

Twierdzenie Whitneya o przedłużaniu

1

Sytuacja: $K \subset \mathbb{R}^n$ zbiór zwarty, $F = (f^\alpha)_{|\alpha| \leq m}$, $m \in \mathbb{N}$
(litera α oznacza wieloskazyk), $f^\alpha \in C(K, \mathbb{R})$

DEF Układ funkcji ciągłych $F = (f^\alpha)_{|\alpha| \leq m}$ nazywamy m -jetem.

m -jety tworzą przestrzeń Banacha,

$$J^m(K) = \{ F = (f^\alpha)_{|\alpha| \leq m}, f^\alpha: K \rightarrow \mathbb{R} \text{ ciągła} \}$$

$$\|F\|_K^m := \max_{|\alpha| \leq m} \left(\sup_{x \in K} |f^\alpha(x)| \right) \quad (\text{to jest norma})$$

$(J^m(K) \simeq \text{produkt skrośzonej listy } p\text{-ni } C(K, \mathbb{R}))$

Naturalne pytanie:

Kiedy istnieje $\tilde{f} \in C^m(\mathbb{R}^n)$ taka, że

$$D^\alpha \tilde{f}|_K = f^\alpha, \quad \forall |\alpha| \leq m \quad \dots ?$$

Nie zawsze:
 $f^0 \equiv \text{const}$
 $\Rightarrow f^\alpha \equiv 0, |\alpha| > 0$

Tw. Whitneya podaje naturalną odpowiedź na to pytanie oraz "precept" na przedłużanie odpowiednich m -jetów

Oznaczenia, terminologia cd.

1) Operator $J: C^m(\mathbb{R}^n) \rightarrow J^m(K)$

$$J_m(f) \equiv J(f) = (D^\alpha f|_K)_{|\alpha| \leq m}$$

naturalny
"nut"

2) Wielomian Taylora jetu.

Dla $F = (f^\alpha)_{|\alpha| \leq m}$ piszemy $F(x) \equiv f^0(x)$,

$$D^\alpha: J^m(K) \ni (g^\beta)_{|\beta| \leq m} \mapsto (g^{\alpha+\beta})_{|\beta| \leq m-|\alpha|}, \quad |\alpha| \leq m$$

i wreszcie

$$T_a^m F(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} f^\alpha(a) \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!}$$

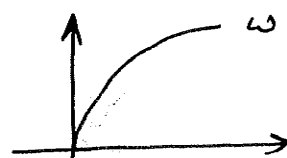
(to jest formalny wielomian Taylora jemu F , o środku $a \in K$, w punkcie $x \in \mathbb{R}^n$).

Uwaga $T_a^m F(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\tilde{T}_a^m F := J_m(T_a^m F(\cdot))$$

$R_a^m F := F - \tilde{T}_a^m F$ to reszta Taylora w p.ni m -jetów.

DEF Funkcję $\omega: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, która jest ciągła, wklęsła, monotonie rosnąca i $\omega(0)=0$, nazywamy modułem ciągłości.



Zaczniemy od TWIERDZENIA, które charakteryzuje naturalną podprzestrzeń w przestrzeni $J^m(K)$ - tę, dla której istnieje odpowiedni operator przekształceń.

Tw 1 Następujące warunki są równoważne:

(1) $(R_x^m F)^\alpha(y) = o(|x-y|^{m-|\alpha|})$, $x, y \in K$, $|x-y| \rightarrow 0$

(2) Istnieje moduł ciągłości ω taki, że

$$|(R_x^m F)^\alpha(y)| \leq \omega(|x-y|) |x-y|^{m-|\alpha|}, \quad x, y \in K, \quad |\alpha| \leq m.$$

(3) Istnieje moduł ciągłości ω_1 taki, że

$$|T_x^m F(z) - T_y^m F(z)| \leq \omega_1(|x-y|) (|x-z|^m + |y-z|^m)$$

dla wszystkich $x, y \in K$ oraz $z \in \mathbb{R}^n$.

Co więcej, $\omega \sim \omega_1$.

Uwaga ad. ozn. : $(R_x^m F)^\alpha(y) = f^\alpha(y) - \sum_{|\beta| \leq m-|\alpha|} f^{\alpha+\beta}(x) \frac{(y-x)^\beta}{\beta!}$

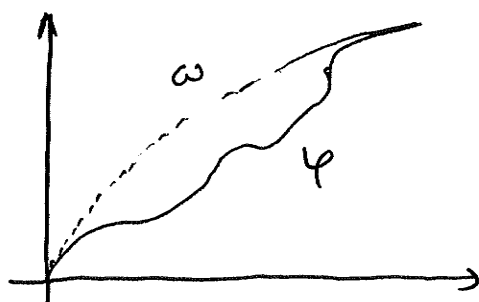
Dow. (2) $\Rightarrow$ (1) ozywiście.

(1) $\Rightarrow$ (2) Kradziemy

$$\varphi(t) := \sup_{A_t} |x-y|^{-(m-|\alpha|)} \cdot |(R_x^m F)^\alpha(y)|, \quad \varphi(0) = 0,$$

gdzie $A_t = \{(x, y) \in K \times K : 0 < |x-y| \leq t, |\alpha| \leq m, \alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n\}$

To jest dobra funkcja, tylko niekonieczne wkładać, ale można ją poprawić:



... i wtedy teza (2) zachodzi.

ZADANIE
Przejszcie ten drobny

(2) $\Rightarrow$ (3)

Lemat 1 : $T_x^m F(z) - T_y^m F(z) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{(z-x)^\alpha}{\alpha!} (R_y^m F)^\alpha(x)$

Dowód : Wykonujemy rachunek, w którym wykorzystuje się fakt, że każdy wielomian (stopnia N) jest sam swoim wielomianem Taylora (tegoż stopnia) wokół dowolnego punktu.

Istotne, $(R_y^m F)^\alpha(x) = f^\alpha(x) - D_x^\alpha \left[\sum_{|\gamma| \leq m} \frac{(x-y)^\gamma}{\gamma!} f^\gamma(y) \right]$

a stąd prawa str. lematu

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \frac{(z-x)^\alpha}{\alpha!} (R_y^m F)^\alpha(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} f^\alpha(x) \frac{(z-x)^\alpha}{\alpha!} - \Pi,$$

gdzie $\Pi = \sum_{|\alpha| \leq m} D_x^\alpha (W_y(x)) \frac{(z-x)^\alpha}{\alpha!}$, $W_y(x) = \sum_{\gamma} f^\gamma(y) \frac{(x-y)^\gamma}{\gamma!}$

- wielomian zmiennej x

$$= W_y(z) \equiv T_y^m F(z)$$

na mocy wspomnianego faktu o wielomianach Taylora wielomianów.
Stąd już wynika (3).

Wreszcie (3) $\Rightarrow$ (2): wobec Lematu 1, oraz (3),

$$\left| \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{(R_y^m F)^\alpha(x)}{\alpha!} (z-x)^\alpha \right| \leq \omega_1(|x-y|) (|x-z|^m + |y-z|^m)$$

Piszemy $z-x = |x-y| (z'-x)$, $|x-y| = \lambda$ i dostajemy

$$\left| \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{(R_y^m F)^\alpha(x)}{\alpha!} (z'-x)^{\alpha} \lambda^{|\alpha|} \right| \leq \omega_1(|x-y|) \cdot C \lambda^m (1 + |z'-x|^m), \quad (*)$$

gdzie $|y-z| = |(y-x) - (z-x)|$,

$$|y-z|^m \leq 2^{m-1} (|y-x|^m + |z-x|^m)$$

$$= C \lambda^m (1 + |z'-x|^m).$$

Po lewej mamy wielomian zmiennej $(z'-x)$.

Współczynniki wielomianu są kombinacjami liniowymi wartości tego wielomianu w skończonej liczbie punktów.

Można wybrać te punkty niezależnie od wartości wielomianu, a wobec tego

$$\left| \frac{\lambda^{|\alpha|}}{\alpha!} (R_y^m F)^\alpha(x) \right| \leq C \omega_1(|x-y|) \cdot \lambda^m, |\alpha| \leq m.$$

Dzielmy obie strony przez $\lambda^{|\alpha|} \rightarrow$ TEZA (2). $\square$

UWAGA Jeśli $F = (D^\alpha f|_K)_{|\alpha| \leq m}$ dla $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$, to każdy z warunków TW 1 jest spełniony (wypisujemy wzór Taylora np. z reszty Cauchy'ego dla każdej z pochodnych $D^\alpha f$, $|\alpha| \leq m$, i wtedy łatwo sprawdzamy up. (1) lub (2)).

DEFINICJA: $C^m(K) = \{F \in J^m(K) \mid \text{zachodzi któryś z warunków TW 1}\}$.

- To jest podprzestrzeń liniowa w $J^m(K)$, zobraza z tzw. jetów Whitney'ego.
- ω z war (2) to moduł osiągnięci jetu.

Norma w $C^m(K)$:

$$\|F\|_K^m := \|F\|_K^m + \sup_{x \neq y \in K} \max_{|\alpha| \leq m} \left| \frac{R_x^m F(y)}{|x-y|^{m-|\alpha|}} \right|$$

winnoraznie

$$\|F\|_K'^m := \|F\|_K^m + \sup_{\substack{x \neq y \in K \\ z \in \mathbb{R}^n}} \frac{|T_x^m F(z) - T_y^m F(z)|}{|x-z|^m + |y-z|^m}$$

Dруги składnik w powyższych wzorach $= \omega(\text{diam } K)$ dla odpowiedniego modułu osiągnięci ω , $\omega(t) \equiv \omega(\text{diam } K)$ dla $t \geq \text{diam } K$.

Aby określić operator przedłożenia $C^m(K) \rightarrow C^m(\mathbb{R}^n)$ potrzebujemy następującego lematu:

Lemat (Whitney'a o rozkładzie jedynki)

Niech $F = \bar{F} \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus F$.

Część I Istnieje rodzina kul parami rozdzielnych

$B_j = B(x_j, r_j) \subset \Omega$, $j=1,2,\dots$ taka, że

- (i) $r_j = \frac{1}{100} \text{dist}(x_j, F)$, $6B_j \subset (F)^c = \Omega$;
- (ii) $\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} 3B_j$, gdzie $3B_j := B(x_j, 3r_j)$
- (iii) $\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{6B_j} \leq C(n)$ (każdy pkt należy do skończonego młku kul $6B_j$)
- (iv) $B_j \cap B_i \neq \emptyset \Rightarrow r_i \approx r_j$ z dokładnością do stałego czynnika.

Część II Istnieją funkcje $\psi_j \in C_0^\infty(4B_j)$

($j=1,2,\dots$) takie, że

$$(v) \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \equiv 1 \text{ na } \Omega, \quad \psi_j \geq 0 \quad \forall j.$$

$$(vi) |D^\alpha \psi_j(x)| \leq C_\alpha \text{dist}(x, F)^{-|\alpha|}$$

dla wszystkich $x \in 4B_j$, α, j .

UWAGA : Whitney w oryginalnym dowodzie używał kostek, ale kule dobrze pracują "w sytuacjach nieeuklidesowych" (analiza na grupach, na p-miach metrycznych, ...).

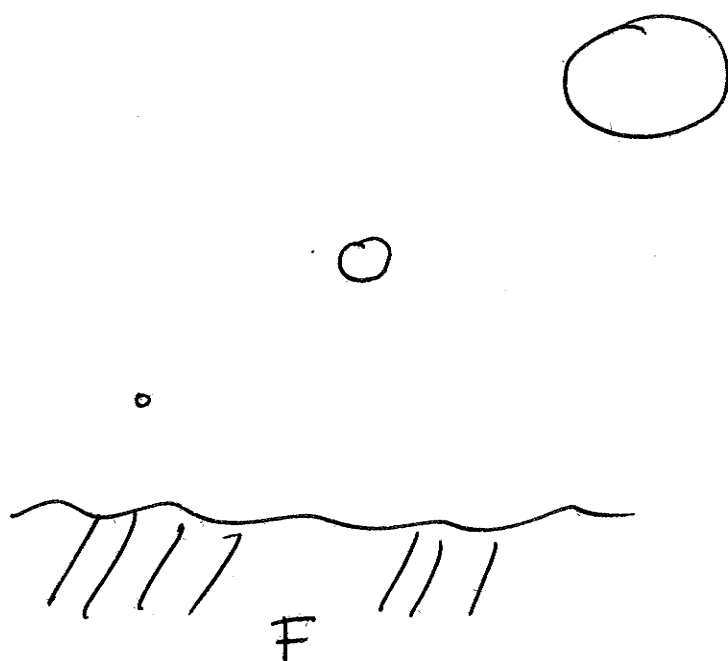
(szkic)
Dowód $\checkmark$ F domknięty

6.1

$$\Omega = \mathbb{R}^n \setminus F \quad x \in \Omega \mapsto r_x = \frac{1}{100} \operatorname{dist}(x, F)$$

$(B_k)_{k=1,2,\dots} :=$ dowolna maksymalna (ze względu na inkluzję) podrodzina w $\{B(x, r_x) \mid x \in \Omega\}$

Taka podrodzina istnieje wobec lematu Kuratowskiego - Zorn. Nietrudno sprawdzić, że spełnia warunki I części Lematu. (Dzieląc na pier. trójkąta i zasady szufladkowe).



Intuicja
 $\operatorname{dist}(B_k, F)$
 $\approx$ promień B_k
 $\approx \operatorname{dist}(y, F)$
dla wszystkich $y \in B_k$

Ad cz. II Bieramy ustaloną funkcję $\varphi \in C_0^\infty(B(0,4))$ taką, że $\varphi \equiv 1$ na $B(0,3)$, $\varphi \geq 0$ na $\mathbb{R}^n$.

Dla $j=1,2,3,\dots$ oraz $B_j = B(x_j, r_j)$ kładziemy

$\varphi_j(x) = \varphi((x-x_j)/r_j)$, $x \in B(x_j, 4r_j) = 4B_j$
[i oczywiście $\varphi_j \equiv 0$ poza $4B_j$].

6.2

- Wtedy $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x)$ jest dobre określona funkcją kl. $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus F)$, to każdy punkt $x \in \Omega = \mathbb{R}^n \setminus F$ ma otoczenie, w którym nie znikną tylko skończone wiele składników szeregu, z uwagi na $\sum_k \chi_{6B_k} \leq C = C(n)$.
- Ponadto, $\sum \varphi_j \geq 1$ na Ω , bo $\varphi_j = 1$ na $3B_j$, a kule $3B_j$ pokrywają Ω .
- Funkcja
$$\psi_i = \frac{\varphi_i}{\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j}, \quad \psi_i \in C_0^\infty(4B_i)$$
 spełniając warunki II części Lematu Whitney'a.

Tw 2 (H. Whitney, 1934)

Istnieje operator liniowy

$$W: C^m(K) \longrightarrow C^m(\mathbb{R}^n)$$

jedy Whitney'a

taki, że dla $f = (f^\alpha) \in C^m(K)$ mamy

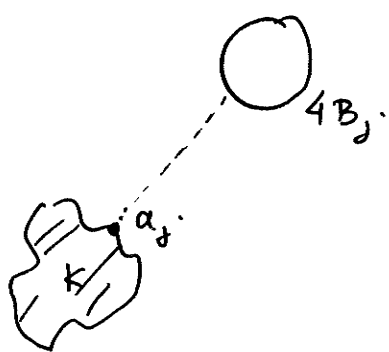
$$D^\alpha(Wf)(x) = f^\alpha(x), \quad x \in K, \quad |\alpha| \leq m,$$

a ponadto $Wf|_{\mathbb{R}^n \setminus K}$ jest klasy C^∞ .

Ten operator jest określony "jawnym wzorem":

Niech (B_j, ψ_j) - jak w Lemacie Whitney'a dla K .

Wybieramy $a_j \in K$ t. że $\text{dist}(a_j, \text{supp } \psi_j) = \text{dist}(K, \text{supp } \psi_j)$



$f \in C^m(K)$ - jest;

$$Wf(x) = \begin{cases} f^\alpha(x) & , \quad x \in K \\ \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x) T_{a_j}^m f(x) & \end{cases}$$

Poza K funkcja Wf jest dobrze określona i gładka.

Kluczowa trudność to sprawdzenie, że $Wf \in C^m$.