy.

Okazało się, że wnioskowanie, jeśli $dy = g'(x)\,dx$, to $dx = \frac{1}{g'(x)}\,dy$ ma sens dzięki twierdzeniu o pochodnej funkcji odwrotnej!

Przypomnieć wypada, że oprócz pochodna $y' = g'(x)$ jest często oznaczana symbolem $\frac{dy}{dx} = g'(x)$. Symbol $\frac{dy}{dx}$ jest oznaczeniem pochodnej. Nie jest ułamkiem. Można go jednak traktować jak iloraz. Czytelnicy przekonają się jeszcze wiele razy, że upraszcza to manipulowanie wzorami. Zauważmy jeszcze, że jeśli $x = h(t)$, to oprócz równości $dy = g'(x)\,dx$, zachodzi wzór $dx = h'(t)\,dt$. Chciałoby się wywnioskować z tych wzorów, że $dy = g'(x)h'(t)\,dt$. Można to zrobić, bo $y = g\big(h(t)\big)$, więc $dy = (g \circ h)'(t)\,dt$, ale **na mocy twierdzenia o pochodnej złożenia** dwu funkcji: $\big(g \circ h\big)'(t) = g'\big(h(t)\big)h'(t)$, zatem również $dy = g'\big(h(t)\big)h'(t)\,dt$. Widać więc znów analogię z ułamkami: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$, czyli $dy = (g \circ h)'(t)\,dt = g'(h(t))h'(t)\,dt = = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt$. Zakończymy te przydługie rozważania na temat oznaczeń stwierdzeniem, że wzór na całkowanie przez części zwykle zapisywany jest w postaci:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int f\,dg = fg - \int g\,df = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$

a wzór na całkowanie przez podstawienie – w postaci:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(y)\,dy\,.$$

Przykład 27.11 $\int e^{2x}\,dx \xlongequal[dy=2\,dx]{y=2x} \int e^y \frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}e^y + C =$
$= \frac{1}{2}e^{2x} + C\,.$ ■

Przykład 27.12 $\int x e^{x^2}\,dx \xlongequal[dy=2xdx]{y=x^2} \int e^y \frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int e^y\,dy =$
$= \frac{1}{2}e^y + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C\,.$ ■

Przykład 27.13 $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \xlongequal[dy=-\sin x\,dx]{y=\cos x}$
$= -\int \frac{1}{y}\,dy = -\ln|y| + C = -\ln|\cos x| + C\,.$ ■

Przykład 27.14 $\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx \xlongequal[dx=r\cos t\,dt]{x=r\sin t}$
$= \int \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\; r\cos t\,dt = \int \sqrt{r^2\cos^2 t}\; r\cos t\,dt =$

$= \int r^2 \cos^2 t \, dt = r^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2} \, dt \xlongequal[du=2dt]{u=2t}$
$= r^2 \int \frac{1+\cos u}{2} \cdot \frac{du}{2} = \frac{r^2}{2} \left(\frac{u}{2} + \frac{\sin u}{2} \right) + C =$
$= \frac{r^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{r^2}{2} \left(t + \sin t \cos t \right) + C =$
$= \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} + \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} + C$ – w tym przypadku przyjęliśmy, że $x = r \sin t$ oraz $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Można, bo wtedy x przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $[-r, r]$. W tej sytuacji $\cos t \geqslant 0$ i wobec tego zachodzi równość $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$. ■

Przykład 27.15 $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} \Big[r^2 \arcsin \frac{r}{r} + r \sqrt{r^2 - r^2} -$
$- \left(r^2 \arcsin \frac{-r}{r} + (-r) \sqrt{r^2 - (-r)^2} \right) \Big] = \frac{1}{2} \left[2r^2 \arcsin 1 \right] = \frac{\pi r^2}{2}.$
Skorzystaliśmy tu oczywiście z wyniku otrzymanego w przykładzie poprzednim. Obliczana całka okazała się połową koła o promieniu r, co nie jest specjalnie dziwne, bo wykresem funkcji $\sqrt{r^2 - x^2}$ jest górna połowa okręgu o środku $(0, 0)$ i promieniu r, więc ,,pole pod wykresem" to połowa pola koła o promieniu r. ■

Przykład 27.16 $\int x e^x \, dx = \int x \left(e^x \right)' dx \xlongequal[\text{przez części}]{\text{całkujemy}}$
$= x e^x - \int (x)' e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C$. ■

Przykład 27.17 $\int x^2 e^x \, dx = \int x^2 \left(e^x \right)' dx \xlongequal[\text{przez części}]{\text{całkujemy}}$
$= x^2 e^x - \int \left(x^2 \right)' e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx =$
$\xlongequal[\text{przykład}]{\text{poprzedni}} x^2 e^x - 2 \left(x e^x - e^x \right) + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C$.
W tym przykładzie skorzystaliśmy z wyniku uzyskanego w poprzednim. Postępując analogicznie można obliczać całki z funkcji $x^3 e^x$, $x^4 e^x$ itd. — jednokrotne całkowanie przez części obniża o 1 stopień wielomianu, przez który mnożymy funkcję wykładniczą, więc wielokrotne pozwala na pozbycie się go, czyli sprowadzenie problemu do obliczenia całki $\int e^x \, dx = e^x + C$. ■

Przykład 27.18 $\int x e^{3x} \, dx = \int x \left(\frac{1}{3} e^{3x} \right)' dx \xlongequal[\text{przez części}]{\text{całkujemy}}$

$= \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int (x)' e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx =$
$= \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$ — ostatnie całkowanie przez podstawienie ($y = 3x$) potraktowaliśmy już jako na tyle oczywiste, że nawet tego specjalnie nie zaznaczyliśmy. ■

Przykład 27.19 $\int x\cos(5x)\,dx = \int x\left(\frac{1}{5}\sin(5x)\right)'\,dx =$
$\overset{\text{całkujemy}}{\underset{\text{przez części}}{=\!=\!=}} \frac{1}{5}x\sin(5x) - \frac{1}{5}\int (x)'\sin(5x)\,dx =$
$= \frac{1}{5}x\sin(5x) - \frac{1}{5}\int \sin(5x)\,dx = \frac{1}{5}x\sin(5x) - \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{5}\cos(5x)\right) + C =$
$= \frac{1}{5}x\sin(5x) + \frac{1}{25}\cos(5x) + C$. ■

Przykład 27.20 $\int \ln x\,dx \overset{\text{całkujemy}}{\underset{\text{przez części}}{=\!=\!=}} x\ln x - \int x\,d(\ln x) =$
$= x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$. ■

Przykład 27.21 $\int \arcsin x\,dx \overset{\text{całkujemy}}{\underset{\text{przez części}}{=\!=\!=}}$
$= x\arcsin x - \int x\,d(\arcsin x) = x\arcsin x - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$
$\overset{y=1-x^2}{\underset{dy=-2x\,dx}{=\!=\!=}} x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int y^{-1/2}\,dy =$
$= x\arcsin x + \frac{1}{2(1+(-1/2))}y^{1+(-1/2)} + C =$
$= x\arcsin x + \left(1-x^2\right)^{1/2} + C = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$. ■

Przykład 27.22 $\int \frac{dx}{2x-3} \overset{y=2x-3}{\underset{dy=2dx}{=\!=\!=}} \int \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\ln|y| + C =$
$= \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C$. ■

Przykład 27.23 $\int \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx = \int \frac{x}{(x+1)(x+2)}\,dx$.
Można pomyśleć, że wyrażenie $\frac{x}{x^2+3x+2}$ jest sumą ułamków postaci $\frac{A}{x+1}$ i $\frac{B}{x+2}$. Aby równość $\frac{x}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$ miała miejsce, wzór $x = A(x+2) + B(x+1)$ musi zachodzić dla wszystkich liczb $x \neq -1, -2$.[27.1] Wobec tego: $A + B = 1$ i $2A + B = 0$, więc $A = -1$ i $B = 2$. Mamy więc $\int \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx = \int \frac{-1}{x+1}\,dx +$

[27.1] W rzeczywistości ponieważ funkcje x oraz $A(x+2)+B(x+1)$ są ciągłe we wszystkich punktach, w tym w punkcie $x=-1$ i w punkcie $x=-2$, równość musi mieć miejsce również dla $x=-1, -2$.

$+\int \frac{2}{x+2}\,dx = -\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C = \ln\frac{(x+2)^2}{|x+1|} + C.$ ■

Metoda zasygnalizowana w przykładzie 27.23 to tzw. rozkład na ułamki proste. Polega ona na tym, że funkcję wymierną, czyli iloraz dwóch wielomianów przedstawiamy w postaci sumy wielomianu i ułamków prostych, tj. ułamków postaci $\frac{A}{(x+c)^n}$, gdzie $a, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ lub postaci $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, gdzie $A, B, p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ oraz $p^2 - 4q < 0$. Można wykazać, że taki rozkład funkcji wymiernej zawsze istnieje. Nietrudny dowód pozostawiamy Czytelnikowi.[27.2] Pokażemy kilka przykładów jej użycia.

Przykład 27.24 $\int \frac{x^3}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{(x^2+2x+2)(x-2)+2x+4}{x^2+2x+2}\,dx =$
$= \int\left(x-2+\frac{2(x+2)}{x^2+2x+2}\right)dx = \frac{1}{2}x^2-2x+\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx+\int\frac{2}{x^2+2x+2}\,dx =$
$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + \int\frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2}\,dx + \int\frac{2}{(x+1)^2+1}\,d(x+1) =$
$\underset{\text{przez podstawienia}}{\overset{\text{całkujemy}}{=\!=\!=\!=}} \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln(x^2+2x+2) + 2\,\mathrm{arctg}(x+1) + C\,.$
To wygląda trochę na stosowanie jakichś sztuczek. Tak jednak nie jest. Można było przewidzieć jak będą wyglądać ułamki proste, których sumą będzie dana funkcja wymierna. Stopień licznika jest o jeden większy niż stopień mianownika, więc powinien wystąpić wielomian stopnia pierwszego oraz ułamek, którego licznik jest wielomianem stopnia nie większego niż 1, a mianownik równy jest $x^2 + 2x + 2$. Można więc było spróbować napisać $\frac{x^3}{x^2+2x+2} = ax + b + \frac{px+q}{x^2+2x+2}$. Po pomnożeniu przez mianownik otrzymujemy równość $x^3 = (ax+b)(x^2+2x+2) + px + q =$
$= ax^3+(2a+b)x^2+(2a+2b+p)x+(2b+q)$. Z równości wielomianów wynika równość ich współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennej x, więc być spełnione równości $1 = a$, $0 = 2a + b$, $0 = 2a + 2b + p$ i $0 = 2b + q$. Rozwiązawszy otrzymany układ równań otrzymujemy: $a = 1$ $b = -2$, $p = 2$ i $q = 4$. Poźniej po prostu obliczyliśmy pochodną mianownika i zapisaliśmy licznik w postaci *stała · pochodna mianownika + inna stała*, co ułatwiło ostateczne obliczenie całki. ■

[27.2] zob. np. G.M.Fichtenholz t. II.

Przykład 27.25 Obliczymy $\int \frac{1}{1+x^4}\,dx$. Zaczniemy od rozkładu na ułamki proste. W tym celu przedstawimy mianownik w postaci iloczynu wielomianów stopnia nie większego niż 2. Mamy

$$x^4+1=\left(x^2+1\right)^2-2x^2=\left(x^2+1\right)^2-\left(x\sqrt{2}\right)^2=$$
$$=\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right).$$

Teraz znajdziemy takie liczby rzeczywiste a, b, c i d, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{ax+b}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{cx+d}{x^2+x\sqrt{2}+1}.$$

Mnożąc tę równość przez $1+x^4$, skracając co się tylko da, następnie porządkując, otrzymujemy:

$$1=(ax+b)(x^2+x\sqrt{2}+1)+(cx+d)(x^2-x\sqrt{2}+1)=(b+d)+$$
$$+x(a+b\sqrt{2}+c-d\sqrt{2})+x^2\left(b+a\sqrt{2}+d-c\sqrt{2}\right)+x^3(a+c).$$

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x otrzymujemy:

$$b+d=1,\ a+c+(b-d)\sqrt{2}=0,\ b+d+(a-c)\sqrt{2}=0,\ a+c=0.$$

Rozwiązaniem tego układu czterech równań z czterema niewiadomymi są liczby $a=-c=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$ i $b=d=\frac{1}{2}$. Wobec tego:

$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{\frac{-1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}.$$

Teraz wystarczy scałkować oba składniki. Scałkujemy drugi, bo ma lepszy wygląd zewnętrzny (mniej minusów). Mamy

$$\int\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)'+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)'}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\,dx=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)+\frac{1}{4}\int\frac{2}{\left(x\sqrt{2}+1\right)^2+1}\,dx=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{1}{\left(x\sqrt{2}+1\right)^2+1}\,d(x\sqrt{2}+1)=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}+1\right)+C.$$

W taki sam sposób można obliczyć drugą całkę, ale nie warto, bowiem:

$$\int\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,dx\ \overset{u=-x}{\underset{du=-dx}{=\!=\!=\!=}}\ \int\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}u+\frac{1}{2}}{u^2+u\sqrt{2}+1}\,(-du)=$$

$= -\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(u^2+u\sqrt{2}+1\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(u\sqrt{2}+1\right)+C =$
$= -\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(-x\sqrt{2}+1\right)+C =$
$= -\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}-1\right)+C\,.$

Dodając obliczone całki otrzymujemy: $\int\frac{1}{1+x^4}\,dx =$

$= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}+1\right)+\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}-1\right)\Big)+C\,.$

Mamy wynik. Pokażemy teraz, jak można go uzyskać inaczej. Zauważmy, że $\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2}{1+x^4}+\frac{1+x^2}{1+x^4}\right)$. Wobec tego można obliczyć dwie całki: $\int\frac{1-x^2}{1+x^4}\,dx$ oraz $\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$. Można je obliczyć rozkładając funkcje podcałkowe na ułamki proste, ale nie jest to konieczne. Zachodzą równości

$$\int\frac{1-x^2}{1+x^4}\,dx = \int\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\,dx = -\int\frac{d(x+\frac{1}{x})}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} \xlongequal[dy=1-1/x^2]{y=x+1/x}$$
$$= -\int\frac{dy}{y^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{y+\sqrt{2}}-\frac{1}{y-\sqrt{2}}\right)dy =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\ln|y+\sqrt{2}|-\ln|y-\sqrt{2}|+C\Big) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{y+\sqrt{2}}{y-\sqrt{2}}\right|+C =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}\right|+C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+C\,.$$

Pierwsza całka została znaleziona. Teraz zajmiemy się drugą.

$$\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \int\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\,dx = \int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} \xlongequal[dy=(1+1/x^2)dx]{y=x-1/x}$$
$$= \int\frac{dy}{y^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)}{1+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2} \xlongequal[dz=dy/(\sqrt{2})]{z=y/(\sqrt{2})} \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{1+z^2} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}z+C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+C =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{x\sqrt{2}}\right)+C\,.$$

W końcu: $\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right) + C$.[27.3] Otrzymany wynik wygląda inaczej niż poprzedni! Jednak to ten sam rezultat, co wynika z wzoru

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right),$$

który z kolei wynika z wzoru na tangens sumy dwu liczb: tangensy obu stron tej podejrzanej równości są równe. Należy jeszcze trochę pomęczyć się z jej interpretacją np. dla $x=0$; wg drugiej wersji wzoru funkcja pierwotna w punkcie 0 określona nie jest, wg. pierwszej jest — z twierdzeń ogólnych wynika, że powinna być określona na całej prostej. Pokazaliśmy więc dwie metody, otrzymaliśmy na tyle różnie wyglądające wyniki, że niewiele osób stwierdziłoby, że to w istocie rzeczy ten sam wynik różniący się jedynie zapisem. To dosyć częste zjawisko przy całkowaniu, więc je zasygnalizowaliśmy. ■

Przykład 27.26 Obliczymy całkę $\int \frac{x^5}{1+x^4}\,dx$. Można jak w przykładach poprzednich przedstawić funkcję podcałkową w postaci ułamków prostych, ale w tym konkretnym przypadku widać od razu prostszą metodę. Mamy bowiem

$$\int \frac{x^5}{1+x^4}\,dx \underset{dy=2x\,dx}{\overset{y=x^2}{=\!=\!=\!=}} \frac{1}{2}\int \frac{y^2}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{1+y^2}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(y - \operatorname{arctg} y\right) + C = \frac{1}{2}\left(x^2 - \operatorname{arctg} x^2\right) + C\,. \ ■$$

Przykład 27.27 Obliczymy całkę $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$. Będziemy całkować przez części dwukrotnie.

$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}\int \left(e^{2x}\right)'\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x -$
$-\frac{1}{2}\int e^{2x}(\sin 3x)'\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x -$
$-\frac{3}{4}\int \left(e^{2x}\right)'\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x +$
$+\frac{3}{4}\int e^{2x}(\cos 3x)'\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x - \frac{9}{4}\int e^{2x}\sin 3x\,dx\,.$

Udało nam się po kilku przekształceniach sprowadzić obliczanie całki $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$ do obliczania tej samej całki! To nie jest bez sensu wbrew pozorom: *uzyskaliśmy równanie, w którym niewiado-*

[27.3] Powinna wystąpić suma dwu stałych, ale to i tak jest dowolna stała, a raczej funkcja stała na każdym przedziale zawartym w dziedzinie, więc nie ma potrzeby zmieniać oznaczeń.

mą jest poszukiwana całka. Rozwiązując je otrzymujemy równość

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{2}{13}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{13}e^{2x}\cos 3x + C$$

Stałej C w równaniu nie było, ale teraz musi się pojawić. Równość całek nieoznaczonych oznacza jedynie, że różnica między tymi nimi jest funkcją lokalnie stałą, więc gdy całki znajdują się tylko po jednej stronie równości, trzeba dopisać C po drugiej stronie tej równości. ■

Przykład 27.28 $\int\sqrt{4+x^2}\,dx \overset{x=2\operatorname{tg}\,t}{\underset{dx=2(1+\operatorname{tg}^2 t)\,dt}{=\!=\!=\!=\!=}} 2\int\sqrt{4+4\operatorname{tg}^2 t}\,\cdot$
$\cdot(1+\operatorname{tg}^2 t)\,dt = 4\int\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)dt = 4\int\frac{1}{\cos^3 t}\,dt =$
$= 4\int\frac{\cos t}{\cos^4 t}\,dt = 4\int\frac{\cos t}{(1-\sin^2 t)^2}\,dt \overset{y=\sin t}{\underset{dy=\cos t\,dt}{=\!=\!=\!=}} 4\int\frac{dy}{(1-y^2)^2} =$
$= \int\left(\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y}\right)^2 dy = \int\left(\frac{1}{(1-y)^2}+2\frac{1}{1-y}\frac{1}{1+y}+\frac{1}{(1+y)^2}\right)dy =$
$= \int\left(\frac{1}{(1-y)^2}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{(1+y)^2}\right) =$
$= \int\Big((1-y)^{-2}+(1-y)^{-1}+(1+y)^{-1}+(1+y)^{-2}\Big)\,dy =$
$= (1-y)^{-1} - \ln|1-y| + \ln|1+y| - (1+y)^{-1} + C =$
$= \frac{2y}{1-y^2} + \ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| + C\,.$
Wypada powrócić do zmiennej x. Podstawialiśmy $x = 2\operatorname{tg} t$. Możemy oczywiście zakładać,że $|t| < \frac{\pi}{2}$, bowiem każda liczbę x można przedstawić w postaci $2\operatorname{tg} t$ wybierając liczbę t z przedziału $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Ten wybór liczby t gwarantuje, że $\cos t > 0$, z czego zresztą już raz skorzystaliśmy. Mamy więc $\frac{1}{\cos t} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} =$ $=\sqrt{1+\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4+x^2}$. Stąd wnioskujemy, że zachodzą równości

$$\frac{2y}{1-y^2} = \frac{2\sin t}{\cos^2 t} = 2\operatorname{tg} t\frac{1}{\cos t} = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{4+x^2}\,.$$

Mamy też $\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \ln\frac{1+y}{1-y} = \ln\frac{(1+y)^2}{1-y^2} = \ln\frac{(1+\sin t)^2}{\cos^2 t} =$
$= 2\ln\frac{1+\sin t}{\cos t} = 2\ln\left(\frac{1}{\cos t}+\operatorname{tg} t\right) = 2\ln\left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}+\frac{x}{2}\right)$. Ostatecznie
$\int\sqrt{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{4+x^2} + 2\ln\left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}+\frac{x}{2}\right) + C\,.$

Tę równość można uzyskać nieco szybciej stosując tzw. podstawienia Eulera, ale nie będziemy już tego robić. Ogólnie rzecz biorąc wyrażenia zawierające jeden pierwiastek kwadratowy z wielomianu pierwszego lub drugiego stopnia można scałkować stosując jakieś podstawienie trygonometryczne, jak w tym przykładzie, lub podstawienia Eulera, o których mówić tu nie będziemy lub też podstawienia hiperboliczne, którymi również nie będziemy się zajmować. To są zamienne metody. Czasem jedne dają wynik szybciej, a czasem inne. Zależy to od całkowanej funkcji. ■

Na tym przykładzie kończymy demonstracje metod całkowania. Podkreślić należy, że dalecy jesteśmy od wyczerpania tematu. Warto wiedzieć, że są całki, których obliczenie może zlecić komputerowi, o ile wzmiankowane urządzenie jest wyposażone w odpowiedni program. Można też, w razie potrzeby, posłużyć się tablicami. Niewątpliwie warto umieć stosować twierdzenie o zamianie zmiennych i twierdzenie o całkowaniu przez części. Teraz pokażemy kilka twierdzeń i nieco zastosowań całek.

Twierdzenie 27.10 (o porównywaniu całek)
Jeśli funkcje f i g mają funkcje pierwotne na przedziale $[a,b]$ i dla każdego $x \in [a,b]$ zachodzi nierówność $f(x) \leqslant g(x)$, to również $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

Dowód. Niech F i G oznaczają odpowiednio funkcje pierwotne funkcji f i g. W tej sytuacji $G'(x) - F'(x) = g(x) - f(x) \geqslant 0$, zatem funkcja $G - F$ jest niemalejąca. Wobec tego

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) - \big(F(b) - F(a)\big) = \\ = \big(G(b) - F(b)\big) - \big(G(a) - F(a)\big) \geqslant 0\,. \blacksquare$$

Twierdzenie 27.11 (o wartości średniej)
Niech $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy istnieje liczba $c \in [a,b]$, taka że zachodzi równość

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)\,.$$

Dowód. Wynika natychmiast z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji pierwotnej funkcji f. ■

Definicja 27.12 (wartości średniej funkcji.)
Liczbę $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ $\big(= f(c)\big)$ nazywamy wartością średnią funkcji f. ■

Można myśleć o niej tak: jeśli funkcja f przyjmuje jedynie wartości dodatnie, to liczba $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ jest wysokością prostokąta o podstawie $b-a$, którego pole równe jest ,,polu pod wykresem" funkcji f. Jeśli $f(x)$ oznacza prędkość w chwili x, to $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ oznacza iloraz przebytej drogi $\int_a^b f(x)\,dx$ [27.4] przez czas $b-a$ zużyty na jej przebycie, czyli średnią prędkość w tym ruchu. Następne przykłady, które motywują tę definicję pojawią się niebawem i czytelnik z pewnością je dostrzeże.

Twierdzenie 27.13 (o addytywności całki względem przedziału)
Jeśli $a < c < b$ i funkcja f ma funkcję pierwotną na przedziale $[a,b]$, to zachodzi równość

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Dowód. Niech F oznacza funkcję pierwotną funkcji f. Wtedy prawdziwe są wzory: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, $\int_a^c f(x)\,dx = {=}F(c) - F(a)$ i $\int_c^b f(x)\,dx = F(b) - F(c)$. Z nich teza wynika natychmiast. ■

Punktem wyjścia do wielu zastosowań całki jest

Twierdzenie 27.14 (o sumach Riemanna)
Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeżeli $x_i - x_{i-1} < \delta$, $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, to zachodzi nierówność

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})\right| < \varepsilon\,.$$

[27.4] Przypomnijmy, że jeśli $F(x)$ oznacza położenie poruszającego się punktu w momencie x, to $f(x){=}F'(x)$ oznacza prędkość w tym momencie, mówiliśmy o tym przy okazji definicji pochodnej funkcji jednej zmiennej.

Dowód. Ponieważ funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$, więc na każdym z przedziałów $[x_{i-1},x_i]$ przyjmuje kresy. Niech m_i oznacza kres dolny, a M_i — górny. Wobec tego dla każdego $x \in [x_{i-1},x_i]$ zachodzi nierówność $m_{i-1} \leqslant f(x) \leqslant M_i$. Z twierdzenia o porównywaniu całek wynikają nierówności:

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leqslant \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \leqslant M_i(x_i - x_{i-1})$$

dla $i = 1,2,\ldots,n$. Dodając je stronami i korzystając z twierdzenia o addytywności całki względem przedziału otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})\,.$$

Ponieważ f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a,b]$, więc jest jednostajnie ciągła, zatem dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $|t-s| < \delta$, to $|f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Wobec tego jeśli $x_i - x_{i-1} < \delta$, to $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$ dla wszystkich i. Stąd od razu wynika, że zachodzi nierówność:

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon\,.$$

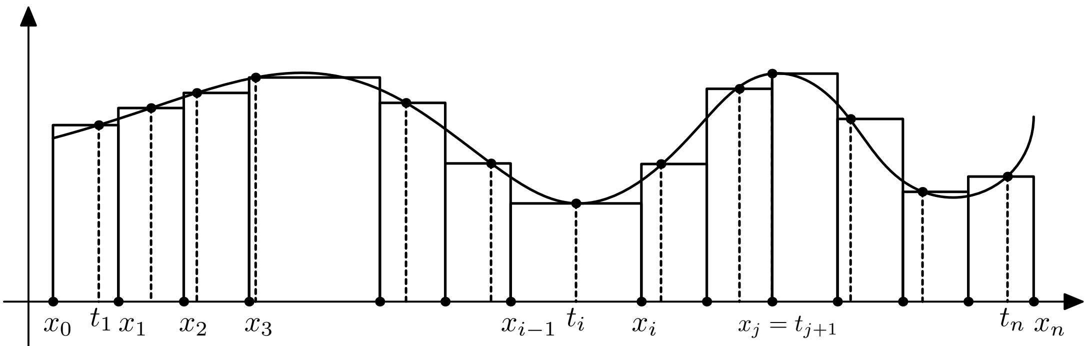
Stąd wynika teza: obydwie liczby $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ i $\int_a^b f(x)\,dx$ leżą między sumami $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ i $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$, których różnica jest mniejsza od ε. Dowód został zakończony. ■

Sumy $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ i $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ nazywane są dolną i górną sumą Darboux, suma $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ — sumą Riemanna. Istnieją funkcje nieciągłe, które mają funkcje pierwotne, czyli są całkowalne w sensie Newtona, dla których teza twierdzenia o sumach Riemanna nie zachodzi. Przykładów podawać nie będziemy, zainteresowany Czytelnik może je znaleźć w pozycjach obszerniejszych, np. we wspominanym już drugim tomie książki G.M.Fichtenholza, "Rachunek różniczkowy i całkowy", albo samodzielnie wymyśleć. Podamy jednak definicję całkowalności w sensie Riemanna.

Definicja 27.15 (funkcji całkowalnej w sensie Riemanna)
Funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba $I \in \mathbb{R}$, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że jeżeli $x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$ i $x_i - x_{i-1} < \delta$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, to

$$\Big| I - \big(f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(t_n)(x_n - x_{n-1}) \big) \Big| < \varepsilon .$$

Liczba I nazywana jest całką Riemanna funkcji f na przedziale domkniętym $[a,b]$ i oznaczana jest symbolem $\int_a^b f(x)\,dx$. ■



Sumy Riemanna funkcji dodatniej

Z twierdzenia o sumach Riemanna wynika, że funkcje ciągłe są całkowalne w sensie Riemanna i że ich całki Riemanna oraz Newtona to te same liczby. Stosowanie tego samego symbolu jest więc w pełni uzasadnione tym bardziej, że jeśli funkcja (nieciągła) jest całkowalna zarówno w sensie Riemanna jak i w sensie Newtona, to obie całki się pokrywają. O funkcjach całkowalnych w sensie Riemanna powiemy niewiele.

Twierdzenie 27.16 (o ograniczoności funkcji całkowalnej)
Funkcja całkowalna w sensie Riemanna jest ograniczona. ■

Funkcje całkowalne mogą mieć punkty nieciągłości.

Twierdzenie 27.17
Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona i ma skończenie wiele punktów nieciągłości, to jest całkowalna w sensie Riemanna. ■

Twierdzenie 27.18 (**o całkowalności funkcji monotonicznej**)
Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest monotoniczna, to jest całkowalna w sensie Riemanna. ■

Dowody tych twierdzeń pomijamy, choć nie są ani trudne ani długie, można znaleźć je w literaturze lub przeprowadzić samodzielnie. Zajmiemy się raczej interpretacją sum Riemanna.

Załóżmy, że f jest funkcją dodatnią. By rozpatrzeć sumę Riemanna podzieliliśmy przedział $[a,b]$ na ,,krótkie" przedzialiki. W każdym z nich wybraliśmy dowolnie punkt t_i. i–ty składnik $f(t_i)(x_i - x_{i-1})$, to pole prostokąta o podstawie $[x_{i-1}, x_i]$ i wysokości $f(t_i)$. Górna podstawa tego prostokąta ma punkt wspólny z wykresem funkcji $f_{|[x_{i-1},x_i]}$. Można więc myśleć, że przybliżamy ,,pole pod wykresem" za pomocą wielu wąskich prostokątów. Dolna suma Darboux przybliża to samo pole z dołu, w tym przypadku prostokąty mieszczą się pod wykresem. Górna suma Darboux to suma pól nieco wyższych prostokątów, tak że ich suma zawiera ,,pole pod wykresem". Zinterpretownie sum w przypadku funkcji ujemnej nie nastręcza kłopotów.

W przypadku funkcji zmieniającej znak należy podzielić przedział na części tak, by na każdej z nich funkcja miała stały znak, może jednak się okazać, że musi ich być nieskończenie wiele. Wtedy zamiast pola będziemy mieć do czynienia z naprzemienną sumą pól: od sumy pól obszarów, które znalazły się nad osią OX odjęta zostanie suma pól tych obszarów, które znalazły się pod osią OX.

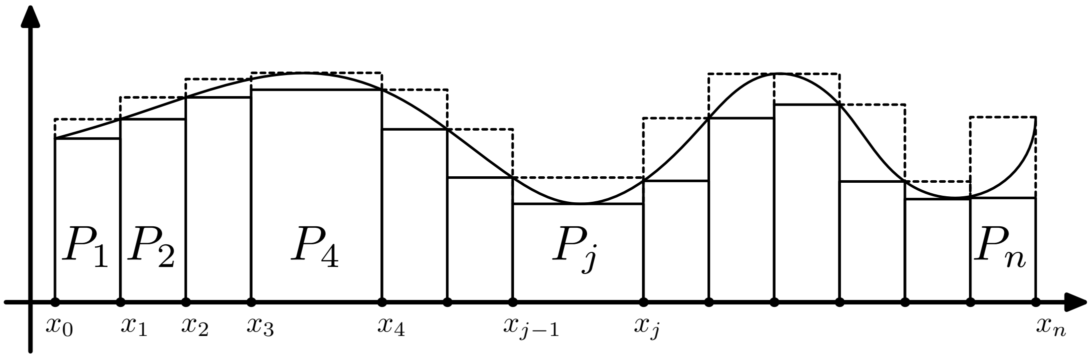
Nie definiowaliśmy pola do tej pory, więc teraz podamy jedną z możliwych definicji.

Definicja 27.19 (mierzalności w sensie Jordana)
Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^2$ jest mierzalny w sensie Jordana wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją takie prostokąty $P_1, P_2, \ldots, P_m$ i $R_1, R_2, \ldots, R_n$ o rozłącznych wnętrzach i bokach równoległych do osi ustalonego układu współrzędnych, że

$$P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_m \subseteq A \subseteq R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n \text{ oraz}$$
$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |R_j| - \sum_{i=1}^{m} |P_i| < \varepsilon\,,$$

gdzie $|P|$ oznacza iloczyn długości prostopadłych boków prostokąta P, czyli pole prostokąta.

Miarą Jordana zbioru mierzalnego A nazywamy kres górny sum $\sum_{i=1}^{m}|P_i|$ po wszystkich możliwych skończonych zbiorach prostokątów $P_1, P_2, \ldots, P_m$ o wnętrzach parami rozłącznych, o bokach równoległych do osi układu współrzędnych, których suma zawarta jest w zbiorze A. ■



Oczywiście ten kres górny jest równy kresowi dolnemu sum $\sum_{j=1}^{n}|R_j|$, gdzie $R_1, R_2, \ldots, R_n$ są prostokątami o wnętrzach parami rozłącznych, o bokach równoległych do osi układu współrzędnych, których suma zawiera zbiór A. Miarę zbioru A oznaczamy symbolem $|A|$.

Miara Jordana zbioru mierzalnego to po prostu jego pole.

Można udowodnić, że suma skończenie wielu zbiorów mierzalnych w sensie Jordana jest zbiorem zbiorem mierzalnym w sensie Jordana. Suma nieskończenie wielu zbiorów nie musi być zbiorem mierzalnym w sensie Jordana. Łatwo można wykazać, że większy zbiór ma większe pole: jeśli $A \subseteq B$ i zbiory A i B są mierzalne, to $|A| \leqslant |B|$. Dowody tych własności są łatwe, choć czasem żmudne, ale nie będziemy ich podawać. Warto powiedzieć, że podobnie definiujemy zbiory mierzalne w sensie Jordana na prostej i w przestrzeni. Z tych własności dosyć łatwo wynika, że jeżeli $f\colon [a,b] \longrightarrow (0,\infty)$ jest funkcją ciągłą (lub tylko całkowalną w sensie Riemanna), to zbiór $A := \{(x,y)\colon \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ jest mierzalny i $|A| = \int_a^b f(x)\,dx$, jak to zapowiadaliśmy wcześniej.

Nieco ogólniejsza wersja tego twierdzenia wygląda tak:

Twierdzenie 27.20 (o polu między wykresami)
Jeśli funkcje $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe, to zbiór

$$A := \{(x,y)\colon \quad \min(f(x),g(x)) \leqslant y \leqslant \max(f(x),g(x))\}$$

jest mierzalny w sensie Jordana i $|A| = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$. ■

To twierdzenie jest bardzo ważne i można je uogólnić. Podamy przykładowe uogólnienie.

Twierdzenie 27.21
Jeśli zbiór $A \subseteq [a,b] \times [c,d]$ jest mierzalny w sensie Jordana i dla każdego $y \in [c,d]$ zbiór $A^y := \{x \in [a,b]\colon \quad (x,y) \in A\}$ jest mierzalny w sensie Jordana, to $|A| = \int_c^d |A^y|\,dy$. ■

Dowodu nie podajemy, bo jest dość żmudny, choć nietrudny.

Przykład 27.29 Pole koła można obliczać traktując je jako obszar zawarty między wykresami funkcji $-\sqrt{r^2 - x^2}$ i $\sqrt{r^2 - x^2}$. Jest więc ono równe

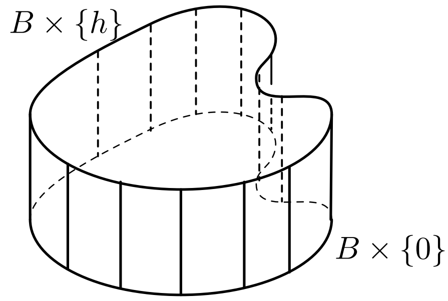
$$\int_{-r}^r \left(\sqrt{r^2 - x^2} - \left(-\sqrt{r^2 - x^2}\right)\,dx\right) = 2\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx =$$

$$= 2\tfrac{\pi r^2}{2} = \pi r^2 .$$ ■

Pokażemy jeszcze kilka przykładów geometrycznych i fizycznych. W dalszym ciągu w przypadku **zbioru** $A \subseteq \mathbb{R}^3$ przez $|A|$ lub $|A|_3$ oznaczać będziemy jego objętość (matematycy często używają terminu: miarę trójwymiarową). Pole zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^2$ oznaczać będziemy przez $|A|$ lub $|A|_2$, jeśli możliwe będą wątpliwości dotyczące wymiaru. Analogicznie długość krzywej C oznaczymy przez $|C|$ lub $|C|_1$.

Twierdzenie 27.22 (o obliczaniu objętości)
Załóżmy, że $A \subset [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [c,d]$ jest zbiorem mierzalnym w sensie Jordana oraz że dla każdej liczby $z \in [c,d]$ zbiór $\{(x,y) \in [a_1,b_1] \times [a_2,b_2]\colon \quad (x,y,z) \in A\}$ też jest mierzalny w sensie Jordana. Wtedy $|A| = \int_c^d |A^z|\,dz$. ■

Podobnie jak w dwuwymiarowym przypadku ścisłego dowodu tego wzoru nie podamy, spróbujemy jednak wyjaśnić jego genezę.



Punktem wyjścia będzie stwierdzenie, że jeżeli zbiór A składa się z podstawy

$$B \subseteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$

i wszystkich odcinków prostopadłych do niej, tej samej długości h, których jeden koniec znajduje się w zbiorze $B \times \{0\}$ i które leżą nad płaszczyzną $z = 0$,[27.5] to prawdziwy jest wzór $|A| = |B| \cdot h$ — to jest uogólnienie wzorów na objętość *walca, prostopadłościanu, czy graniastosłupa prostego.*

Punkty $c = z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_{n-1} < z_n = d$ dzielą przedział $[c, d]$ na dostatecznie krótkie przedziały. Wtedy objętość części zbioru A zawartej między płaszczyznami o równaniach $z = z_{i-1}$ i $z = z_i$ równa jest $|A^{t_i}|(z_i - z_{i-1})$, gdzie $t_i \in [z_{i-1}, z_i]$ jest odpowiednio dobranym punktem $\Big($liczba $|A^{t_i}|$ ma być średnią wartością pól $|A^z|$ dla $z \in [z_{i-1}, z_i]$ — ta część zbioru A to *nieomal* walec, na ogół niekołowy, o polu podstawy $|A^{t_i}|\Big)$. W tej sytuacji możemy twierdzić, że objętość to $\sum\limits_{i=1}^{n} |A^{t_i}|(z_i - z_{i-1})$.

Gdybyśmy nie starali się wybrać punktu t_i tak, by zachodziła równość, to i tak zachodziłaby równość przybliżona przy założeniu, że pole $|A^z|$ jest funkcją ciągłą zmiennej z. To rozumowanie pokazuje, jak należy myśleć o objętości.

Pokażemy teraz na kilku przykładach jak ten wzór działa. Zaczniemy od dobrze znanych wzorów.

Przykład 27.30 Niech B będzie zbiorem zawartym w płaszczyźnie Π, którego pole równe jest P. Niech W będzie punktem leżącym poza płaszczyzną Π i niech zbiór S będzie sumą wszystkich odcinków zaczynających się w punkcie W, których drugi koniec leży w zbiorze B (jeśli B jest kołem i punkt W leży nad jego środkiem, to S jest stożkiem o podstawie B i wierzchołku W; jeśli B jest wielokątem, to S jest ostrosłupem o wierz-

[27.5] Matematycy nazywają taki zbiór walcem o podstawie B, a zwykły walec – walcem kołowym.

chołku W i podstawie B) — taki zbiór S matematycy nazywają stożkiem o podstawie B i wierzchołku W. Niech h oznacza odległość punktu W od płaszczyzny Π, czyli wysokość stożka S. Przetnijmy stożek S płaszczyzną równoległą do płaszczyzny Π, której odległość od płaszczyzny Π równa jest $z \in [0,h]$. Otrzymany przekrój jest figurą podobną do B, w skali $\frac{h-z}{h}$. Ponieważ stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, więc pole $P(z)$ tego przekroju jest równe $\left(\frac{h-z}{h}\right)^2 P$. Wobec tego

$$|S| = \int_0^h \left(\tfrac{h-z}{h}\right)^2 P\,dz = \tfrac{P}{h^2}\int_0^h \left(h^2-2hz+z^2\right)dz = \\ = \tfrac{P}{h^2}\left(h^3-h^3+\tfrac{1}{3}h^3\right) = \tfrac{1}{3}Ph\,.$$

Otrzymaliśmy więc podawane zwykle wzory na objętość stożka i ostrosłupa jednocześnie, w rzeczywistości wzór otrzymany w tym przykładzie jest nieco ogólniejszy. ■

Przykład 27.31 Załóżmy, że każdy przekrój poziomy zbioru A otrzymany w wyniku przecięcia zbioru A płaszczyzną znajdującą się na wysokości $z \in [0,h]$ ma to samo pole P i że przekroje płaszczyznami poziomymi znajdującymi się na innych wysokościach są puste. Wtedy $|A| = \int_0^h P\,dz = Ph$. Otrzymany wynik stosuje się oczywiście do prostopadłościanu, ale również do równoległościanu, mogą dojść skręcenia różne na różnych poziomach. Twierdzenie to, zwane zasadą Cavalieri'ego, zostało sformułowane w XVII w. W czasach kiedy autor tego tekstu był uczniem liceum, zasada ta znajdowała się w podręczniku do geometrii, z którego uczyli się wtedy wszyscy licealiści w Polsce. ■

Przykład 27.32 Zajmijmy się kulą o promieniu r. Bez straty ogólności rozważań można przyjąć, że jej środkiem jest punkt $\mathbf{0}$. Przecinając kulę płaszczyzną złożoną z punktów, których trzecią współrzędną jest z otrzymujemy koło o promieniu $\sqrt{r^2-z^2}$. Pole tego koła równe jest $\pi(r^2-z^2)$. Wobec tego objętość kuli równa jest $\int_{-r}^{r}\pi(r^2-z^2)\,dz = \pi\big(zr^2-\frac{1}{3}z^3\big)\Big|_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3$. Znów otrzymaliśmy w bardzo prosty sposób znany wzór. Otrzymał go dawno temu Archimedes stosując zręczne rozumowanie geometryczne, jednak zajęło mu to więcej miejsca niż nam, korzystającym z wielu znacznie późniejszych pomysłów. ■

Przykład 27.33 Znajdziemy objętość dętki zakładając, że powstaje ona w wyniku obrotu koła o promieniu $r > 0$ wokół prostej leżącej w płaszczyźnie tego koła, w odległości $R > r$ od jego środka. Matematycy powierzchnię dętki nazywają torusem.

Załóżmy, że środkiem koła o promieniu r jest punkt $(R, 0, 0)$ oraz że to koło leży w płaszczyźnie $z = 0$. ,,Przetnijmy" dętkę płaszczyzną poziomą przechodzącą przez punkt $(0, 0, z)$. Przekrój jest pierścieniem kołowym, którego promień wewnętrzny równy jest $R - \sqrt{r^2 - z^2}$ a zewnętrzny to $R + \sqrt{r^2 - z^2}$, zatem polem tego pierścienia kołowego jest liczba

$$\pi\left(R + \sqrt{r^2 - z^2}\right)^2 - \pi\left(R - \sqrt{r^2 - z^2}\right)^2 = 4\pi R\sqrt{r^2 - z^2}\,.$$

Wynika stąd, że objętością dętki jest

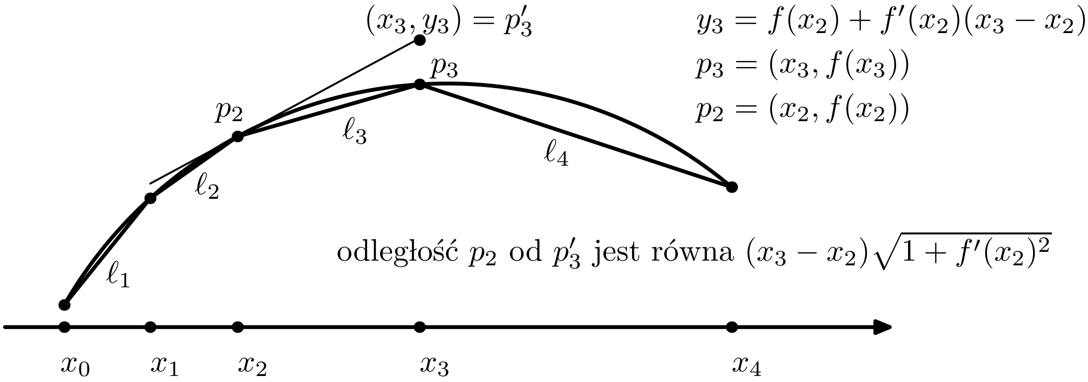
$$\int_{-r}^{r} 4\pi R\sqrt{r^2 - z^2}\,dz = 4\pi R \cdot \tfrac{1}{2}\pi r^2 = 2\pi^2 R r^2 = 2\pi R \cdot \pi r^2\,.$$

Zadanie zostało rozwiązane. ■

Tych kilka przykładów nieźle ilustruje skuteczność rachunku całkowego. Otrzymanie tych wzorów bez rachunku całkowego jest możliwe, ale znane autorowi wyprowadzenia w istocie zawierają przejścia graniczne, które pojawia się w dowodzie twierdzenia o sumach Riemanna. Można twierdzić, że stworzenie rachunku całkowego stanowiło ukoronowanie wysiłków wielu ludzi obliczających różne wielkości, np. objętości.

Długość wykresu funkcji

Załóżmy, że funkcja $f\colon [a, b] \longrightarrow (0, +\infty)$ jest różniczkowalna i że jej pochodna f' jest ciągła na przedziale $[a, b]$. Jasne jest, że długość krzywej powinniśmy przybliżać długością łamanej (linii złożonej z odcinków), której wierzchołki dzielą wykres funkcji f na małe fragmenty. Omówimy to nieco dokładniej.



Niech $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Niech l_i oznacza długość odcinka, który łączy punkty $p_{i-1} = \big(x_{i-1}, f(x_{i-1})\big)$ i $p_i = \big(x_i, f(x_i)\big)$. Mamy więc

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)^2}\,.$$

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że istnieje taka liczba $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, że zachodzi równość

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + f'(t_i)^2(x_i - x_{i-1})^2} = \\ = (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + (f'(t_i)^2)}\,.$$

Stąd wynika, że długość łamanej równa jest

$$l_1 + l_2 + \ldots + l_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + (f'(t_i)^2)}\,.$$

Długość wykresu funkcji f to wobec tego $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$, co wynika oczywiście z twierdzenia o sumach Riemanna.

Ten wynik jest bardzo jasny z punktu widzenia fizyki. Załóżmy, że wykres funkcji to np. szosa, po której porusza się samochód w ten sposób, że składową poziomą wektora prędkości jest 1. Niech x oznacza czas. Wtedy w chwili x znajdujemy się w punkcie $\big(x, f(x)\big)$ – zakładamy, że startujemy z punktu $\big(a, f(a)\big)$, wtedy $f'(x)$ mierzy prędkość zmian wartości funkcji f w chwili x, jest więc to składowa pionowa wektora prędkości naszego pojazdu. Jego prędkością skalarną jest zatem długość wektora prędkości, czyli liczba $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$, oczywiście zależna od czasu. Przebytą drogę należy obliczać mnożąc czas przez prędkość. Ponieważ prędkość jest zmienna, więc prowadzi to do dzielenia czasu podróży, na krótkie odcinki, bo w krótkim okresie czasu prędkość jest prawie stała (prędkość jest funkcją ciągłą czasu), następnie mnożymy ten krótki czas przez prędkość z jaką się **wtedy** poruszamy i sumujemy. Wynik to suma Riemanna dla całki z funkcji $\sqrt{1+(f'(x))^2}$. Po przejściu do granicy otrzymujemy więc całkę $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$. Rozumując podobnie dojść można uznać, że $\int_a^b f(x)\,dx$ jest drogą przebytą przez pojazd poruszający się po prostoliniowej drodze w ten sposób, że w chwili x jego prędkością jest $f(x)$.

Ten argument jest bardzo ważny historycznie: Newton tworzył rachunek różniczkowy i całkowy w silnym związku z fizyką. Bardzo podobnie przyspieszenie jest powiązane z prędkością — po prostu wszędzie zastępujemy *położenie* przez prędkość i jednocześnie *prędkość* przez przyspieszenie. ■

Przykład 27.34 Obliczymy długość łuku paraboli $y = x^2$ zaczynającego się w punkcie $(0,0)$ i kończącego się w punkcie (a, a^2). Zgodnie z poprzedzającymi ten przykład rozważaniami ta długość równa jest $\int_0^a \sqrt{1+(2x)^2}\,dx$. Podobną całkę obliczaliśmy w przykładzie 27.28, więc nie będziemy powtarzać obliczeń. Podstawiając w tam otrzymanym wyniku np. $x = 4u$ i w ostatecznym wyniku pisząc x zamiast u otrzymujemy

$$\int \sqrt{1+4x^2}\,dx = \tfrac{x}{4}\sqrt{1+\tfrac{x^2}{4}} + \tfrac{1}{4}\ln\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right) + C\,.$$

Łuk paraboli ma więc długość $\frac{a}{4}\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}+\frac{1}{4}\ln\left(2a+\sqrt{1+4a^2}\right)$. ■

Wynik jest zadziwiająco skomplikowany. W XIX w. matematykom udało się wykazać, że długość elipsy, która nie jest okręgiem nie daje się wyrazić za pomocą tzw. funkcji elementarnych. Można to zrobić za pomocą tzw. funkcji eliptycznych.

Obliczymy teraz długość okręgu, a właściwie jego połowy, choć wszyscy dobrze znają wzór, który otrzymamy. Tu rachunek będzie bardzo prosty, a różnica między okręgiem i elipsą tak niewielka. Jednak bardzo istotna: w całce, którą trzeba znaleźć w przypadku elipsy występuje pod pierwiastkiem iloraz *dwóch* wielomianów kwadratowych, w przypadku okręgu — jeden wielomian.

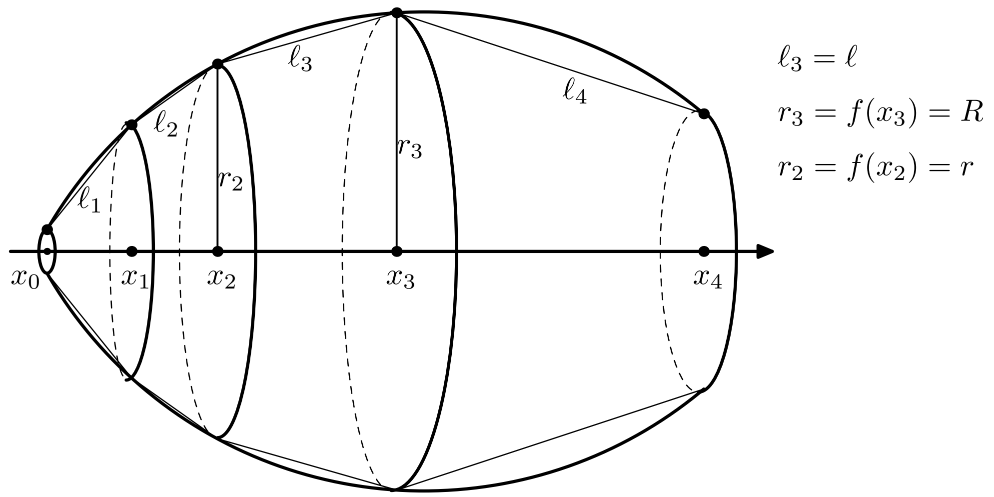
Przykład 27.35 Półokrąg o promieniu $r > 0$ możemy potraktować jako wykres funkcji $\sqrt{r^2 - x^2}$ zdefiniowanej na przedziale $[-r, r]$. Wobec tego jego długość równa jest

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \left(\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)'\right)^2}\, dx = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \left(\tfrac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\, dx =$$
$$= \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \tfrac{x^2}{r^2-x^2}}\, dx = \int_{-r}^{r} \tfrac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\, dx \;\underset{dx = r\cos t\, dt}{\overset{x = r \sin t}{=\!=\!=\!=}}\; =$$
$$= r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} dt = \pi r\,.$$

Otrzymaliśmy więc dobrze znany wynik.[27.6] ■

Pola powierzchni brył obrotowych

Tym razem punktem wyjścia będzie wzór na pole powierzchni bocznej stożka: $\pi r l$, gdzie r to promień podstawy stożka, a l to długość tworzącej. Z tego wzoru bez trudu można wyprowadzić wzór na pole powierzchni bocznej stożka ściętego, w którym większa podstawa ma promień R, mniejsza — promień r, a tworząca to l. Stożek ścięty potraktujemy jako wynik odcięcia od stożka o promieniu podstawy R i tworzącej $l\frac{R}{R-r}$ stożka o promieniu podstawy r i tworzącej $l\frac{r}{R-r}$ — wynika to z podobieństwa trójkątów. Wobec tego pole powierzchni bocznej stożka ściętego jest równe $\pi\frac{lR^2}{R-r} - \pi\frac{lr^2}{R-r} = \pi l\,(R + r)$.[27.7]



[27.6] Trochę oszukując: funkcja $\sqrt{r^2-x^2}$ nie ma skończonej pochodnej w końcach przedziału, ale tego można uniknąć rozpatrując np. ćwiartkę okręgu.

[27.7] Trochę to przypomina wzór na pole trapezu: $\frac{1}{2}(2\pi R + 2\pi r)l$ – połowa sumy podstaw razy wysokość.

Załóżmy, że funkcja $f\colon [a,b] \to (0,+\infty)$ ma ciągłą pochodną. Obrócimy wykres funkcji f wokół osi OX. W wyniku otrzymamy powierzchnię, której pole obliczymy. Podzielimy przedział $[a,b]$ punktami $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ na krótkie przedziały, niekoniecznie równe. To co powstaje w wyniku obrotu części wykresu odpowiadającej przedziałowi $[x_{i-1}, x_i]$ można przybliżyć stożkiem ściętym o wysokości $x_i - x_{i-1}$ i promieniach podstaw $f(x_i)$, $f(x_{i-1})$ (walcem, gdy $f(x_{i-1}) = f(x_i)$). Pole powierzchni bocznej takiego stożka, to zgodnie z przypomnianymi wzorami $\pi l_i\big(f(x_{i-1}) + f(x_i)\big)$, gdzie l_i oznacza jego tworzącą, czyli

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)^2} =$$

$$= (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + \big(f'(t_i)\big)^2}$$

dla pewnego $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$, istnienie takiej liczby t wynika z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej. Przedział $[x_{i-1}, x_i]$ jest ,,krótki", więc $f(x_{i-1} \approx f(t_i) \approx f(x_i)$, zatem

$$\pi l_i \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) \approx 2\pi \cdot f(t_i)(x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + \big(f'(t_i)\big)^2}\,.$$

Przybliżenie $f(x_{i-1}) \approx f(t_i) \approx f(x_i)$ jest dopuszczalne, bo popełniamy błąd mniejszy niż $K\cdot(x_i - x_{i-1})^2$ dla pewnego $K \in \mathbb{R}$. Pole powierzchni powstałej w wyniku obrotu wykresu funkcji f można więc przybliżyć sumą $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2\pi \cdot f(t_i)\sqrt{1 + \big(f'(t_i)\big)^2}$, która z kolei przybliża całkę $\int_a^b 2\pi f(t)\sqrt{1 + \big(f'(t)\big)^2}\,dt$. Wobec tego ta całka jest równa polu powierzchni powstałej w wyniku obrotu funkcji f wokół osi x. Czas na jakiś przykład.

Przykład 27.36 Niech $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ dla $a \leqslant x \leqslant a + h$, przy czym $-r \leqslant a$ oraz $a + h \leqslant r$. W wyniku obrotu wykresu funkcji f określonej na przedziale $[a, a+h]$ otrzymujemy część powierzchni kuli zawartą między dwiema równoległymi płaszczyznami, których odległość równa jest h. Zgodnie z omówionym wzorem pole tej części sfery równe jest

$$2\pi\int_a^{a+h} \sqrt{r^2 - x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\,dx = 2\pi r \int_a^{a+h} dx = 2\pi r h\,.$$

W szczególności, jeżeli $a = -r$ i $h = 2r$ otrzymujemy wzór na pole powierzchni całej kuli.

Jednak otrzymaliśmy coś więcej: wzór na pole powierzchni części sfery zawartej między dwiema równoległymi płaszczyznami oddalonymi o h. Zauważmy jeszcze, że we wzorze tym NIE występuje liczba a. Pole nie zależy od a, ważne jest tylko to, że obie płaszczyzny przecinają sferę. Jedna z tych płaszczyzn może przechodzić przez jeden z biegunów, a w innej sytuacji płaszczyzna równika może dzielić przestrzeń między nimi na pół. Nie jest to całkiem oczywiste, ale z pewnością Archimedes to wiedział.[27.8] ■

Przykład 27.37 Obliczymy teraz pole powierzchni dętki (torusa) opisanej już w przykładzie 27.33. Przypomnijmy: powierzchnię otrzymujemy w wyniku obrotu okręgu zdefiniowanego równaniami $y = 0$, $(x - R)^2 + z^2 = r^2$ wokół osi OZ. Można przyjąć, że obracamy wokół osi OZ wykresy dwu funkcji $R + \sqrt{r^2 - z^2}$ oraz $R - \sqrt{r^2 - z^2}$, zmiennej z. Część wspólna otrzymanych powierzchni składa się z dwóch okręgów, więc jej polem jest 0. Wobec tego pole ,,dętki" to suma pól obu powierzchni. W pierwszym przypadku pole równe jest (por. przykład 27.35)

$$2\pi \int_{-r}^{r} \left(R + \sqrt{r^2 - z^2}\right) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-z}{\sqrt{r^2 - z^2}}\right)^2}\, dz =$$

$$= 2\pi r \int_{-r}^{r} \left(\frac{R}{\sqrt{r^2 - z^2}} + 1\right) dz = 2\pi^2 rR + 4\pi r^2 ,$$

wobec tego w drugim —

$$2\pi \int_{-r}^{r} \left(R - \sqrt{r^2 - z^2}\right) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-z}{\sqrt{r^2 - z^2}}\right)^2}\, dz = 2\pi^2 rR - 4\pi r^2 .$$

Sumując otrzymujemy $4\pi^2 rR = 2\pi r \cdot 2\pi R$. ■

Jest więc widoczne, że za pomocą całek można dać sobie radę z obliczaniem objętości, pól i długości. Często wyniki nie dają się wyrazić za pomocą funkcji elementarnych. Jednak wyrażenie ich

[27.8] W podręczniku do geometrii używanym we wszystkich polskich liceach, gdy autor tego tekstu był uczniem, twierdzenie to było podane wraz z dowodem nie korzystającym w jawnej postaci z całek. Oczywiście tylko część uczniów je zauważała.

nawet za pomocą samej całki jest ważne, bo istnieje wiele metod przybliżonego obliczania całek, więc nawet jeśli mamy wynik nieelementarnie wyrażony, to i tak można uzyskiwać jego przybliżenia z całkowicie wystarczającą dokładnością.

Środek masy.

Środek masy pary ,,punktów materialnych" $S_1 = (x_1, y_1)$, którego masą jest m_1 oraz $S_2 = (x_2, y_2)$, którego masą jest m_2, to punkt

$$S = \left(\tfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}, \tfrac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}\right).$$

Wynika to stąd, że punkt S dzieli odcinek S_1S_2 tak, że $m_1 \cdot \|S_1S\| = m_2 \cdot \|SS_2\|$, $\overrightarrow{[S_1, S]} = \frac{m_2}{m+1+m_2}[x_2 - x_1, y_2 - y_1]$. Z fizyki wiadomo, że środek masy większej liczby punktów znajdujemy zastępując kolejno pary punktów środkami ich mas, w których umieszczamy sumę ich mas. To prowadzi nas do stwierdzenia, że środkiem masy układu n punktów S_1, S_2, …, S_n, których masami są m_1, m_2, …, m_n, jest punkt

$$S = \left(\tfrac{m_1x_1+m_2x_2+\dots+m_nx_n}{m_1+m_2+\dots+m_n}, \tfrac{m_1y_1+m_2y_2+\dots+m_ny_n}{m_1+m_2+\dots+m_n}\right).$$

Ten wzór obowiązuje też w przestrzeni (dochodzi współrzędna z) i na prostej (odpada współrzędna y).

Po tych uwagach możemy zająć się środkiem masy jednorodnego obszaru na płaszczyźnie ograniczonego przez wykresy dwu funkcji ciągłych $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Zakładamy, że dla każdego $x \in [a,b]$ zachodzi nierówność $f(x) \leqslant g(x)$. Załóżmy, też że $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ i — jak zwykle — że odcinki $[x_{i-1}, x_i]$ są dostatecznie krótkie. Obszar między wykresami $G := \{(x,y)\colon \quad a \leqslant x \leqslant b,\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$ dzielimy na wąskie paski $G_i = \{(x,y)\colon \quad x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$. Te paski są wąskie i długie, więc środek masy G_i to w przybliżeniu $S_i = \left(\frac{1}{2}(x_{i-1}+x_i), \frac{1}{2}(f(t_i)+g(t_i))\right)$, gdzie $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ jest dowolnie wybranym punktem. Przybliżać wolno, bo pasek P_i mało różni się od prostokąta w tym sensie, że ,,wyrównanie" góry i dołu powoduje mała zmianę pola w porównaniu z polem całego paska. Masa paska jest proporcjonalna do jego pola, więc możemy przyjąć, że jest temu polu równa. W przybliżeniu jest to

$(x_i - x_{i-1})\big(g(t_i) - f(t_i)\big)$. Wobec tego środek masy S obszaru G jest w przybliżeniu równy $\frac{\sum_{i=0}^{n} S_i(x_i-x_{i-1})(g(t_i)-f(t_i))}{\sum_{i=0}^{n}(x_i-x_{i-1})\big(g(t_i)-f(t_i)\big)}$. Niech $S=(x_S,y_S)$. Wtedy $x_S \approx \frac{\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2}(x_{i-1}+x_i)(x_i-x_{i-1})(g(t_i)-f(t_i))}{\sum_{i=0}^{n}(x_i-x_{i-1})\big(g(t_i)-f(t_i)\big)}$ oraz $y_S \approx \frac{\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2}(f(t_i)+g(t_i))(x_i-x_{i-1})(g(t_i)-f(t_i))}{\sum_{i=0}^{n}(x_i-x_{i-1})\big(g(t_i)-f(t_i)\big)}$. W granicy mianownik stanie się równy $\int_a^b \big(g(x)-f(x)\big)\,dx$, co jest zgodne z oczekiwaniem, bo powinna się w nim pojawić masa obszaru G, czyli jego pole. W liczniku x_S, po zastąpieniu liczby $\frac{1}{2}(x_{i-1}+x_i)$ liczbą t_i, mamy sumę Riemanna całki $\int_a^b x\big(g(x)-f(x)\big)\,dx$, zaś w liczniku y_S — sumę Riemanna całki $\frac{1}{2}\int_a^b \big(g(x)^2 - f(x)^2\big)\,dx$. Wobec tego można napisać równości, które dla matematyka[27.9] są definicją środka masy obszaru G:

$$x_S = \frac{\int_a^b x\big(g(x)-f(x)\big)\,dx}{\int_a^b \big(g(x)-f(x)\big)\,dx}, \quad y_S = \frac{\int_a^b \frac{g(x)+f(x)}{2}\big(g(x)-f(x)\big)\,dx}{\int_a^b \big(g(x)-f(x)\big)\,dx}.$$

Uwaga 27.23
To będzie całkowicie nieformalny komentarz, ale wskazujący, jak należy mysleć o wielkościach fizycznych. Wielkość $\big(g(x)-f(x)\big)\,dx$ to pole prostokąta o wysokości $g(x)-f(x)$, którego szerokość dx jest ,,nieskończenia mała". Zamiast sumy pól tych ,,nieskończenie cienkich" prostokątów występuje całka. W liczniku x_S mamy całkę z iloczynu x, czyli pierwszej współrzędnej środka masy tego ,,nieskończenie cienkiego" prostokąta, przez jego masę. W liczniku y_S mamy całkę z iloczynu $\frac{1}{2}\big(g(x)+f(x)\big)$, czyli drugiej współrzędnej środka masy tego chudzielca, przez jego pole, czyli przez $\big(g(x)-f(x)\big)\,dx$. Oczywiście nie zdefiniujemy nieskończenie cienkich prostokątów, zresztą po to teoria granic, pochodnych i całek została stworzona, by uwolnić się od tak nieprecyzyjnych sformułowań, jakie występują w tej uwadze. Jednak warto zdawać sobie sprawę z tego, że one są w tle. Dobre intuicje to też ważna rzecz. ■

[27.9] dla fizyka to chyba jest twierdzenie

Przykład 27.38 Znajdziemy środek masy jednorodnego trójkąta. Załóżmy, że wierzchołkami trójkąta są punkty $A=(0,0)$, $B=(b_1,b_2)$ i $C=(c_1,c_2)$ przy czym $0\leqslant c_1\leqslant b_1$, $b_1>0$ i $-b_2c_1+b_1c_2\neq 0$.[27.10] Niech $f(x)=\frac{b_2}{b_1}x=\frac{b_2}{b_1}(x-b_1)+b_2$. Wykresem funkcji f jest prosta przechodząca przez punkty A i B. Założymy, że jej dziedziną jest przedział $[0,b_1]$, czyli że jej wykresem jest odcinek AB. Określimy też funkcję g: $g(x)=\frac{c_2}{c_1}x$ dla $0\leqslant x\leqslant c_1$ i $g(x)=\frac{b_2-c_2}{b_1-c_1}(x-c_1)+c_2=\frac{b_2-c_2}{b_1-c_1}(x-b_1)+b_2$ dla $c_1\leqslant x\leqslant b_1$, oczywiście jeśli $c_1=0$ — obowiązuje jedynie drugi wzór, a jeśli $c_1=b_1$ — tylko pierwszy. Trójkąt o wierzchołkach A,B,C to zbiór
$G=\{(x,y)\colon\ 0\leqslant x\leqslant b_1,\ \min(f(x),g(x))\leqslant y\leqslant\max(f(x),g(x))\}$.
Można więc stosować poznane wzory na współrzędne środka masy.

Niech $S=(x_S,y_S)$ będzie środkiem masy G. Znajdziemy najpierw pole $|G|$ trójkąta G. Niech $P=\frac12|b_1c_2-b_2c_1|$. Mamy

$$|G|=\int_0^{b_1}\big|g(x)-f(x)\big|dx=\int_0^{c_1}\big|g(x)-f(x)\big|dx+ \\ +\int_{c_1}^{b_1}\big|g(x)-f(x)\big|dx=$$
$$=\int_0^{c_1}\Big|\tfrac{c_2}{c_1}-\tfrac{b_2}{b_1}\Big|x\,dx+\int_{c_1}^{b_1}\Big|\tfrac{b_2-c_2}{b_1-c_1}(x-b_1)+b_2-\tfrac{b_2}{b_1}(x-b_1)-b_2\Big|dx=$$
$$=\int_0^{c_1}\tfrac{|b_1c_2-b_2c_1|}{b_1c_1}x\,dx+\int_{c_1}^{b_1}\Big|\tfrac{b_2c_1-b_1c_2}{b_1(b_1-c_1)}(x-b_1)\Big|dx \xlongequal[|b_1c_2-b_2c_1|=2P]{x-b_1\leqslant 0}$$
$$=\tfrac{2P}{b_1c_1}\int_0^{c_1}x\,dx-\tfrac{2P}{b_1(b_1-c_1)}\int_{c_1}^{b_1}(x-b_1)dx=$$
$$=\tfrac{P}{b_1c_1}c_1^2+\tfrac{P}{b_1(b_1-c_1)}(c_1-b_1)^2=\tfrac{c_1}{b_1}P+\tfrac{(b_1-c_1)}{b_1}P=\tfrac{|b_1c_2-b_2c_1|}{2}$$

— otrzymaliśmy wzór na pole trójkąta, który potrafimy znaleźć bez całek, ale z całkami jest wygodniej ze względu na stosowany tu opis trójkąta i **następne obliczenia**. Teraz trzeba znaleźć jeszcze dwie całki. Mamy $x_S|G|=\int_0^{b_1}x\big|g(x)-f(x)\big|\,dx=$

$$=\int_0^{c_1}x\big|g(x)-f(x)\big|dx+\int_{c_1}^{b_1}x\big|g(x)-f(x)\big|dx \xlongequal[\text{obliczenia}]{\text{poprzednie}}$$

[27.10] Każdy trójkąt można przesunąć bez obracania tak, by jego skrajny lewy punkt znalazł się na osi OY, jeśli tych skrajnych lewych punktów jest wiele, to na osi rzędnych znajduje się cały bok, trójkąt przesuwamy tak, by najniższy ze skrajnych lewych punktów znalazł się w początku układu współrzędnych. Skrajny prawy punkt to B. Warunek $-b_2c_1+b_1c_2\neq 0$ jest równoważny temu, że punkty A,B,C nie leżą na jednej prostej.

$= \frac{2P}{b_1c_1}\int_0^{c_1} x^2\,dx - \frac{2P}{b_1(b_1-c_1)}\int_{c_1}^{b_1} x(x-b_1)dx =$
$= \frac{2P}{b_1c_1}\int_0^{c_1} x^2\,dx - \frac{2P}{b_1(b_1-c_1)}\int_{c_1}^{b_1} \big((x-b_1)^2 + b_1(x-b_1)\big)dx =$
$= \frac{2P}{c_1b_1}\frac{c_1^3}{3} + \frac{2P}{b_1(b_1-c_1)}\big(\frac{(c_1-b_1)^3}{3} + b_1\frac{(c_1-b_1)^2}{2}\big) =$
$= \frac{P}{3b_1}\big(2c_1^2 - 2(b_1-c_1)^2 + 3b_1(b_1-c_1)\big) = P\cdot\frac{b_1+c_1}{3}$,
zatem $x_S = \frac{b_1+c_1}{3} = \frac{0+b_1+c_1}{3}$. Okazało się, że: pierwsza środka masy trójkąta jednorodnego to średnia arytmetyczna pierwszych współrzędnych jego wierzchołków. Znajdziemy drugą. Mamy
$y_S|G| = \frac{1}{2}\int_0^{b_1}\big|g(x)-f(x)\big|\cdot\big(g(x)+f(x)\big)\,dx =$
$= \frac{P}{b_1c_1}\int_0^{c_1} x\big(\frac{c_2}{c_1}+\frac{b_2}{b_1}\big)x\,dx -$
$- \frac{P}{b_1(b_1-c_1)}\int_{c_1}^{b_1}(x-b_1)\Big(\big(\frac{b_2-c_2}{b_1-c_1}+\frac{b_2}{b_1}\big)(x-b_1)+2b_2\Big)\,dx =$
$= \frac{P}{b_1c_1}\int_0^{c_1}\frac{b_1c_2+b_2c_1}{b_1c_1}x^2\,dx -$
$-\frac{P}{b_1(b_1-c_1)}\int_{c_1}^{b_1}\Big(\frac{2b_1b_2-b_1c_2-b_2c_1}{b_1(b_1-c_1)}(x-b_1)^2+2b_2(x-b_1)\Big)\,dx =$
$=\frac{P}{b_1c_1}\frac{b_1c_2+b_2c_1}{b_1c_1}\frac{c_1^3}{3}+\frac{P}{b_1(b_1-c_1)}\big(\frac{2b_1b_2-b_1c_2-b_2c_1}{b_1(b_1-c_1)}\frac{(c_1-b_1)^3}{3}+b_2(c_1-b_1)^2\big)=$
$=\frac{P}{3b_1^2}\big(c_1(b_1c_2+b_2c_1)+(c_1-b_1)(2b_1b_2-b_1c_2-b_2c_1)+3b_1b_2(b_1-c_1)\big) =$
$= \frac{P}{3b_1^2}\big(c_1(b_1c_2+b_2c_1)+(b_1-c_1)(b_1b_2+b_1c_2+b_2c_1)\big) =$
$= \frac{P}{3b_1^2}\big((b_1-c_1)b_1b_2+b_1(b_1c_2+b_2c_1)\big) = \frac{P}{3b_1^2}b_1^2(b_2+c_2) = \frac{P(b_2+c_2)}{3}$.
Wynika stąd, że $y_S = \frac{b_2+c_2}{3} = \frac{0+b_2+c_2}{3}$, a to jest wynik, który można było oczekiwać. Po długich i ciężkich cierpieniach udowodniliśmy, że środek masy jednorodnego trójkąta jest średnią arytmetyczną jego wierzchołków. No i **KONIEC!** ■

Nie będziemy mnożyć przykładów. Podamy jeszcze wzory na współrzędne środka masy wykresu funkcji $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ zakładając, że jest ona różniczkowalna i że pochodna $f'\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ jest ciągła. Należy wyobrazić sobie wykres wykonany z bardzo cienkiego, jednorodnego drutu. W takiej sytuacji

$$x_S = \frac{\int_a^b t\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt}{\int_a^b\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt} \qquad \text{i} \qquad y_S = \frac{\int_a^b f(t)\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt}{\int_a^b\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt}.$$

Uwaga 27.24
W mianownikach widzimy długość wykresu funkcji. Wykres to

zbiór punktów postaci $(t, f(t))$. O dt myślimy jako o nieskończenie krótkim odcinku poziomym. $f'(t) = \mathrm{tg}\,\alpha$, gdzie α to kąt nachylenia stycznej do wykresu w punkcie $(t, f(t))$, zatem $\sqrt{1+(f'(t))^2} = \frac{1}{\cos\alpha}$. Oznacza to, że $\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$ to długość przeciwprostokątnej w trójkącie, w którym przyprostokątna o długości dt tworzy z przeciwprostokątną kąt α. Oznacza to, że $\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$ to długość nieskończenie krótkiego fragmentu wykresu, czyli jego ,,masa". W jednym liczniku mnożymy tę nieskończenie małą masę przez pierwszą współrzędną punktu $(t, f(t))$, a w drugim — przez drugą. Ta nieformalna agitacja jest bardzo ważna. ■

Zachęcamy Czytelnika do napisania wzorów na środek masy obszaru trójwymiarowego zawartego między wykresami dwu funkcji dwu zmiennych, na środek masy powierzchni obrotowej powstałej w wyniku obrotu wykresu funkcji wokół osi argumentów. A może warto napisać wzory na moment bezwładności względem osi obrotu pokrywającej się z osią układu współrzędnych?

Zadania

1. Obliczyć całkę $\int \frac{x^5}{x^4+x^2+1}\,dx$

2. Obliczyć $\int f(x)dx$, jeśli $f(x) =$

a. $x + 3x^2 - 12x^4$	**ą.** $x(1+x^2)^4$	**b.** e^{2x}
c. $\sin 3x$	**ć.** $x\sin(x^2)$	**d.** $\frac{1}{1+4x^2}$
e. $\frac{x}{1+4x^2}$	**ę.** $\frac{1}{1+3x^2}$	**f.** $\frac{1}{2+3x^2}$
g. $\frac{x^2+2x-2}{2+3x^2}$	**h.** $\mathrm{tg}\,x$	**i.** $\frac{1}{1+2x}$
j. $\frac{x}{1+2x}$	**k.** $\frac{x^2+2x+3}{x+2}$	**l.** $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$
ł. $\frac{x}{(x+1)(x-2)}$	**m.** $\sin x\cos x$	**n.** $\frac{e^x}{1+e^x}$
ń. $x^2\sqrt{x^3-1}$	**o.** $e^{\sqrt{x}}$	**ó.** $x\sin 2x$
p. $x^2\sin x$	**q.** xe^x	**r.** x^2e^{2x}
s. $\mathrm{arctg} x$	**ś.** $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$	**t.** $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$
u. $\sin^3 x$	**w.** $\frac{1}{\sin^2 x}$	**x.** $\cos x \cdot e^{\sin x}$
y. $\frac{\ln x}{x}$	**z.** $e^x\sin x$	**ż.** $e^{2x}\sin 5x$
ź. $\frac{1}{(1+e^x)^2}$	$\alpha.$ $\frac{1}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}$	$\beta.$ $\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x$

γ. $x^2e^{3x}\sin 4x$ δ. $\cos^2\sqrt{x}$ ε. $\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^{3/2}}$

ζ. $\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x$ η. $x\ln(1+x^4)$ θ. $x^x(1+\ln x)$

3. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez wykresy funkcji

a. $f(x)=x^2$ i $g(x)=\frac{1}{2}x^2+2$,

b. $f(x)=x^2$ i $g(x)=-x^2$ oraz proste $x=-1$, $x=1$,

c. $f(x)=x^2$ i $g(x)=1-x^2$,

d. $f(x)=x^2$, $g(x)=1-x^2$ i $h(x)=2$,

e. $f(x)=x^2$ i $g(x)=x^2-2x+4$ oraz oś OY,

f. $f(x)=\sqrt{x}$ i $g(x)=0$ oraz prostą $x=2$,

g. $f(x)=x^2$ oraz parabolę $x=y^2$,

h. $f(x)=x\sin 4x$ i $g(x)=0$ oraz proste $x=0$ i $x=\frac{\pi}{8}$,

i. $F(y)=\frac{1}{2}y^2$ i okręgiem o równaniu $x^2+y^2-4x=0$.

4! Niech $x^2-y^2=1$, $x>0$, $y\geqslant 0$. Dowieść, że istnieje takie $t\in\mathbb{R}$, że $x=\cosh t=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$ i $y=\sinh t=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$. Niech $A=\{(u,v)\colon\ \ u^2-v^2\leqslant 1, |vx|\leqslant uy\}$. Udowodnić, że zachodzi równość $|A|=t$.

Uwaga 27.25 Jeśli $x>-1$, $y\geqslant 0$ i $x^2+y^2=1$, to istnieje dokładnie jedna liczba $t\in[0,\pi)$, że $x=\cos t$, $y=\sin t$. Jeżeli $A=\{(t\cos\tau, t\sin\tau)\colon\ \ t\leqslant 1,\ |\tau|\leqslant t\}$, to $|A|=t$. Ta uwaga pokazuje geometryczne podobieństwo definicji sinusa i kosinusa oraz sinusa hiperbolicznego i kosinusa hiperbolicznego. ■

5*. Wyprowadzenie wzoru Wallisa

a. Niech $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ zachodzi równość $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$. Dla dowodu można dwukrotnie scałkować odpowiednie funkcje przez części: $\sin^n x=\sin x\cdot\sin^{n-1}x=\sin^{n-1}x\cdot(-\cos x)'$, …

b. Obliczyć I_0 oraz I_1, a następnie I_{2n} i I_{2n+1} dla dowolnej liczby całkowitej $n\geqslant 0$.

c. Wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

d. Wykazać, że ciąg (I_n) jest malejący i że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=1$.

e. Wykazać, że $\frac{\pi}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\right)^2$.

6. Dowieść, że jeśli $0 \leqslant x \leqslant 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} n(n+1)x^n(1-x) = 0$.

Dowieść, że zachodzi równość $\int_0^1 n(n+1)x^{n-1}(1-x)\,dx = 1$. *Nie można więc wnioskować tego, że całki dążą do* 0 *z tego tylko, że funkcje podcałkowe dążą do* 0.

7. Obliczyć objętość elipsoidy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

8. Obliczyć długość krzywej o równaniu: $y^2 = 4x^3$, przy czym $y \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{9}$.

9. Obliczyć długość krzywej o równaniu $y = 2\sqrt{x}$, przy czym $1 \leqslant x \leqslant 9$.

10. Porównać całki nie obliczając ich:

a. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^6 x\,dx$ i $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^3 x\,dx$,

b. $\int_0^1 e^{-x}\,dx$ i $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

11. Określić znak całki

a. $\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$, **b.** $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln x\,dx$,

c. $\int_{-2}^2 x^3 2^x\,dx$, **d.** $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

12. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ obliczając pewną całkę, jeśli $a_n =$

(a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots \frac{1}{n+n}$, (b) $\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2}$,

(c) $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, (d) $\frac{1^7+2^7+\cdots+n^7}{n^8}$.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\sin\frac{\pi}{n^2} + \frac{n+2}{n}\sin\frac{2\pi}{n^2} + \cdots + \frac{2n-1}{n}\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right)$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-2}\sum\limits_{j=1}^{n}\sqrt{(nx+j)(nx+j+1)}$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{e^{1/n}}{n+1} + \frac{e^{2/n}}{n+1/2} + \cdots + \frac{e^{n/n}}{n+1/n}\right)$

13. Znaleźć pochodną funkcji f, jeśli $f(x) =$

a. $\int_1^{x+1} e^{t^2}\,dt$, **b.** $\int_1^{x^2} e^{t^2}\,dt$,

c. $\int_{x-1}^1 e^{t^2}\,dt$, **d.** $\int_{x-1}^{x^2} e^{t^2}\,dt$.

14. Obliczyć całkę

a. $\int_1^{10} \frac{|x-5|}{x-5}(x^2+1)\,dx$ – w punkcie 5 funkcja podcałkowa nie jest zdefiniowana,

b. $\int_{-1}^1 (|x|)'(x^2+x)\,dx$ – w punkcie 0 funkcja podcałkowa nie jest zdefiniowana,

c. $\int_{-1}^{1} |x|\, dx$,

d. $\int_{-10}^{10} |x^2 - 5x + 6|\, dx$.

15. Znaleźć środek masy jednorodnego łuku paraboli $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 3$.

16. Znaleźć środek masy jednorodnego obszaru
$$\{(x, y):\quad 0 \leqslant y \leqslant x^2,\ 0 \leqslant x \leqslant 3\}\,.$$

17. Znaleźć przybliżone położenie środka masy jednorodnego łuku sinusoidy $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.
Długość tego łuku wyraża się całką jest nieelementarną, więc należy ją przybliżyć np. z błędem mniejszym niż $\frac{1}{10}$.

18. Znaleźć środek masy jednorodnego obszaru
$$\{(x, y):\quad 0 \leqslant y \leqslant \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\}\,.$$

19. Znaleźć środek masy jednorodnego obszaru ograniczonego parabolami $2x = y^2$ i $2y = x^2$.

20. Znaleźć środek masy jednorodnej ćwiartki elipsy
$$\{(x, y):\quad \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1,\ 0 \leqslant x,\ 0 \leqslant y\}\,.$$

21. Niech $0 < \alpha < \pi$, $r > 0$. Znaleźć środek masy jednorodnego kąta opisanego tak: $K = \{(t \cos\varphi, t \sin\varphi):\quad t \leqslant r, |\varphi| \leqslant \alpha\}$.

22. Niech $0 < \alpha < \pi$, $r > 0$. Znaleźć środek masy jednorodnego łuku opisanego tak: $K = \{(r \cos\varphi, r \sin\varphi):\quad |\varphi| \leqslant \alpha\}$.

23. Znaleźć środek masy jednorodnego czworościanu.

24. Znaleźć środek masy jednorodnej półkuli o promieniu $r > 0$.

25. Zaleźć środek masy półtorusa, tj bryły powstałej w wyniku obrotu koła o promieniu $r > 0$ wokół prostej leżącej w jego płaszczyźnie w odległości $R > r$ od środka koła.

26. Załóżmy, że $\pi = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Definiujemy ciąg za pomocą równości $c_n = \frac{q^n}{n!} \int_0^{\pi} \big(x(\pi - x)\big)^n \sin x\, dx$.
Udowodnić, że $c_n > 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$.
Udowodnić, że $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.
Udowodnić, że $c_n \in \mathbb{Z}$ dla $n = 1, 2, \ldots$.
Udowodnić, że liczba π jest niewymierna.

Uwaga 27.26 Ten dowód niewymierności π pochodzi z XX wieku (I.Niven, 1947 r.). Oryginalny z 1761 r. był dłuższy. ■

27. Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0$. Można zacząć od wielomianów.

28. Wykazać, że jeśli funkcja f jest ciągła i dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ zachodzi równość $\int_0^1 f(x)x^n\,dx = 0$, to $f(x) = 0$ dla każdego $x \in [0,1]$.

29. Wykazać, że jeśli funkcja f klasy C^2 jest nieujemna, niemalejąca, wklęsła, na półprostej $[1,\infty)$, to ciąg $(a_k)_{k=1}^{+\infty}$ o wyrazie $a_k = \sum\limits_{n=1}^{k} f(n) - \int_1^k f(x)\,dx - \frac{1}{2}f(k)$ jest ograniczony.

30. Niech f będzie funkcją ciągłą na półprostej $[0,+\infty)$ i niech $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\,dx$.

31. Znaleźć $\lim\limits_{x\to+\infty} 2xe^{-x^2} \int_0^x e^{x^2}\,dx$.

32. Niech $F(x) = \int_0^x \sin^n t\,dt$, $G(x) = \int_0^x \cos^n t\,dt$. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ funkcje F i G są okresowe?

33. Obliczyć $B(k,n) := \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^n\,dx$, jeśli $k,n \in \mathbb{N}$.

34. Niech $P_n = \frac{1}{2^n n!}\big((x^2-1)^n\big)^{(n)}$. Obliczyć $\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_k(x)\,dx$.

35. Niech $f(0) = 0$ i $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$. Udowodnić, że f ma funkcję pierwotną.

36. Niech $g(0) = 1$ i $g(x) = \sin\frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$. Udowodnić, że g nie ma funkcji pierwotnej.

37. Udowodnić, że istnieje funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, która ma funkcję pierwotną, ale jej kwadrat $q\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcji pierwotnej nie ma, tutaj. $q(x) := f(x)\cdot f(x)$.

LICZBY ZESPOLONE

W tym rozdziale zajmiemy się omówieniem definicji i niektórych własności liczb zespolonych. Zaczniemy od uwagi o charakterze historycznym.

W XVI w. nauczono się rozwiązywać równania trzeciego stopnia. Każde równanie postaci $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, gdzie $a \neq 0$, można zastąpić równaniem postaci $y^3 + py + q = 0$: należy podzielić równanie przez liczbę a, następnie wprowadzić zmienną $y = x + \frac{b}{3a}$.[28.1] Niech $y = u + v$. Mamy wtedy

$$0 = y^3 + py + q = =u^3 + v^3 + q + (p + 3uv)(u + v)\,.$$

Dobierzemy liczby u i v tak, by $u^3 + v^3 = -q$ i $uv = -\frac{p}{3}$, czyli $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$. Liczby u^3, v^3 mają więc być pierwiastkami równania kwadratowego $t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$, więc np.

$$u^3 = -\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{p^3}{27} + \tfrac{q^2}{4}} \text{ i } v^3 = -\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{p^3}{27} + \tfrac{q^2}{4}}\,.$$

Wtedy $y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}\,.$

Otrzymaliśmy wzór na pierwiastek równania trzeciego stopnia. Pokażemy natomiast, że stosowanie tego wzoru może być kłopotliwe. Niech $p = -7$, $q = -6$, rozwiązujemy więc równanie $x^3 - 7x - 6 = 0$. Mamy

$$\tfrac{p^3}{27} + \tfrac{q^2}{4} = \left(\tfrac{-7}{3}\right)^3 + \left(\tfrac{-6}{2}\right)^2 = -\tfrac{343}{27} + 9 = -\tfrac{100}{27} < 0\,.$$

Teraz z tej liczby należy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy. Ten pierwiastek nie jest liczbą rzeczywistą! Można pomyśleć, że to dlatego, że nasze równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych. Tak jednak nie jest, bo $(-1)^3 - 7 \cdot (-1) - 6 = 0$, $(-2)^3 - 7 \cdot (-2) - 6 = 0$ i $3^3 - 7 \cdot 3 - 6 = 0$, więc nasze równanie ma trzy pierwiastki rzeczywiste! Czytelnik zechce sprawdzić, że jeśli y_1, y_2, y_3 są pierwiastkami równania $y^3 + py + q = 0$, czyli gdy $y^3 + py + q = =(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)$, to zachodzi równość:

[28.1] Podobnie postępowaliśmy chcąc rozwiązać równanie kwadratowe, tam nową zmienną było $x + \frac{b}{2a}$. Podstawienie jest skuteczne, bo $y^3 = (x + \frac{b}{3a})^3 = =x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{b^2}{3a^2}x + \frac{b^3}{27a^3}$, więc ten składnik zawiera dwa pierwsze człony lewej strony równania.

$$-\frac{1}{108}(y_1-y_2)^2(y_2-y_3)^2(y_3-y_1)^2=\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}.$$

Wynika stąd, że jeśli równanie ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste, to wzoru stosować się nie da. Poszukiwania innych wzorów nie dały rezultatu. Zaczęto zakładać, że istnieje pierwiastek kwadratowy z liczby -1, którego nie było, ale był wygodny w użyciu. Wreszcie liczby zespolone, których nie było, zinterpretowano jako punkty płaszczyzny i pogodzono się z nimi.[28.2] Do dziś została nazwa: liczby urojone — to pierwiastki kwadratowe z ujemnych liczb rzeczywistych. Dziś trudno sobie wyobrazić matematykę bez nich.

Definicja 28.1 (liczb zespolonych)
Liczbami zespolonymi nazywamy liczby postaci $a+bi$, gdzie i oznacza jednostkę urojoną, przyjmujemy, że $i^2=-1$ zaś a i b są liczbami rzeczywistymi. Suma liczb zespolonych $z_1=a+bi$ i $z_2=c+di$ to $z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$, ich iloczyn to $z_1z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$. Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczany jest na całym świecie [28.3] przez $\mathbb{C}$. ■

Twierdzenie 28.2
Zbiór liczb zespolonych jest ciałem, tzn.

D1 Dla dowolnych liczb $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ zachodzi równość $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ — dodawanie jest łączne.

D2 Dla każdej liczby $z\in\mathbb{C}$ zachodzi równość $z+0=z$, gdzie $0=0+0\cdot i$.

D3 Dla każdej liczby $z\in\mathbb{C}$ istnieje taka liczba $w\in\mathbb{C}$, że $z+w=0$ — istnienie liczby przeciwnej.

D4 Dla dowolnych $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ zachodzi $z_1+z_2=z_2+z_1$ — dodawanie jest przemienne.

M1 Dla dowolnych $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ zachodzi $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$ — mnożenie jest łączne.

M2 Dla każdej liczby $z\in\mathbb{C}$ zachodzi równość $z\cdot 1=z$ — charakteryzacja jedynki, gdzie $1=1+0\cdot i$.

M3 Dla każdej liczby $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ istnieje taka liczba $w\in\mathbb{C}$, że

[28.2] Zrobili to różni ludzie. Przyjmuje się, że największy wkład miał Jean–Robert Argand, choć długo nie wymieniano jego nazwiska, m. in. cytował go A. Cauchy, ale bez wymieniania nazwiska.

[28.3] z wyjątkiem polskich szkół średnich

$z \cdot w = 1$ — istnienie liczby odwrotnej.

M4 Dla dowolnych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zachodzi $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ — mnożenie jest przemienne.

MD Równość $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$ zachodzi dla dowolnych $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ — mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Dowód. Niech $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ i $z_j = a_j + b_j$ dla $j = 1, 2, 3$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$. Wtedy $(z_1 + z_2) + z_3 = \big((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i\big) + (a_3 + b_3 i) = \big((a_1 + a_2) + a_3\big) + \big((b_1 + b_2) + b_3\big)i = \big(a_1 + (a_2 + a_3)\big) + \big(b_1 + (b_2 + b_3)\big)i = (a_1 + b_1 i) + \big((a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i\big) = z_1 + (z_2 + z_3)$, co kończy dowód łączności dodawania.

W taki sam sposób sprawdzić można, że zachodzą własności D2, D3, D4, M1, M3, M4, MD. Oznaczenia $0 = 0 + 0 \cdot i$ oraz $1 = 1 + 0 \cdot i$ są bardzo naturalne, co więcej zamiast pisać $a + 0 \cdot i$, będziemy pisać a.

Nie wymieniliśmy własości M3, bo dowód tej jest nieco inny. Niech $z = x + yi \neq 0$, $x, y \in \mathbb{R}$. Niech $w = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} \cdot i$. Wtedy $z \cdot w = (x + yi)\big(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} \cdot i\big) = \frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{-y^2}{x^2+y^2} + 0 \cdot i = 1$. Dowód został zakończony. ■

Uwaga 28.3 $\frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{x-yi}{x^2-(yi)^2} = \frac{x-yi}{x^2-y^2i^2} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}$ — ten rachunek wyjaśnia, jak znaleźliśmy $\frac{1}{z}$ w dowodzie poprzedniego twierdzenia. ■

Definicja 28.4 (części rzeczywistej i urojonej)
Liczby postaci bi, $b \in \mathbb{R}$ nazywać będziemy urojonymi. Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy częścią rzeczywistą liczby $z = a + bi$, piszemy $\operatorname{Re} z = a$; liczbę $b \in \mathbb{R}$ – częścią urojoną liczby $z = a + bi$, piszemy $\operatorname{Im} z = b$. ■

Dzięki tej definicji liczby rzeczywiste to szczególne liczby zespolone — „te w których nie ma i".

Definicja 28.5 (różnicy)
Dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2 istnieje dokładnie jedna liczba zespolona z taka, że $z_1 + z = z_2$. Nazywana jest różnicą liczb z_2 i z_1 i oznaczana symbolem $z_2 - z_1$. ■

Definicja 28.6 (ilorazu)
Dla dowolnych liczb zespolonych $z_1 \neq 0$ i z_2 istnieje dokładnie jedna liczba zespolona z taka, że $z_1 z = z_2$. Liczba ta zwana jest ilorazem liczb z_2 i z_1 i oznaczana symbolem $\frac{z_2}{z_1}$ lub z_2/z_1.

Wykazaliśmy wszystkie podstawowe własności działań. Oczywiście $0 \neq 1$. Wobec tego wszystkie wnioski dotyczące działań w zbiorze liczb rzeczywistych wyprowadzone z aksjomatów bez użycia tych, w których dowodach używana była nierówność, zachodzą w zbiorze liczb zespolonych. Np. zachodzą równości $1 \cdot z = z$, $0 \cdot z = 0$ i $0 + z = z$ dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$.

Liczby zespolone możemy więc dzielić:

$$\frac{c+di}{a+bi} = \frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{(c+di)(a-bi)}{a^2-(bi)^2} = \frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2-b^2i^2} = \\ = \frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2-b^2(-1)} = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}i\,.$$

Niestety, nie wszystko jest tak jak w przypadku liczb rzeczywistych. W zbiorze $\mathbb{C}$ nie można w sensowny sposób wprowadzić nierówności. Nadamy temu zdaniu postać twierdzenia, a następnie udowodnimy je.

Twierdzenie 28.7 (o nieistnieniu nierówności)
W zbiorze $\mathbb{C}$ nie istnieje relacja $\prec$ taka, że:
1. jeśli $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, to zachodzi dokładnie jedna z trzech możliwości: $\mathbf{z}_1 = z_2$ albo $z_1 \prec z_2$ albo $z_2 \prec z_1$;
2. jeśli $z_1 \prec z_2$ i $z_2 \prec z_3$, to $z_1 \prec z_3$;
3. jeśli $z_1 \prec z_2$ i $z \in \mathbb{C}$, to $z_1 + z \prec z_2 + z$;
4. jeśli $z_1 \prec z_2$ i $0 \prec z$, to $zz_1 \prec zz_2$.

Dowód. Załóżmy bowiem, że udało nam się w jakiś sposób zdefiniować nierówność $\prec$ w taki sposób, że spełnione są warunki 1 – 4. Wtedy kwadraty liczb różnych od 0 są dodatnie — to wywnioskowaliśmy z pewników, użytych do budowy teorii liczb rzeczywistych, a te wszystkie pewniki byłyby spełnione z tym że standardowa nierówność $<$ byłaby zastąpiona przez $\prec$. Mamy $1^2 = 1$ i $i^2 = -1$, zatem $0 \prec 1$ i jednocześnie $0 \prec -1$, zatem $0 \prec 1$ i $0 \prec -1$. Dodając te nierówności stronami otrzymujemy $0 \prec -1 \prec (-1) + 1 = 0$, co przeczy warunkowi 1. Dowód został zakończony. ■

Okazało się więc, że liczb zespolonych porównywać się nie da. Można oczywiście definiować jakieś nierówności między liczbami zespolonymi rezygnując z części warunków 1 – 4, ale nie są one użyteczne, więc mało kto to robi.

Liczby zespolone można traktować jako punkty płaszczyzny. Przyjmujemy, że część rzeczywista liczby zespolonej to pierwsza współrzędna (czyli pozioma), a część urojona to druga współrzędna (pionowa) punktu płaszczyzny. Przy takiej interpretacji suma $z_1 + z_2$ liczb zespolonych może być potraktowana jako koniec wektora, który jest sumą wektorów $\overrightarrow{0z_1}$ i $\overrightarrow{0z_2}$.

Definicja 28.8 (wartości bezwzględnej i argumentu)
Wartością bezwzględną $|z|$ liczby zespolonej $z = a+bi$ nazywamy liczbę $\sqrt{a^2+b^2}$, jej argumentem $\operatorname{Arg} z$ — dowolną taką liczbę φ, że $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ oraz $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. ■

Z definicji wynika, że $|z|$ to odległość punktu z od punktu 0, a argument liczby z, to kąt między wektorami $\overrightarrow{01}$ i $\overrightarrow{0z}$ mierzony „w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara".

Przykład 28.1 $\operatorname{Arg} 2 = 0$ lub $\operatorname{Arg} 2 = 2007\pi$, $\operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2}$ lub $\operatorname{Arg} i = -\frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{Arg}(-1+i) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$, $|2| = 2 = |-2| = |2i| = |-2i|$, $|1+i| = |-1+i| = |1-i| = |-1-i| = \sqrt{2}$. ■

Twierdzenie 28.9 (Nierówność trójkąta)
Nierówność $|z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ zachodzi dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2. Staje się ona równością jedynie wtedy, gdy punkty płaszczyzny odpowiadające liczbom $0, z_1, z_2$ leżą na jednej prostej, przy czym 0 nie leży między[28.4] z_1 i z_2. ■

Dowód. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a_1, b_1, a_2, b_2 zachodzi znana nam nierówność (wynika z nierówności Schwarza)

$$\sqrt{(a_1+a_2)^2 + (b_1+b_2)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2+b_1^2} + \sqrt{a_2^2+b_2^2},$$

staje się ona równością wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista $t \geqslant 0$ taka, że $z_1 = tz_2$ lub $z_2 = tz_1$.

Z równości $z = a+bi$, $r = |z|$, $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ oraz $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ wynika, że $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Zapisaliśmy liczbę z w *postaci trygonometrycznej.*

[28.4] nieostro, jedna z liczb z_1, z_2 może być zerem

Niech $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Wtedy
$z_1z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$
$= r_1r_2\big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)\big) =$
$= r_1r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big)$.

Wykazaliśmy w ten sposób, że wartość bezwzględna iloczynu dwu liczb zespolonych równa jest iloczynowi ich wartości bezwzględnych, a argument iloczynu dwu liczb zespolonych równy jest sumie ich argumentów. Stosując otrzymany wzór wielokrotnie otrzymujemy

Twierdzenie 28.10 (Wzór de Moivre'a)

$$\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n\big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big). \ \blacksquare$$

Z tego wzoru wynika, że dla każdej liczby zespolonej $w \neq 0$ i każdej liczby naturalnej n istnieje dokładnie n różnych liczb zespolonych z_1, $z_2,\ldots,z_n$ takich, że $z_j^n = w$ dla $j = 1,2,\ldots,n$. Załóżmy bowiem, że $w = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi)$. Z dwu równości $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ i $w = z^n$ wynikają następne $\varrho = r^n$ oraz $n\varphi = \psi + 2k\pi$ dla pewnej liczby całkowitej k. Wynika stąd, że $r = \sqrt[n]{\varrho}$, r jest więc wyznaczone jednoznacznie. Musi też być $\varphi = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$. Zastępując liczbę k liczbą $k+n$ zwiększamy kąt φ o 2π, co nie zmienia liczby z. Różne liczby z otrzymujemy przyjmując kolejno $k = 0$, $k = 1,\ldots,$ $k = n-1$. Otrzymujemy więc dokładnie n różnych wartości. Łatwo zauważyć, że odpowiadające im punkty płaszczyzny są wierzchołkami n–kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $r = \sqrt[n]{\varrho}$. Jeśli $w = 1$, to wśród tych liczb jest liczba 1.

Definicja 28.11 (pierwiastka algebraicznego z liczby zespolonej) Algebraicznym pierwiastkiem n–tego stopnia z liczby zespolonej w nazywamy każdą liczbę zespoloną z, dla której $w = z^n$. $\blacksquare$

Przykład 28.2 Pierwiastkami algebraicznymi stopnia 2 z liczby $1 = \cos 0 + i\sin 0$ są dwie liczby: $z_1 = \cos\frac{0\pi}{2} + i\sin\frac{0\pi}{2} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$ i $z_2 = \cos\frac{2\pi}{2} + i\sin\frac{2\pi}{2} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$. $\blacksquare$

Przykład 28.3 Pierwiastkami algebraicznymi stopnia 3 z liczby $1 = \cos 0 + i\sin 0$ są trzy liczby: $z_1 = \cos\frac{0\pi}{3} + i\sin\frac{0\pi}{3} = 1$,

$z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $z_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. ■

Przykład 28.4 Pierwiastkami algebraicznymi stopnia 3 z liczby $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ są trzy liczby:

$z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3} = -1$ oraz $z_3 = \cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. ■

Przykład 28.5 Ponieważ $\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = = \cos^2\alpha + 2i\cos\alpha\sin\alpha + i^2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2i\cos\alpha\sin\alpha$, części rzeczywiste są równe i części urojone są równe, więc zachodzą równości $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. ■

Przykład 28.6 Z równości: $\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 =$

$$= \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha + 3i^2\cos\alpha\sin^2\alpha + +i^3\sin^3\alpha =$$
$$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha + i\big(3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha\big)$$

wynika, że

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$
$$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Widzimy więc, że za pomocą liczb zespolonych można powiązać wzory na $\cos n\alpha$ i $\sin n\alpha$ z dwumianem Newtona.

Definicja 28.12 (sprzężenia)
Jeśli $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, to liczbę $\overline{z} = a - bi$ nazywamy sprzężoną do liczby z. ■

$\overline{2-3i} = 2 + 3i$, $\overline{13} = 13$, $\overline{i} = -i$. Liczba z jest rzeczywista wtedy i tylko wtedy, gdy $z = \overline{z}$. Jeśli $z \notin \mathbb{R}$, to $\overline{z} \in \mathbb{C}$ jest jedyną liczbą taką, że $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$ i jednocześnie $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$. Prosty dowód tego stwierdzenia Czytelnicy przeprowadzą samodzielnie.

Mamy też $z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$, $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\, z$ oraz $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}\, z$. Możemy więc napisać

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \qquad \text{i} \qquad \mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

Punkty płaszczyzny odpowiadające liczbom z i $\overline{z}$ są symetryczne względem osi rzeczywistej.

Przypomnijmy, że argument iloczynu dwu liczb zespolonych równy jest sumie argumentów składników. Jest to własność przypominające logarytm (logarytm iloczynu to suma logarytmów jego czynników). Logarytm to wykładnik potęgi. Zdefiniujemy teraz potęgę o podstawie e.

Definicja 28.13 (potęgi o wykładniku zespolonym)
$e^z = e^{x+iy} = e^x\big(\cos y + i\sin y\big)$ dla dowolnej liczby zespolonej $z = x+iy$, $x,y \in \mathbb{R}$. ■

Przykład 28.7 $e^{\pi i} = e^{0+\pi i} = e^0\big(\cos\pi + i\sin\pi\big) = -1$,
$e^{\ln 2+\pi i} = e^{\ln 2}\big(\cos\pi + i\sin\pi\big) = -2$,
$e^{\ln 2} = e^{\ln 2+0i} = e^{\ln 2}\big(\cos 0 + i\sin 0\big) = 2$. ■

Przykłady można mnożyć. Zauważmy, że jeśli $z = x+iy$, $w = u+iv$, gdzie $x,y,u,v \in \mathbb{R}$, to

$$e^{z+w} = e^{(x+u)+i(y+v)} = e^{x+u}\big(\cos(y+v) + i\sin(y+v)\big) =$$
$$= e^x e^u\big(\cos y + i\sin y\big)\big(\cos v + i\sin v\big) =$$
$$= e^x\big(\cos y + i\sin y\big)e^u\big(\cos v + i\sin v\big) = e^z e^w\,.$$

Widzimy więc, że właśnie zdefiniowanej potędze liczby e przysługuje podstawowa własność potęg. Definicję potęgi stopniowo rozszerzaliśmy: najpierw wykładniki były naturalne, potem całkowite i ujemne ujemnych, potem dowolne wymierne. Potęga o wykładniku rzeczywistym określiliśmy tak, by zachować monotoniczność i równość $e^{a+b} = e^a e^b$. Ponieważ zajmujemy się liczbami zespolonymi, więc nie można mówić o monotoniczności — w zbiorze liczb zespolonych nie ma nierówności. Zamiast monotoniczności można zażądać istnienia pochodnej w punkcie 0.

Definicja 28.14 (granicy funkcji)
Jeśli $h\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ jest funkcją określoną na zbiorze $G \subseteq \mathbb{C}$ i z_0 jest punktem skupienia zbioru G, to $\lim\limits_{z\to z_0} h(z) = g \in \mathbb{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{|z-z_0|\to 0}\big|h(z)-g\big| = 0$. ■

W ostatnim wyrażeniu liczby zespolone występują tylko pozornie[28.5], więc to ostatnie pojęcie nie jest nam obce. Ta definicja jest prostym uogólnieniem pojęcia granicy znanego z przypadku

[28.5] wartości bezwzględne są liczbami rzeczywistymi!

rzeczywistego — chodzi o to, że jeśli odległość między z i z_0 jest dostatecznie mała, to odległość między $h(z)$ i g też jest mała.

Zaczniemy od podania zespolonych wersji kilku znanych definicji i twierdzeń o granicach ciągów.

Definicja 28.15 (granicy ciągu)
$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$. ■

Stwierdzenie 28.16 Jeśli $z_n = x_n + y_n i$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, $g = x + yi$, $x, y, \in \mathbb{R}$, to $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Dowód. Mamy $|z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \geqslant |x_n - y|$ i $|z_n - z| \geqslant |y_n - y|$, więc jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$, to również $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n - y| = 0$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Jeśli natomiast $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ i $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, to $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = 0$, a to oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$. ■

Twierdzenie 28.17 Ciąg (z_n) ma granicę skończoną wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_\varepsilon \in \mathbb{N}} \forall_{k,\ell>n_\varepsilon} |z_k - z_\ell| < \varepsilon \,. \tag{wC}$$

Dowód. Jeśli $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$, to ciąg (z_n) spełnia (wC), bowiem $|z_k - z_\ell| \leqslant |z_k - z| + |z - z_\ell|$.

Jeśli ciąg (z_n) spełnia (wC), to ciągi (x_n) i (y_n) też spełniają (wC), bo $|x_k - x_\ell| \leqslant |z_k - z_\ell|$ i $|y_k - y_\ell| \leqslant |z_k - z_\ell|$. Są więc zbieżne, zatem ciąg (z_n) też jest zbieżny. ■

Twierdzenie 28.18 (Bolzano–Weierstrassa)
Z każdego ciągu ograniczonego (z_n), czyli takiego, że istnieje takie $M \geqslant 0$, że $|z_n| \leqslant M$ dla każdego n, można wybrać podciąg zbieżny.

Dowód. Niech $z_n = x_n + y_n i$. Wtedy $|x_n| \leqslant M$ i $|y_n| \leqslant M$. Z ciągu (x_n) wybieramy podciąg zbieżny (x_{n_k}). Z ciągu (y_{n_k}) wybieramy podciąg zbieżny $(y_{n_{k_\ell}})$. Ciąg $(z_{n_{k_\ell}})$ jest zbieżny. ■

Lemat 28.19
Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot z_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (1+z_n)^n = 1$.

Dowód. Wykażemy, że zachodzi nierówność:
$$|(1+z)^n - 1| \leqslant (1+|z|)^n - 1$$
— korzystając z dwumianu Newtona i nierówności trójkąta:
$$|(1+z)^n - 1| = \left|1 + \tbinom{n}{1}z + \tbinom{n}{2}z^2 + \ldots + \tbinom{n}{n-1}z^{n-1} + z^n - 1\right| \leqslant$$
$$\leqslant \tbinom{n}{1}|z| + \tbinom{n}{2}|z|^2 + \ldots + \tbinom{n}{n-1}|z|^{n-1} + |z|^n = (1+|z|)^n - 1\,.$$
Ponieważ założyliśmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot z_n = 0$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot |z_n| = 0.$
Jeśli $n|z_n| < 1$, to $1 \leqslant (1+|z_n|)^n \leqslant e^{n|z_n|} \leqslant \frac{1}{1-n|z_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$
więc $\lim\limits_{n\to\infty} (1+|z_n|)^n - 1 = 0$. Z nierówności $|(1+z_n)^n - 1| \leqslant$ $\leqslant (1+|z_n|)^n - 1$ wynika więc, że $\lim\limits_{n\to\infty} (1+z_n)^n = 1$. ■

Teraz czeka nas dowód istnienia granicy $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{z}{n})^n$. Musi on się różnić od dowodu w przypadku rzeczywistym, bo o żadnej monotoniczności tym razem mówić nie możemy, bo w zbiorze $\mathbb{C}$ nie ma nierówności. Nie wskazujemy granicy, więc zastosujemy twierdzenie Cauchy'ego, według którego ciąg liczbowy spełniający warunek Cauchy'ego ma granicę skończoną.

Lemat 28.20 (o zbieżności ciągu $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{z}{n})^n$)

Ciąg $\left((1+\frac{z}{n})^n\right)$ spełnia warunek Cauchy'ego, więc jest zbieżny.

Dowód. Zauważmy najpierw, że jeśli $n > m \geqslant k \geqslant 0$, to $\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} < \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$ .Wynika to natychmiast z tego, że
$\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{m^k k!} = \left(1-\frac{1}{m}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{m}\right)\frac{1}{k!} <$
$< \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!} = \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$. Mamy zatem
$$\left|\left(1+\tfrac{z}{n}\right)^n - \left(1+\tfrac{z}{m}\right)^m\right| =$$
$$= \Bigg|1 + \tbinom{n}{1}\tfrac{z}{n} + \tbinom{n}{2}\left(\tfrac{z}{n}\right)^2 + \ldots + \tbinom{n}{n-1}\left(\tfrac{z}{n}\right)^{n-1} + \left(\tfrac{z}{n}\right)^n -$$
$$-\left(1 + \tbinom{m}{1}\tfrac{z}{m} + \tbinom{m}{2}\left(\tfrac{z}{m}\right)^2 + \ldots + \tbinom{m}{m-1}\left(\tfrac{z}{m}\right)^{m-1} + \left(\tfrac{z}{m}\right)^m\right)\Bigg| \leqslant$$
$$\leqslant [1-1] + \left[\tbinom{n}{1}\tfrac{1}{n} - \tbinom{m}{1}\tfrac{1}{m}\right]|z| + \left[\tbinom{n}{2}\tfrac{1}{n^2} - \tbinom{m}{2}\tfrac{1}{m^2}\right]|z|^2 + \ldots +$$
$$+\left[\tbinom{n}{m}\tfrac{1}{n^m} - \tbinom{m}{m}\tfrac{1}{m^m}\right]|z|^m + \tbinom{n}{m+1}\tfrac{1}{n^{m+1}}|z|^{m+1} + \ldots +$$
$$+\tbinom{n}{n-1}\tfrac{1}{n^{n-1}}|z|^{n-1} + |z|^n = \left(1+\tfrac{|z|}{n}\right)^n - \left(1+\tfrac{|z|}{m}\right)^m.$$

Ponieważ ciąg $\left((1+\frac{|z|}{n})^n\right)$ jest zbieżny (liczba $|z|$ jest rzeczywista!), więc spełnia on warunek Cauchy'ego, wobec tego również ciąg $\left((1+\frac{z}{n})^n\right)$ spełnia warunek Cauchy'ego, bo odległości między wyrazami tego ostatniego nie przekraczają odległości odpowiednich wyrazów ciągu $\left((1+\frac{|z|}{n})^n\right)$. Lemat został dowiedziony. ■

Lemat 28.21
Jeśli $|z| \leqslant \frac{1}{10}$, to $\left|e^z - 1 - z\right| \leqslant 2|z|^2$.[28.6]

Dowód. Wiemy (przykład 18.4), że $1+x \leqslant e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$, gdy $x<1$, zatem $0 \leqslant e^x - 1 - x < \frac{x^2}{1-x}$, więc

$$\text{jeśli } x < \tfrac{1}{10}, \text{ to } 0 \leqslant e^x - 1 - x < \tfrac{10}{9}x^2 .$$

Dla każdej liczby $y \in \mathbb{R}$ mamy $0 \leqslant 1-\cos y = 2\sin^2 \frac{y}{2} \leqslant \frac{y^2}{2}$. Jeśli $0 \leqslant y < \frac{\pi}{2}$, to $\sin y \leqslant y \leqslant \operatorname{tg} y$, więc $y\cos y \leqslant y \leqslant \sin y$, zatem $0 \leqslant y - \sin y \leqslant y(1-\cos y) \leqslant \frac{y^3}{2}$. Jeśli więc $|y| < \frac{1}{10}$, to

$$\left|e^{iy} - 1 - iy\right| \leqslant |\cos y - 1| + |i\sin y - iy| \leqslant \tfrac{y^2}{2} + \tfrac{|y|^3}{2} \leqslant \tfrac{11}{20}y^2 .$$

Zachodzą nierówności $|x| \leqslant |x+iy| = |z|$, $|y| \leqslant |x+iy| = |z|$. Załóżmy, że $|z| \leqslant \frac{1}{10}$. Mamy wtedy

$$|e^z - 1 - z| = |e^x e^{iy} - 1 - (x+iy)| \leqslant$$
$$\leqslant |e^{iy}(e^x - 1 - x)| + |e^{iy} - 1 - iy| + |xe^{iy} - x| \leqslant$$
$$\leqslant \tfrac{10}{9}x^2 + \tfrac{11}{20}y^2 + |x|(|y| + \tfrac{11}{20}y^2) \leqslant \tfrac{10}{9}x^2 + \tfrac{11}{20}y^2 + \tfrac{1}{2}(x^2+y^2) + \tfrac{11}{200}y^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\tfrac{10}{9} + \tfrac{1}{2}\right)(x^2+y^2) \leqslant 2|z|^2 . \ ■$$

Wracamy do definiowania funkcji wykładniczej. Jej pochodną w punkcie 0 ma być granica $\lim\limits_{z\to 0} \frac{e^z - e^0}{z}$. Funkcja f ma być rozszerzeniem funkcji wykładniczej o podstawie e i wykładniku rzeczywistym. Jej pochodna w punkcie 0 powinna być równa pochodnej funkcji e^x w punkcie 0, czyli liczbie $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Twierdzenie 28.22 (charakteryzujące funkcję e^z)
Funkcja e^z jest jedyną funkcją $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ spełniającą są następujące dwa warunki

1° $f(z+w) = f(z)f(w)$ dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$ oraz

[28.6] Dalej x,y oznaczają liczby rzeczywiste oraz $z=x+iy$.

2° $\lim\limits_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=1$.

Dowód. Wcześniej wykazaliśmy, że warunek 1° jest spełniony. Udowodnimy, że funkcji e^z przysługuje własność 2°. Zachodzi nierówność $\left|\frac{e^z-1-z}{z}\right|\leqslant 2|z|$, więc $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1-z}{z}=0$, a to oznacza, że $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-e^0}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1$.

Załóżmy teraz, że funkcja f spełnia warunki 1° i 2°. Z warunku 1° wynika, że jeśli $f(z)=0$, to dla każdego $w\in\mathbb{C}$ zachodzi równość $0=f(z+w)$, więc jedyną wartością funkcji f jest liczba 0. To jest niemożliwe ze względu na warunek 2°. Wobec tego $f(z)\neq 0$ dla każdego $z\in\mathbb{C}$. Z równości $f(0)=f(0+0)= =f(0)f(0)$ i nierówności $f(0)\neq 0$ wynika, że $f(0)=1$.

Niech $w_n=\frac{f\left(\frac{z}{n}\right)-1}{\frac{z}{n}}=\frac{f(\frac{z}{n})-f(0)}{\frac{z}{n}}$. Z założenia wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}w_n=1$. Zachodzi również wzór $f\left(\frac{z}{n}\right)=1+w_n\frac{z}{n}$. Z własności 1° wynika, że $f(z)=\left(f(\frac{z}{n})\right)^n=\left(1+w_n\frac{z}{n}\right)^n$. Z lematu 28.19 i równości $\lim\limits_{n\to\infty}n\frac{(w_n-1)\frac{z}{n}}{1+\frac{z}{n}}=0$ wynika następny wzór
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+w_n\frac{z}{n}}{1+\frac{z}{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(w_n-1)\frac{z}{n}}{1+\frac{z}{n}}\right)^n=1.$$ Stąd wynika, że $f(z)=\left(1+w_n\frac{z}{n}\right)^n=\left(\frac{1+w_n\frac{z}{n}}{1+\frac{z}{n}}\right)^n\cdot\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$, więc zachodzi równość $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$. Udowodniliśmy jednoznaczność funkcji f. ■

Wniosek 28.23
Dla dowolnych liczb rzeczywistych x,y zachodzi równość
$$e^x(\cos y+i\sin y)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\cos y+i\sin y}{n}\right)^n.$$ ■

Z tego, że $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1$ wynika, że $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^{w+z}-e^w}{z}=e^w$ dla każdej liczby zespolonej w. Zwykle tę ostatnią równość z oczywistych przyczyn zapisujemy jako $(e^w)'=e^w$.

Rozszerzając więc dziedzinę funkcji wykładniczej otrzymaliśmy funkcję, która z formalnego punktu widzenia ma własności podobne do funkcji wykładniczej w dziedzinie rzeczywistej. Są jednak istotne różnice. Nie możemy wgłębiać się w nie z braku miejsca, ale na jedną rzecz zwrócimy uwagę. Funkcja wykładnicza o podstawie e i wykładniku *rzeczywistym* jest ściśle rosnąca: jeśli $x_1 < x_2$, to $e^{x_1} < e^{x_2}$. Z funkcją wykładniczą e^z jest inaczej. Mamy $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$, zatem dla każdego $z \in \mathbb{C}$ zachodzi równość $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$. Funkcja wykładnicza w dziedzinie zespolonej jest więc okresowa, jej okresem jest $2\pi i$ — liczba czysto urojona.

Jej wartościami są wszystkie liczby zespolone (w tym rzeczywiste) z jednym wyjątkiem: $0 \neq e^z$ dla $z \in \mathbb{C}$. Wynika to natychmiast z tego, że każdą liczbę dodatnią $r = |w|$ można zapisać w postaci e^x, $x \in \mathbb{R}$. Wystarczy przyjąć $x = \ln r$ (jest to jedyny wybór). Następnie przyjmujemy $y = \mathrm{Arg}\, w$ i otrzymujemy równość $w = e^z$, gdzie $z = x + iy = \ln|w| + i\mathrm{Arg}\, w$.

Piszemy wtedy $z = \ln w$. Trzeba jednak pamiętać o tym, że w dziedzinie zespolonej symbol $\ln w$ może oznaczać dowolną z nieskończenie wielu liczb z, dla których zachodzi równość $w = e^z$. Można więc napisać $\ln(-1) = \pi i$ albo $\ln(-1) = -5\pi i$ itp.

Wykażemy ważne twierdzenie sformułowane już w 1608 r., które próbowało dowieść wielu ludzi (d'Alembert, Euler, Gauss, Lagrange, Laplace i wielu innych). Dziś chyba przeważa pogląd, że pierwszy poprawny dowód został napisamy przez J–R Arganda w 1806 r. i poprawiony siedem lat później. W dowodach wielu czołowych matematyków znajdowano różne luki.

Twierdzenie 28.24 (Zasadnicze twierdzenie algebry) Każdy wielomian o współczynnikach zespolonych, stopnia większego (ostro) od 0, ma co najmniej jeden pierwiastek zespolony.

Dowód. Niech $w(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, przy czym $n \geqslant 1$ i $a_n \neq 0$. Istnieje taka liczba $r > 0$, że jeśli $|z| \geqslant r$, to $|w(z)| > |a_0| = |w(0)|$, np. $r = 2 + \frac{2|a_0|+|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_{n-1}|}{|a_n|}$. Jeśli bowiem $|z| \geqslant r$, to $|z| \geqslant 2 > 1$ i wobec tego

$$|w(z)| = |a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n| \geqslant$$
$$\geqslant |a_n z^n| - |a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}| \geqslant$$
$$\geqslant |a_n||z|^n - \big(|a_0| + |a_1||z| + \ldots + |a_{n-1}||z|^{n-1}|\big) \geqslant$$
$$\geqslant |a_n||z|^n - |z|^{n-1}\big(|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}||\big) =$$

$= |z|^{n-1}\Big(|a_n||z| - \big(|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|\Big) >$

$> \big((2|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|) - (|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|)\big) = |a_0|$.

Z twierdzenia Bolzano–Weierstrassa wynika, że z ciągu liczb zespolonych (z_n) o modułach nieprzekraczających r można wybrać podciąg zbieżny do pewnej granicy g i wtedy oczywiście $|g| \leqslant r|$. Jeśli $m = \inf\{|w(z): \ |z| \leqslant r\}$, to istnieje taki ciąg (z_n), że $\lim\limits_{n\to\infty} |w(z_n)| = m$. Niech $z_0 = \lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k}$. Oczywiście $|z_0| \leqslant r$ oraz $|w(z_0)| = \lim\limits_{k\to\infty} |w(z_{n_k})| = m$. Jeśli $|z| \leqslant r$, to $|w(z_0)| \leqslant |w(z)|$, czyli $|w(z_0)|$ jest najmniejszą wartością funkcji $|w|$ w kole o promieniu r i środku w punkcie 0. W szczególności $|w(z_0)| \leqslant |w(0)| = |a_0|$ i wobec tego również dla $|z| \geqslant r$ zachodzi nierówność $|w(z)| \geqslant |a_0| \geqslant |w(z_0)|$. Oznacza to, że $|w(z_0)|$ jest najmniejszą wartością funkcji $|w|$ w *całej* płaszczyźnie.

Wykażemy, że $w(z_0) = 0$. Przyjmijmy, że $z = z_0 + h$. Wtedy piszemy $w(z) = w(z_0+h) = b_0 + b_1h + b_2h^2 + \ldots + b_nh^n$, gdzie $b_0 = = a_0 + a_1z_0 + \ldots + a_nz_0^n = w(z_0)$, $b_1 = a_1 + 2a_2z_0 + \ldots + na_nz_0^{n-1} = = w'(z_0)$, $\ldots$, $b_n = a_n = \frac{1}{n!}w^{(n)}(z_0)$. Ponieważ stopień wielomianu równy jest n, więc $0 \neq a_n = b_n$. Niech $m \geqslant 1$ będzie najmniejszą taką liczbą, że $b_m \neq 0$. Załóżmy, że $w(z_0) \neq 0$.

Wtedy można napisać $w(z_0) = b_0 = |b_0| \cdot e^{i\varphi}$ dla pewnego $\varphi \in \mathbb{R}$. Mamy dalej $|w(z)| = |b_0 + b_mh^m + b_{m+1}h^{m+1} + \ldots + b_nh^n|$. Niech $\varrho < 1$ będzie liczbą dodatnią mniejszą niż $\frac{1}{2}|b_0|$ i niech $h = \varrho \cdot e^{i\frac{\varphi+\pi}{m}}$. Wtedy $\big|b_0 + b_mh^m\big| = \big||b_0| \cdot e^{i\varphi} + \varrho^m e^{i(\varphi+\pi)}\big| = \big||b_0|e^{i\varphi} - \varrho^m e^{i\varphi}\big| = \big||b_0| - \varrho^m\big|\big|e^{i\varphi}\big| = |b_0| - \varrho^m$. Załóżmy dodatkowo, że $\varrho\big(|b_{m+1}| + |b_{m+2}| + \ldots + |b_n|\big) < \frac{1}{2}$ (wybieramy małe $\varrho > 0$). Wtedy

$|w(z)| = \big|b_0 + b_mh^m + b_{m+1}h^{m+1} + \ldots + b_nh^n\big| \leqslant$

$\leqslant \big|b_0 + b_mh^m\big| + \big|b_{m+1}h^{m+1} + \ldots + b_nh^n\big| =$

$= |b_0| - \varrho^m + \big|b_{m+1}h^{m+1} + \ldots + b_nh^n\big| \leqslant$

$\leqslant |b_0| - \varrho^m + \big(|b_{m+1}||h|^{m+1} + \ldots + |b_n||h|^n\big) \leqslant$

$\leqslant |b_0| - \varrho^m + |h|^{m+1}\big(|b_{m+1}| + \ldots + |b_n|\big) =$

$= |b_0| - \varrho^m + \varrho^{m+1}\big(|b_{m+1}| + \ldots + |b_n|\big) \leqslant$

$\leqslant |b_0| - \varrho^m + \frac{1}{2}\varrho^m = |b_0| - \frac{1}{2}\varrho^m < |b_0|$.

Okazało się, że wbrew założeniu $|w(z_0)| = |b_0|$ *nie* jest najmniejszą wartością funkcji $|w|$. To kończy dowód tego, że $w(z_0) = 0$. Twierdzenie zostało więc wykazane. ■

Wniosek z zasadniczego twierdzenia algebry

Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych, którego stopień jest dodatni, może być przedstawiony w postaci iloczynu wielomianów rzeczywistych stopnia pierwszego i drugiego.

Dowód. Jeśli współczynniki wielomianu w są rzeczywiste, to $\overline{w(z)} = w(\overline{z})$ — prosty dowód tej równości pozostawiamy Czytelnikowi. Z tej równości wynika, że jeśli liczba zespolona z_0 jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych, to liczba zespolona $\overline{z_0}$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu. Wobec tego jeśli $z_0 \notin \mathbb{R}$, to wielomian w jest podzielny przez wielomian $(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - (z_0 + \overline{z_0})z + |z_0|^2$. Współczynniki tego wielomianu są rzeczywiste, więc w ten sposób sprowadzamy problem do wielomianu stopnia o 2 mniejszego od w.

Jeśli z_0 jest liczbą rzeczywistą, to wielomian w jest podzielny przez wielomian $z - z_0$, więc w tym przypadku redukujemy problem do wielomianu stopnia o 1 mniejszego od w.

Załóżmy, że twierdzenie nie jest prawdziwe. Niech w będzie wielomianem *najmniejszego* stopnia, dla którego teza nie zachodzi. Po podzieleniu go przez wielomian stopnia 1 lub 2 otrzymujemy wielomian stopnia mniejszego, więc iloczyn wielomianów stopnia pierwszego i drugiego o współczynnikach rzeczywistych, co oznacza, że wielomian w też jest iloczynem takiego typu, wbrew naszemu założeniu. Dowód został zakończony. ■

Zadania

1. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

a. $z^2 + 4z + 5 = 0$; **b.** $z + \frac{1}{z} = 0$;

c. $z^2 - \bar{z}^2 = 0$; **d.** $z^2 = z$;

e. $z^{2004} = z$; **f.** $e^z = 1$;

g. $e^z = -1$; **h.** $z^2 - (5 + 5i)z + 13i = 0$;

i. $e^z = i$; **j.** $z^2 + (2 + 3i)z - 5 + 5i = 0$;

k. $z^4 + 5z^2 + 9 = 0$; **l.** $z^4 + 8z^3 + 16z^2 + 9 = 0$;

ł. $|z + i| + |z - i| = 2$; **m.** $|z + i| + |z - i| = \sqrt{5}$;

o. $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$; **p.** $\overline{z} = z^3$;
q. $z^8 - 15z^4 - 16 = 0$; **r.** $\overline{z} = -z^2$;
s. $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$; **t.** $\overline{z} = z^3$;
u. $z^6 + 2^6 = 0$; **v.** $z^6 - 2^6 = 0$;
w. $z\overline{z} + z - \overline{z} = 3 + 2i$ **x.** $z^4 + z^3 - z^2 + z + 1 = 0$.

2. Znaleźć liczby rzeczywiste x, y, dla których
a. $(5 - 8i)x + (7 + 3i)y = 2 - i$;
b. $(7 + 2i)x - (5 - 4i)y = -1 - i$

3. Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczby zespolone
a. $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, **b.** $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, **c.** $1 - i\sqrt{3}$

4. Obliczyć $\sqrt{3 - 4i}$, $\sqrt{-3 - 4i}$, $\sqrt{1 - i\sqrt{3}}$.

5. Obliczyć iloraz liczb $(1 + i)^n$ i $(1 - i)^{n-2}$, $n \in \mathbb{N}$.

6. Z wzoru na sumę pierwszych n wyrazów ciągu geometrycznego wyprowadzić wzór na sumę: $\sin\varphi + \sin(2\varphi) + \ldots + \sin n\varphi$ oraz na sumę $\cos\varphi + \cos(2\varphi) + \ldots + \cos(n\varphi)$.

7. Obliczyć sumę $\cos^2\varphi + \cos^2(2\varphi) + \ldots + \cos^2(n\varphi)$.

8. Obliczyć sumę $\binom{n}{1}\cos\varphi + \binom{n}{2}\cos(2\varphi) + \ldots + \binom{n}{n}\cos(n\varphi)$.

9. Dowieść, że $\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}$.

10. Obliczyć sumę $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \binom{n}{9} + \ldots$.

11. Obliczyć sumę $\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \binom{n}{10} + \ldots$.

12. Znaleźć sumę pięćdziesiątych potęg długości wszystkich boków i przekątnych stukąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1.

13. Udowodnić, że suma kwadratów długości wszystkich boków i przekątnych n–kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 jest równa n^2.

14. Udowodnić, że suma kwadratów długości wszystkich boków i przekątnych n–kąta foremnego opisanego na okręgu o promieniu 1 jest równa $n \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$.

15. Udowodnić, że iloczyn kwadratów długości wszystkich boków i przekątnych n–kąta foremnego opisanego na okręgu o promieniu 1 jest równa $\sqrt{n^n}$.

16. $\bar{z}$ to punkt symetryczny do punktu z względem osi rzeczywistej. Znaleźć punkty symetryczne do punktu z względem

a. osi urojonej, **b.** prostej o równaniu $y = x$,

c. prostej: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, **d.** prostej: $y = \sqrt{3}x$.

17. a. Znaleźć zbiór X złożony z tych wszystkich liczb zespolonych z, dla których zachodzi równość $\bar{z}\cdot z\cdot|z|+|z^3+1| = 1$. Narysować X na płaszczyźnie.

b. Znaleźć zbiór X złożony z tych wszystkich liczb zespolonych z, dla których zachodzi równość $\bar{z}\cdot z\cdot|z|+|z^3-i| = 1$. Narysować X na płaszczyźnie.

18. Niech L oznacza zbiór złożony ze wszystkich liczb zespolonych z, dla których zachodzi równość

(a) $iz = \overline{z}$ (b) $-iz = \overline{z}$.

Naszkicować zbiór L na płaszczyźnie. Opisać za pomocą równania zbiór M powstały w wyniku obrócenia L o 45° zgodnie z ruchem wskazówek zegara wokół punktu $\mathbf{0} = (0,0)$.

19. Wykazać, że jeśli $ad \neq bc$, to funkcja postaci $\frac{az+b}{cz+d}$ przekształca zbiór $\mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$ na zbiór $\mathbb{C}\setminus\{-\frac{a}{c}\}$, jest różnowartościowa, $\lim\limits_{z\to -d/c}\left|\frac{az+b}{cz+d}\right| = \infty$, $\lim\limits_{z\to\infty}\left|\frac{az+b}{cz+d}\right| = \frac{a}{c}$.

Definicja 28.25 (homografii)

Jeśli $ad \neq bc$ i $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ dla $z \neq -\frac{d}{c}$ oraz $h\big(-\frac{d}{c}\big) = \infty$ i $h(\infty) = \frac{a}{c}$, to funkcję $h\colon \mathbb{C}\cup\{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ nazywamy homografią.[28.7] ■

20. Udowodnić, że jeśli h jest homografią, L — prostą, to zbiór $h\big(L\cup\{\infty\}\big)$ jest okręgiem lub prostą uzupełnioną jednym punktem ∞. Jak wyglądają obrazy okręgów?

21. Udowodnić, że homografia h przekształca górną półpłaszczyznę: $\{z\colon\ \operatorname{Im} z > 0\}\cup\{\infty\}$ na siebie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie liczby rzeczywiste a,b,c,d, że $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ i $ad-bc > 0$.

22. Dowieść, że homografia h przekształca koło $\{z\colon\ |z| < 1\}$ na siebie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie liczby $\varphi\in\mathbb{R}$ i $z_0\in\mathbb{C}$, że $|z_0| < 1$ oraz $h(z) = e^{i\varphi}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$.

28.7 ∞ to sztucznie dodany punkt, nie wprowadzamy punktu $-\infty$, bo nie ma nierówności.

SKOROWIDZ

Achilles .... 123 R: 15
aksjomat .... 34, 51 R: 4, 8
algorytm Euklidesa .... 67 , 71, 105 R: 9,12
algorytm Hornera .... 99 R: 12
alternatywa .... 29, 30 R: 4
Archimedes .... 463, 465, 484,490 R: 27
argument funkcji .... 45 R: 7
argument liczby zespolonej .... 504 R: 28
asymptota pionowa .... 384 R: 23
asymptota pozioma .... 384 R: 23
asymptota ukośna .... 384 R: 23
asymptotyczne kryterium porównawcze .... 179 R: 16
Bernoulli Jakub .... 456 R: 26
Bernoulli, Jan .... 398 R: 24
Besicovitch, A.S. .... 434 R: 25
Briggs, Henry .... 256 R: 18
całka nieoznaczona .... 462 R: 27
całka oznaczona .... 464 R: 27
całkowanie .... 462 R: 27
Cauchy'ego definicja granicy .... 202 R: 17
charakteryzacja funkcji e^z .... 510 R: 28
charakteryzacja liczb pierwszych .... 70 R: 9
charakteryzacja monotonicznych f. ciągłych .... 224 R: 17
ciąg ściśle malejący .... 126 R: 15
ciąg ściśle rosnący .... 126 R: 15
ciąg (definicja) .... 122 R: 15
ciąg arytmetyczny .... 125 R: 15
ciąg Cauchy'ego .... 151 R: 15
ciąg funkcyjny .... 310 R: 20
ciąg geometryczny .... 125 R: 15
ciąg malejący .... 126 R: 15
ciąg monotoniczny .... 126 R: 15
ciąg niemalejący .... 126 R: 15
ciąg nieograniczony .... 127 R: 15
ciąg nierosnący .... 126 R: 15
ciąg ograniczony .... 127 R: 15

ciąg ograniczony z dołu . . . 127 R: 15
ciąg ograniczony z góry . . . 127 R: 15
ciąg rosnący . . . 126 R: 15
ciąg szybko zbieżny . . . 132 R: 15
cyfry . . . 55 167 168 R: 8, 16
część rzeczywista . . . 502 R: 28
część urojona . . . 502 R: 28
część wspólna zbiorów . . . 37 R: 5
czynnik pH . . . 257 R: 18
długość łuku okręgu . . . 273 R: 19
długość łuku paraboli . . . 487 R: 27
długość półokręgu . . . 488 R: 27
długość wykresu funkcji . . . 485 R: 27
Davenport Harold . . . 71 R: 9
definicja asymptoty . . . 383 R: 23
definicja elipsy . . . 90 R: 11
definicja funkcji ściśle wklęsłej . . . 230 R: 17
definicja funkcji ściśle wypukłej . . . 230 R: 17
definicja funkcji analitycznej . . . 440 R: 26
definicja funkcji arcsin i arctg . . . 353 R: 22
definicja funkcji ciągłej . . . 214 R: 17
definicja funkcji okresowej . . . 288 R: 19
definicja funkcji wklęsłej . . . 230 R: 17
definicja funkcji wypukłej . . . 229 R: 17
definicja granicy (otoczeniowa) . . . 201 R: 17
definicja granicy funkcji w punkcie . . . 202, 507 R: 17
definicja Heinego . . . 206 R: 17
definicja hiperboli . . . 90 R: 11
definicja iloczynu skalarnego . . . 277 R: 19
definicja jednostajnej zbieżności . . . 312 R: 20
definicja kąta między krzywymi . . . 335 R: 21
definicja kosinusa i sinusa . . . 283 R: 19
definicja liczby pi . . . 287 R: 19
definicja lokalnego ekstremum . . . 381 R: 23
definicja miary kątów zorientowanych . . . 281 R: 19
definicja pochodnej . . . 336 R: 22
definicja pochodnej wyższego rzędu . . . 404 R: 24
definicja podciągu . . . 140 R: 15

definicja punktowej zbieżności . . . . 310 R: 20
definicja punktu przegięcia . . . . 382 R: 23
definicja różniczki funkcji . . . . 337, 344 R: 22
definicja różniczkowalności . . . . 337, 344 R: 22
definicja stycznej . . . . 337 R: 22
definicja tangensa i kotangensa . . . . 293 R: 19
definicje . . . . 34 R: 4
dla dostatecznie dużych . . . . 129 R: 15
domknięcie zbioru . . . . 241 R: 17
domknięta prosta . . . . 155 R: 15
dopełnienie dopełnienia . . . . 38 R: 5
dostatecznie bliski . . . . 210 R: 17
dowód indukcyjny . . . . 12 R: 1
dowód nie wprost . . . . 33 R: 4
drugie kryterium porównawcze . . . . 179 R: 16
dwumian Newtona . . . . 24, 192, 193 R: 2, 16
działania . . . . 51 R: 8
działania z użyciem symboli $\pm\infty$ . . . . 132 R: 15
dziedzina funkcji . . . . 45 R: 7
dzielenie wielomianów . . . . 98, 99 R: 12
dzielenie z resztą . . . . 66, 102 R: 9, 12
dzielnik . . . . 65 R: 9
element neutralny dodawania . . . . 52 R: 8
element neutralny mnożenia . . . . 53 R: 8
elementy zbioru . . . . 18 R: 2
Exp(x) . . . . 252 R: 18
exp(x) . . . . ’216, 217, 252 R: 17, 18
Fermat . . . . 336 R: 22
Fibonacci . . . . 125 R: 15
funkcja . . . . 45, 49 R: 7, 7
funkcja ,,na” . . . . 47 R: 7
funkcja ściśle malejąca . . . . 81 R: 10
funkcja ściśle monotoniczna . . . . 81 R: 10
funkcja ściśle rosnąca . . . . 81 R: 10
funkcja całkowalna w sensie Riemanna . . . . 479 R: 27
funkcja ciągła nigdzie nieróżniczkowalna . . . . 433 R: 25
funkcja Dirichleta . . . . 80, 208, 212, 215, 317 R: 10
funkcja jednostajnie ciągła . . . . 225, 226 R: 17
funkcja liczbowa . . . . 79 R: 10

funkcja malejąca . . . 81 R: 10
funkcja monotoniczna . . . 81 R: 10
funkcja niemalejąca . . . 81 R: 10
funkcja nieparzysta . . . 284 R: 19
funkcja nierosnąca . . . 81 R: 10
funkcja odwrotna . . . 47, 84 R: 7, 10
funkcja ograniczona . . . 80 R: 10
funkcja parzysta . . . 284 R: 19
funkcja pierwiastek kwadratowy . . . 79 R: 10
funkcja pierwiastek trzeciego stopnia . . . 79 R: 10
funkcja pierwotna . . . 462 R: 27
funkcja potęgowa . . . 261 R: 18
funkcja przedziałami liniowa . . . 318 R: 20
funkcja różnowartościowa . . . 47 R: 7
funkcja Riemanna . . . 208, 215 R: 17
funkcja rosnąca . . . 81 R: 10
funkcja symetryczna . . . 113 R: 13
funkcja wykładnicza . . . 252 R: 18
funkcja wymierna . . . 106 R: 12
funkcje wypukłe . . . 377 R: 23
gradus . . . 282 R: 19
granica ciągu . . . 128 R: 15
granica ciągu zespolonego . . . 508 R: 28
granica funkcji zespolonej . . . 507 R: 28
granica górna . . . 437 R: 26
granica lewostronna . . . 211 R: 17
granica prawostronna . . . 211 R: 17
homografia . . . 516 R: 28
identyczność . . . 46 R: 7
iloczyn ciągów . . . 126 R: 15
iloczyn kartezjański zbiorów . . . 37 R: 5
iloczyn szeregów . . . 190 R: 16
iloczyn zbiorów . . . 37 R: 5
iloraz . . . 54, 66 R: 8, 9
iloraz ciągów . . . 126 R: 15
iloraz ciągów . . . 126 R: 15
iloraz ciągu geometrycznego . . . 125 R: 15
iloraz liczb zespolonych . . . 503 R: 28
iloraz różnicowy . . . 237 R: 17

iloraz wielomianów . . . . 96 R: 12
implikacja . . . . 29, 30 R: 4
istnienie rozkładu na czynniki pierwsze . . . . 69-70 R: 9
izometrie płaszczyzny . . . . 307-309 R: 19
jednoznaczność granicy . . . . 134 R: 15
k-elementowe podzbiory . . . . 22 R: 3
kąt dodatni . . . . 273 R: 19
kąt ujemny . . . . 273 R: 19
kąt zorientowany . . . . 273 R: 19
kierownica paraboli . . . . 93 R: 11
klasy abstrakcji . . . . 44 R: 7
kombinacja wypukła . . . . 229 R: 17
koniunkcja . . . . 29 R: 4
kosinus . . . . 273, 496 R: 19, 27
kosinus hiperboliczny . . . . 269, 496 R: 18, 27
kosinus różnicy . . . . 276, 311 R: 19, 20
kosinus sumy . . . . 276 R: 19
koty . . . . 15 R: 1
kres dolny . . . . 117 R: 14
kres górny . . . . 117 R: 14
krok indukcyjny . . . . 12 R: 1
krotność pierwiastka . . . . 104 R: 12
kryterium Abela — Dirchleta . . . . 186 R: 16
kryterium Cauchy'ego o zagęszczaniu . . . . 182 R: 16
kryterium ilorazowe d'Alemberta . . . . 180 R: 16
kryterium Leibniza . . . . 187 R: 16
kryterium pierwiastkowe Cauchy'ego . . . . 181, 438 R: 16, 26
kryterium porównawcze . . . . 178 R: 16
kryterium Weierstrassa zbieżn. jednostajnej . . . . 316 R: 20
kula otwarta . . . . 155 R: 15
kwadrat liczby . . . . 55 R: 8
kwantyfikator duży (ogólny) . . . . 41 R: 6
kwantyfikator mały (szczegółowy) . . . . 41 R: 6
Lambert . . . . 288 R: 19
Leibniz . . . . 336 R: 22
lemat Gaussa . . . . 104 R: 12
lemat o dużej zmianie kolejności sumowania . . . . 441 R: 26
lemat o funkcjach ściśle przylegających . . . . 411 R: 24
lem. o ist. granicy ilorazu różnic. (sinusa) . . . . 292 R: 19

lemat o pochodnej funkcji potęgowej 263	R:	18
lemat o przedłużaniu funkcji ciągłej 219	R:	17
lem. o przybliżaniu f. przedziałami liniowymi . . . 319	R:	20
lemat o symetrii 279	R:	19
lemat o zachowaniu iloczynu skalarnego 277	R:	19
Leonardo z Pizy 125	R:	15
liczba e 144	R:	15
liczba i 501	R:	28
liczba odwrotna 52	R:	8
liczba pi 274, 403	R:	19, 24
liczba pierwsza 69	R:	9
liczba przeciwna 51, 53	R:	8, 8
liczba złożona 69	R:	9
liczby Bernoulliego 456, 459	R:	26
liczby całkowite 63	R:	9
liczby naturalne 51, 61	R:	8, 9
liczby niewymierne 51	R:	8
liczby przestępne 158	R:	15
liczby rzeczywiste 51	R:	8
liczby ujemne 51	R:	8
liczby wymierne 51,72,73	R:	8, 9
liczby względnie pierwsze 66	R:	9
liczby zespolone 500	R:	28
Lindemann 288	R:	19
Liouville 158	R:	15
logarytm 278	R:	19
logarytm dziesiętny 266	R:	18
logarytm naturalny 257	R:	18
logarytm zespolony 512	R:	28
lub 29, 30	R:	4
ma(a,b) 57	R:	8
metoda Newtona 388	R:	23
metryka 155	R:	15
miara kąta 273	R:	19
min(a,b) 57	R:	8
moduł 56	R:	8
najmniejszy ze zbiorów 59	R:	9
największy wspólny dzielnik 66	R:	9
największy wspólny dzielnik 100	R:	12

najwolniej rozbieżny szereg....................195 R: 16
najwolniej zbieżny szereg......................195 R: 16
Napier, John...................................256 R: 18
następnik implikacji............................29 R: 4
negacja...31 R: 4
Newton...............336, 464, 478, 486, 506, 508 R: 22, 27, 28
Nibylandia.....................................324 R: 20
nierówność Bernoulli'ego........................14 R: 1
nierówność Bernulli'ego uogólniona.............264 R: 18
nierówność Czebyszewa..........................323 R: 20
nierówność Höldera.............................266 R: 18
nierówność Jensena.............................232 R: 17
nierówność Minkowskiego........................272 R: 18
nierówność Schwarza............................235 R: 17
nierówność trójkąta.............................56 R: 8
nierówność trójkąta............................504 R: 28
nieskończoność.............................79, 128 R: 10, 15
niewymierność liczby pi...................288, 498 R: 19, 27
Niven..498 R: 27
oś OX (oś pozioma)..............................83 R: 10
oś OY (oś pionowa)..............................83 R: 10
oś symetrii paraboli............................86 R: 11
objętość -obliczanie...........................482 R: 27
objętość kuli..................................484 R: 27
objętość stożka o podstawie B..................484 R: 27
objętość torusa................................485 R: 27
obliczanie pierwiastka kwadratowego............131 R: 15
obrót..274 R: 19
obraz punktu....................................45 R: 7
ognisko paraboli................................93 R: 11
ograniczenie dolne,ograniczenie górne..........117 R: 14
ograniczoność funkcji jednostajnie ciągłej.....227 R: 17
okresowość tangensa i kotangensa...............294 R: 19
oszacowania liczby pi..........................296 R: 19
otoczenie punktu...............................200 R: 17
półproste domknięte.............................79 R: 10
półproste otwarte...............................79 R: 10
parabola..86 R: 11

permutacja . . . . . 21 R: 3
permutacja zbioru liczb naturalnych . . . . . 174 R: 16
pewnik . . . . . 34, 51 R: 4, 8
pewnik Dedekinda . . . . . 118 R: 14
pierwiastek . . . . . 74 R: 9
pierwiastek algebraiczny . . . . . 505 R: 28
pierwiastek dwukrotny . . . . . 426 R: 24
pierwiastek funkcji . . . . . 81 R: 10
pierwiastki wielomianu kwadratowegp . . . . . 87 R: 11
Piotruś Pan . . . . . 324 R: 20
pochodna funkcji arkus sinus . . . . . 354 R: 22
pochodna funkcji arkus tangens . . . . . 354 R: 22
pochodna funkcji kosinus . . . . . 351 R: 22
pochodna funkcji kotangens . . . . . 352 R: 22
pochodna funkcji potęgowej . . . . . 339, 351 R: 22
pochodna funkcji tangens . . . . . 352 R: 22
pochodna funkcji wykładniczej . . . . . 340, 351 R: 22
pochodna logarytmu . . . . . 341, 350 R: 22
pochodna sinusa . . . . . 341 R: 22
podstawowa własność potęgi . . . . . 65 R: 9
podzbiór . . . . . 18 R: 2
podział na klasy abstrakcji . . . . . 44, 45 R: 7
pokrycie zbioru . . . . . 161 R: 15
pole koła . . . . . 482 R: 27
pole pod wykresem . . . . . 465 R: 27
pole powierzchn i były obrotowej . . . . . 488 R: 27
pole powierzchn i torusa . . . . . 490 R: 27
pole powierzchn sfery . . . . . 489 R: 27
poprzednik implikacji . . . . . 29 R: 4
porządek . . . . . 45 R: 7
postać iloczynowa trójmianu kwadratowego . . . . . 87 R: 11
postać kanoniczna . . . . . 85 R: 11
postać nieskracalna . . . . . 73 R: 9
postać trygonometryczna liczby zespolonej . . . . . 504 R: 28
potęga . . . . . 162 R: 15
potęga . . . . . 64, 271, 275 R: 9, 18, 19
potęga o wykładniku wymiernym . . . . . 249 R: 18
potęga o wykładniku zespolonym . . . . . 507 R: 28
prędkość . . . . . 331 R: 21

prawa de Morgana . . . 33	R:	4
prawa logiki . . . 31, 34	R:	4
prawa znaków . . . 55	R:	8
prawie wszystkie wyrazy ciągu . . . 129	R:	15
prawo Ohma . . . 15	R:	1
prawo podwójnego przeczenia . . . 33	R:	4
prosta przylegająca do wykresu . . . 340	R:	22
prosta styczna do paraboli . . . 93	R:	11
przechodniość implikacji . . . 32	R:	4
przeciwdziedzina funkcji . . . 46	R:	7
przedziały domknięte . . . 79	R:	10
przedziały domknięto-otwarte . . . 79	R:	10
przedziały otwarte . . . 79	R:	10
przedziały otwarto-domknięte . . . 79	R:	10
przestępność liczby pi . . . 288	R:	19
przestrzeń metryczna . . . 155	R:	15
przyspieszenie . . . 331	R:	21
punkt okresowy . . . 106	R:	12
punkt skupienia zbioru . . . 200, 215	R:	17
różnica . . . 53	R:	8
różnica ciągów . . . 126	R:	15
różnica liczb zespolonych . . . 502	R:	28
różnica symetryczna . . . 39	R:	5
różnica zbiorów . . . 37	R:	5
równania różniczkowe . . . 410	R:	24
równoważność . . . 31	R:	4
radian . . . 273, 274	R:	19
reguła de l'Hospitala . . . 398	R:	24
reguła odrywania . . . 32	R:	4
relacja . . . 44	R:	7
relacja porządkująca . . . 45	R:	7
relacja przechodnia . . . 44	R:	7
relacja równoważności . . . 44	R:	7
relacja symetryczna . . . 44	R:	7
relacja zwrotna . . . 44	R:	7
reszta Lagrange'a . . . 420	R:	24
reszta Taylora . . . 413	R:	24
reszta z dzielenia liczb . . . 66	R:	9
reszta z dzielenia wielomianów . . . 96	R:	12

rozpad promieniotwórczy	259	R:	18
rozwiązanie układu równań	109-110	R:	13
rozwinięcie dziesiętne	167	R:	16
rumb	282	R:	19
sgn	208	R:	17
silnia	21	R:	3
sinus	273, 496	R:	19, 27
sinus hiperboliczny	269, 496	R:	18, 27
sinus różnicy	276, 311	R:	19, 20
sinus sumy	276, 277	R:	19
spójnik	29	R:	4
sprzężenie	506	R:	28
stała Eulera	269	R:	18
stacje benzynowe	13	R:	1
stożek sciety	488	R:	27
stopień	273, 274	R:	19
stopień wielomianu	82, 96, 97, 112	R:	10, 12, 13
stopień wielomianu zerowego	82, 97	R:	10, 12
styczna	332334	R:	21
suma ciągów	126	R:	15
suma częściowa szeregu	165	R:	16
suma Darboux dolna, suma Darboux górna	478	R:	27
suma szeregów	172	R:	16
suma szeregu nieskończonego	165, 166	R:	16
suma zbiorów	37	R:	5
symbol Newtona	22, 23, 191	R:	2, 16
symbole nieskończone	79, 128, 129	R:	10, 15
symbole nieskończone działania	82, 132	R:	10, 15
szereg anharmoniczny	166	R:	16
szereg geometryczny	167	R:	16
szereg harmoniczny	166	R:	16
szereg Maclaurina	414	R:	24
szereg Maclaurina funkcji tangens	459	R:	26
szereg nieskończony	164, 165	R:	16
szereg potęgowy	185, 346	R:	16, 22
szereg rozbieżny	165	R:	16
szereg Taylora	414	R:	24
szereg zbieżny	165	R:	16
szereg zbieżny bezwzględnie	173	R:	16

szereg zbieżny warunkowo	174	R: 16
środek masy	229, 490	R: 17, 27
środek masy n punktów	491	R: 27
środek masy obszaru między wykresami	492	R: 27
środek masy pary punktów	491	R: 27
środek masy trójkąta	493	R: 27
środek masy wykresu funkcji	494	R: 27
tablice logarytmów	256	R: 18
tangens kąta ostrego	83	R: 10
tautologia	34	R: 4
teoria mnogości	20	R: 2
teza	34	R: 4
teza indukcyjna	12	R: 1
tożsamość	46	R: 7
trójkąt Pascala	25	R: 3
trichotomia	45, 54	R: 7, 8
tw. Bézout	104	R: 12
tw. Bernsteina	322	R: 20
tw. Bolzano-Cauchy'ego	222	R: 17
tw. Bolzano-Weierstrassa	150, 508	R: 15, 28
tw. Cantora-Heinego	226	R: 17
tw. Cauchy'ego o wartości średniej	397	R: 24
tw. Cauchyego	152, 172	R: 15
tw. Cesàro	190	R: 16
tw. charakteryzujące funkcje wypukłe	236	R: 17
tw. charakteryzujące izometrie	278	R: 19
tw. Darboux	365	R: 23
tw. Fermata o lokalnych ekstremach	359	R: 23
tw. Lagrange'a o wartości średniej	361	R: 23
tw. Mertensa (o mnożeniu szeregów)	188	R: 16
tw. o addytywności całki względem przedziału	477	R: 27
tw. o analityczności funkcji odwrotnej	448	R: 26
tw. o analityczności sumy, róznicy i iloczynu	446	R: 26
tw. o analityczności w otoczeniu	441	R: 26
tw. o analityczności złożenia	447	R: 26
tw. o arytm. własnościach granicy	135, 209	R: 15, 17
tw. o arytm. własnosciach pochodnej	345	R: 22
tw. o całce iloczynu funkcji przez liczbę	466	R: 27
tw. o całce sumy dwu funkcji	466	R: 27

tw. o całkowalności funkcji monotonicznej ...... 480 R: 27
tw. o całkowaniu przez części .... 466 R: 27
tw. o całkowaniu przez podstawienie .... 467 R: 27
tw. o ciągłości funkcji monotonicznej .... 223 R: 17
tw. o ciągłości funkcji odwrotnej .... 225 R: 17
tw. o ciągłości funkcji różniczkowalnej .... 344 R: 22
tw. o ciągłości granicy .... 316 R: 20
tw. o ciągłości pierwiastka .... 154 R: 15
tw. o ciągłości złożenia .... 218 R: 17
tw. o dodawaniu szeregów .... 172 R: 16
tw. o dzieleniu zresztą .... 66, 96 R: 9, 12
tw. o granicach funkcji monotonicznej .... 212 R: 17
tw. o granicy ciągu geometrycznego .... 130 R: 15
tw. o granicy ciągu monotonicznego .... 140 R: 15
tw. o granicy złożenia dwu funkcji .... 210 R: 17
tw. o istnieniu funkcji odwrotnej .... 48 R: 7
tw. o istnieniu funkcji pierwotnej .... 430, 463 R: 25, 27
tw. o ist. granicy ilorazu różnicowego (sinusa) .. 292 R: 19
tw. o istnieniu pierwiastków .... 74 R: 9
tw. o istnieniu pierwiastków rzeczywistych ..... 119 R: 14
tw. o istnieniu rozkładu .... 102 R: 12
tw. o istnieniu sinusa i kosinusa .... 297 300 R: 19
tw. o jednostajnej ciągłości .... 226 R: 17
tw. o jednostajnej zbieżności szer. potęgowego .. 439 R: 26
tw. o jednoznaczności (sinusa i kosinusa) .... 301 R: 19
tw. o jednoznaczności funkcji pierwotnej .... 462 R: 27
tw. o jednoznaczności granicy .... 219 R: 17
tw. o jednoznaczności rozkładu .... 103 R: 12
tw. o jednoznaczności wielomianu Taylora ...... 413 R: 24
tw. o jednoznaczności współczynników ...... 97, 111 R: 12, 13
tw. o liczbie podzbiorów .... 25 R: 3
tw. o liniowości izometrii .... 277 R: 19
tw. o lipschitzowskości funkcji różniczkowalnej .. 364 R: 23
tw. o lokalnych ekstremach .... 418 R: 24
tw. o łączności sumowania nieskończonego ...... 171 R: 16
tw. o mnożeniu szeregu przez liczbę .... 171 R: 16
tw. o monotoniczności funkcji kwadratowej .. 86, 87 R: 11
tw. o monotoniczności funkcji różniczkowalnej .. 362 R: 23

tw. o monotoniczności sinusa i kosinusa .... 290 R: 19
tw. o monotonicznościtangensa i kotangensa.... 295 R: 19
tw. o najlepszym przybliżeniu liniowym .... 342 R: 22
tw. o najw. wspólnym dzielniku (NWD).... 67, 106 R: 9, 12
tw. o nieistnieniu nierówności (w $\mathbb{C}$) .... 503 R: 28
tw. o obrazie funkcji wykładniczej .... 255 R: 18
tw. o ograniczoności ciągu zbieżnego .... 134 R: 15
tw. o ograniczoności funkcji całkowalnej .... 479 R: 27
tw. o operacjach na funkcjach ciągłych .... 216 R: 17
tw. o pierwiastkach wymiernych .... 105 R: 12
tw. o pochodnej funkcji odwrotnej .... 347 R: 22
tw. o pochodnej funkcji wypukłej .... 378 R: 23
tw. o pochodnej szeregu potęgowego .... 349 R: 22
tw. o pochodnej złożenia .... 346 R: 22
tw. o podciągach .... 140 R: 15
tw. o podciągach monotonicznych .... 149 R: 15
tw. o polu między wykresami .... 481 R: 27
tw. o porównywaniu całek .... 476 R: 27
tw. o porównywaniu szeregów .... 173 R: 16
tw. o postaci iloczynowej sinusa .... 452 R: 26
tw. o postaci obrotu .... 279 R: 19
tw. o przechodniości implikacji .... 31 R: 4
tw. o przedłużaniu funkcji jednostajnie ciągłej .. 228 R: 17
tw. o przemienności i łączności .... 38 R: 5
tw. o przemienności sum nieskończonych .... 174 R: 16
tw. o przybliżeniach dziesiętnych .... 168 R: 16
tw. o przyjmowaniu wartości pośrednich .... 222 R: 17
tw. o punktach przegięcia .... 418, 419 R: 24
tw. o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych .... 427 R: 25
tw. o różniczkowaniu szeregu funkcyjnego ...... 429 R: 25
tw. o różnowartościowości i okresowości .... 287 R: 19
tw. o różnowartościowych funkcjach ciągłych ... 224 R: 17
tw. o rozdzielności .... 38 R: 5
tw. o scalaniu .... 157, 212 R: 15, 17
tw. o sumach Riemanna .... 477 R: 27
tw. o sumie krotności .... 102, 103 R: 12
tw. o szacowaniu .... 133 R: 15
tw. o ścisłej motoniczności f. różniczkowalnej ... 364 R: 23

tw. o trzech ciągach . . . . . 139 R: 15
tw. o trzech funkcjach . . . . . 210 R: 17
tw. o własnościach funkcji potęgowej . . . . . 261 R: 18
tw. o własnościach logarytmu . . . . . 255 R: 18
tw. o wartości średniej (dla całek) . . . . . 476 R: 27
tw. o warunku Cauchy'ego . . . . . 210, 211 R: 17
tw. o wielomianach symetrycznych . . . . . 113 R: 13
tw. o wielomianie kwadratowym . . . . . 86 R: 11
tw. o wypukłości (sinusa i kosinusa) . . . . . 291 R: 19
tw. o wypukłości funkcji ciągłej . . . . . 233 R: 17
tw. o wypukłości funkcji potęgowej . . . . . 263 R: 18
tw. o wypukłości funkcji różniczkowalnej . . . . . 380 R: 23
tw. o wypukłości funkcji wykładniczej . . . . . 254 R: 18
tw. o wypukłości logarytmu . . . . . 255 R: 18
tw. o wypukłości tangensa i kotangensa . . . . . 296 R: 19
tw. o zamianie na postać iloczynową . . . . . 285, 295 R: 19
tw. o zbieżności szer. bezwzględnie zbieżnego . . . 174 R: 16
tw. o zbiorze wartości (sinusa i kosinusa) . . . . . 290 R: 19
tw. o znaku sinusa . . . . . 289 R: 19
tw. Peano . . . . . 413 R: 24
tw. Riemanna . . . . . 176 R: 16
tw. Rolle'a . . . . . 360 R: 23
tw. Stolza . . . . . 146, 438 R: 15, 26
tw. Weierstrassa o aproksymacji . . . . . 322 R: 20
tw. Weiertrassa o osiąganiu kresów . . . . . 220 R: 17
ułamki proste . . . . . 471 R: 27
układ nieoznaczony . . . . . 109 R: 13
układ nierówności . . . . . 110 R: 13
układ oznaczony . . . . . 109 R: 13
układ równań . . . . . 109 R: 13
układ sprzeczny . . . . . 109 R: 13
układy równoważne . . . . . 109 R: 13
umowa w kwestii oznaczeń (całkowanie) . . . . . 467 R: 27
uwaga o pozornej monotonicznosci . . . . . 360 R: 23
uwaga o zbieżności ciągu przeciwnego . . . . . 133 R: 15
własność Darboux . . . . . 222 R: 17
własność lokalna . . . . . 338 R: 22
waga . . . . . '146, 229, 232 R: 15, 17

walec o podstawie B	483	R:	27
wartość średnia funkcji	477	R:	27
wartość bezwzględna liczby	56	R:	8
wartość bezwzględna liczby zespolonej	504	R:	28
wartość funkcji	45, 49, 80	R:	7, 10
warunek Cauchy'ego	151	R:	15
warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej	315	R:	20
warunek konieczny zbieżności szeregu	172	R:	16
Weierstrass Karl	350	R:	22
wielomian	82	R:	10
wielomian Bernsteina	322	R:	20
wielomian interpolacyjny Lagrange'a	320	R:	20
wielomian kwadratowy	85	R:	11
wielomian nierozkładalny	102	R:	12
wielomian Taylora	413	R:	24
wielomian unormowany	100	R:	12
wielomian wielu zmiennych	111	R:	13
wielomian zerowy	82	R:	10
wielomiany symetryczne elementarne	114	R:	13
wniosek o stałości funkcji różniczkwalnej	363	R:	23
współczynnik kierunkowy	83	R:	10
współczynnik kierunkowy stycznej	333	R:	21
współczynnik rozszerzalności cieplnej	259	R:	18
wykres funkcji	49	R:	7
wykresy sinusa i kosinusa	291	R:	19
wykresy tangensa i kotangensa	295	R:	19
wynikanie	29	R:	4
wyróżnik wielomianu kwadratowego	85	R:	11
wyraz ciągu	122	R:	15
wyraz szeregu	165	R:	16
wzór Cardano	500	R:	28
wzór Cauchy'ego - Hadamarda	438	R:	26
wzór de Moivre'a	505	R:	28
wzór Leibniza	410	R:	24
wzór Wallisa	496	R:	27
wzory de Morgana	39, 41	R:	5, 6
wzory połówkowe	295	R:	19
wzory redukcyjne	276, 289, 294	R:	19
wzory Viète'a	87	R:	11
złożenie funkcji	47	R:	7

założenie . . . . . 34 R: 4
założenie indukcyjne . . . . . 12 R: 1
zaprzeczenie . . . . . 30 R: 4
zasada Archimedesa . . . . . 61, 116, 118 R: 9, 13, 14
zasada Cavalieri'ego . . . . . 484 R: 27
zasada identyczności . . . . . 440 R: 26
zasada indukcji zupełnej . . . . . 12, 59 R: 1, 9
zasada maksimum . . . . . 61 R: 9
zasada minimum . . . . . 60 R: 9
zasada szufladkowa Dirichleta . . . . . 62 R: 9
zasadnicze twierdzenie algebry . . . . . 512 R: 28
zasadnicze twierdzenie arytmetyki . . . . . 70 R: 9
zawieranie . . . . . 18 R: 2
zbiór n-elementowy . . . . . 21 R: 3
zbiór argumentów funkcji . . . . . 46 R: 7
zbiór Cantora . . . . . 240 R: 17
zbiór domknięty . . . . . 241 R: 17
zbiór mierzalny w sensie Jordana . . . . . 480 R: 27
zbiór ograniczony z dołu . . . . . 117 R: 14
zbiór ograniczony z góry . . . . . 61, 125 R: 9, 15
zbiór pusty . . . . . 18 R: 2
zbiór wartości funkcji . . . . . 46 R: 7
zbiory . . . . . 18 R: 2
zbiory podobne . . . . . 91 R: 11
zdanie fałszywe . . . . . 29 R: 4
zdanie prawdziwe . . . . . 29 R: 4
Zenon z Elei . . . . . 123 R: 15
zero funkcji . . . . . 81 R: 10
zwierciadło paraboliczne . . . . . 93 R: 11