Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Oskar Skibski
Nr albumu: 237720

Obliczanie wartości Shapleya rozszerzonej do gier koalicyjnych z efektami zewnętrznymi

Praca magisterska
na kierunku INFORMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
prof. Andrzeja Szałasa oraz
dra Tomasza Michalaka
Instytut Informatyki

Wrzesień 2010

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

Wartość Shapleya jest najważniejszą normatywną koncepcją podziału w teorii gier koalicyjnych. Służy ona do wyznaczania sprawiedliwego podziału wypłaty pomiędzy graczami i znajduje zastosowanie w bardzo wielu dziedzinach, tak odległych jak ekonomia (kiedy koszty lub zyski ze współdziałania muszą być dzielone między partnerów) i medycyna (np. przy wyznaczaniu wpływu czynników ryzyka na zachorowanie pacjenta). W informatyce analizuje się wartość Shapleya w zastosowaniach związanych z systemami wieloagentowymi. Bardzo dużo miejsca w literaturze poświęcone jest grom bez efektów zewnętrznych. Także dla nich określona jest oryginalna wartość Shapleya, podczas gdy w większości rzeczywistych zastosowań częściej spotykamy się z grami w których efekty zewnętrzne istnieją. W stosunku do nich cztery aksjomaty Shapleya na których opiera się jego wartość (efektywność, addytywność, symetria i gracz-atrapa) są za słabe aby wskazywały jednoznaczny podział wypłaty. Z tego powodu w ostatnich dwudziestu latach w literaturze ekonomicznej pojawiło się dużo prac w których przez dodanie nowych aksjomatów definiuje się różne rozszerzone wartości Shapleya. Żadna z tych wartości nie zdobyła jednak powszechnego uznania, ponadto brakuje prac w których byłyby one zestawione. Od niedawna kwestia własności obliczeniowych wartości Shapleya stała się obiektem zainteresowania informatyków. Ze względu na dużo większe wyzwanie obliczeniowe temat wyznaczania rozszerzonych wartości Shapleya zwykle nie był poruszany. Jedyne prace jakie dotyczą tej kwestii to [Michalak:et:al:09] i [Michalak:et:al:10], jednak zajmują się one obliczeniem tylko trzech z nich. Na tym tle, w mojej pracy postaram sie przeprowadzić porównanie rozszerzonych wartości Shapleya oraz podjąć temat złożoności obliczeniowej tych z nich, którymi dotychczas nikt się nie zajmował.

Słowa kluczowe

wartość Shapleya, teoria gier koalicyjnych, gry z efektami zewnętrznymi

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.3 Informatyka

Klasyfikacja tematyczna

I. Computing Methodologies
I.2 ARTIFICIAL INTELLIGENCE
I.2.11 Distributed Artificial Intelligence
Subjects: Multiagent systems

Tytuł pracy w języku angielskim

Computing the Shapley Value Extended to Coalitional Games with Externalities

Spis treści

Wprowadzenie

Dzielenie zysku i kosztów wynikających ze stworzenia koalicji w obecności efektów zewnętrznych jest kluczowym pytaniem w wielu realnych sytuacjach ekonomicznych. Od czasu przełomowej pracy Shapleya z 1953 roku, przedstawiającej sprawiedliwy podział w grach bez efektów zewnętrznych nie udało się jednak stworzyć powszechnie akceptowanej wizji podziału w grach, w których takie efekty mogą występować. O ile teoria gier zajmuje się tematem sprawiedliwości danego podziału, o tyle w informatyce głównym zagadnieniem jest złożoność obliczeniowa danej wartości. W niniejszej pracy zajmiemy się zarówno pierwszym jak i drugim tematem.

Jako że gry koalicyjne znaleźć możemy w bardzo wielu dziedzinach ekonomii, ustalenie sprawiedliwego podziału zysków jest bardzo ważne. Przykładem gier koalicyjnych są protokoły międzypaństwowe, jak słynny protokół z Kyoto (1997) będący porozumieniem przeciwdziałania globalnemu ociepleniu. Na poziomie przemysłowym klasyczną grę koalicyjną tworzą współpracujące firmy, które przez łączenie się ze sobą mogą zmniejszać koszty standaryzacji. W zastosowaniach informatycznych koalicje są tworzone przez agentów w systemach wieloagentowych. Wartość Shapleya używana jest także w budowaniu inteligetnych sieci energetycznych, wyznaczaniu ważności węzłów sieci (np. społecznej, co pokazuje strukturę społeczeństwa), przewidywaniu wyników głosowania w zależności od powstałych koalicji, a także w medycynie - przy wyznaczaniu wpływu czynników ryzyka (lub genów) na zachorowanie pacjenta na badaną chorobę oraz w epidemiologii.

Wartość Shapleya oparta jest na czterech aksjomatach, które powinien spełniać sprawiedliwy podział zysku: *efektywności* - cały zysk musi zostać rozdzielony między graczy, *symetrii* - gracze z takim samym wkładem w grę powinni otrzymać taką samą wypłatę, *gracza-atrapy* - gracz z zerowym wkładem w grę powinien otrzymać zerową wypłatę oraz *addytywności* - jeżeli gracze uczestniczą w dwóch grach równocześnie, wówczas ich końcowe wypłaty powinny być równe wypłacie z gry będącej połączeniem obu tych gier. Shapley pokazał, że istnieje tylko jedna wartość spełniająca powyższe aksjomaty w grach bez efektów zewnetrznych.

O ile analizując proste gry koalicyjne zwykle mamy do czynienia z kilkoma graczami, to w realnych sytuacjach ich liczba może być nawet kilkaset razy większa. W takiej sytuacji pojawia się problem reprezentacji gry - zwykle grę definiujemy określając wartość dla każdej koalicji (taką reprezentację nazywamy *funkcją charakterystyczną*), nie jest to jednak możliwe kiedy koalicji jest 2^n dla dużego n. Dlatego duża cześć literatury poświęcona jest właśnie znalezieniu zwięzłej, ale ekspresywnej reprezentacji gier. Ważnym aspektem dobrej reprezentacji są także własności obliczeniowe - zagadnienie mówiące jak szybkie algorytmy możemy napisać dla podstawowych zagadnień obliczeniowych (takich jak wyznaczenie wartości Shapleya) jeżeli gra jest zapisana w tej reprezentacji.

Rezultaty uzyskiwane w tej dziedzinie są satysfakcjonujące, problemem jest jednak fakt, że założenie braku efektów zewnętrznych jest mało realne. Popatrzmy na przykład kiedy mamy trzy koalicje - S_1, S_2 i S_3. Brak efektów zewnętrznych oznacza, że wartość S_1 jest taka sama jeżeli koalicje S_2 i S_3 współpracują ze sobą i kiedy są w układzie osobno. Ale przecież wspólna koalicja S_2 i S_3 może wpływać na zyski S_1 - przykładowo połączone S_2 i S_3 mogą zmonopolizować rynek.

Niestety okazuje się, że przedstawione aksjomaty nie wystarczają by jednoznacznie określić wartość Shapleya dla wszystkich gier (gier *bez* oraz *z* efektami zewnętrznymi). Aby ograniczyć zbiór dobrych podziałów do jednego na przestrzeni ostatnich lat różni autorzy proponowali szereg nowych aksjomatów, które według nich dobrze oddają zasadę sprawiedliwego podziału. Wartości te nazywamy *rozszerzonymi wartościami Shapleya.*

Kwestia obliczeniowa dla gier z efektami zewnętrznymi jest dużo bardziej skomplikowana ze względu na dwa czynniki. Po pierwsze - problemem jest zdefiniowanie tak dużej liczby wartości. Podstawową jednostką dla której określamy wartość jest *zanurzona koalicja*, czyli układ koalicyjny (podział graczy na koalicje) z wyszczególnioną jedną koalicją składową. Ilość zanurzonych koalicji z oczywistych względów znacznie przewyższa ilość koalicji. Po drugie - nie mamy jednej wartości Shapleya, a kilka. Jako że żadna z rozszerzonych wartości Shapleya nie jest uznawana za jedyną dobrą, to w zależności od preferencji „arbitra” danej gry koalicyjnej do liczenia wypłat graczy może być użyta dowolna z nich. Powinniśmy zatem rozpatrywać szybkość obliczenia każdej. Ze względu na złożoność tematu pierwsza praca zajmujące się wyznaczeniem szybkiego algorytmu obliczającego wartość Shapleya w grach z efektami zewnętrznymi powstała w 2009 roku ([Michalak:et:al:09]).

Na tym tle w mojej pracy:

- wyznaczę wymiar przestrzeni gier z efektami zewnętrznymi (podrozdział 1.3)
- przeanalizuję rozszerzenia wartości Shapleya do gier z efektami zewnętrznymi - będą to wartości [PhamDoNorde07], [McQuillin08], [MachoStadler:et:al:07], [Myerson77], [Bolger89] oraz [HuYang09]
  - przedstawię ich aksjomatyczne wyprowadzenie odnosząc je do aksjomatów innych wartości (rozdział 2)
  - porównam cechy omówionych wartości i przedstawię je w postaci tabeli (podrozdział 2.8)
  - wyprowadzę twierdzenie pokazujące relację między aksjomatem marginalności i wzmocnieniem aksjomatu gracza-atrapy (podrozdział 2.8)
  - udowodnię możliwość skonstruowania wartości Hu-Yanga za pomocą *podejścia uśredniania* (dodatek A)
- omówię reprezentacje gier bez oraz z efektami zewnętrznymi oparte na formułach logicznych
  - uogólnię dowód Ieonga i Shohama szybkiego obliczania wartości Shapleya przy reprezentacji Sieci Wkładów Marginalnych na formuły zawierające tylko literały negatywne (podrozdział 3.1)
  - zaproponuję mechanizm normalizacji Ważonych Sieci Wkładów Marginalnych (podrozdział 3.2)
  - udowodnię możliwość uproszczenia dowolnej reguły Ważonych Sieci Wkładów Marginalnych do postaci zawierającej jeden blok (podrozdział 3.2)
- przeanalizuję temat złożoności obliczeniowej opisanych wartości przy reprezentacji Ważonych Sieci Wkładów Marginalnych

– w oparciu o algorytmy zaproponowane w [Michalak:et:al:10] wyznaczę zwarty wzór dla wartości wolnej od efektów zewnętrznych oraz wartości McQuillina (podrozdziały 4.1 i 4.2)

– dla wartości z pracy [MachoStadler:et:al:07], której złożoność obliczeniowa nie była dotychczas omawiana w literaturze, pokażę efektywny algorytm liczenia wartości Shapleya dla gier reprezentowanych przez w pełni ekspresywny podzbiór Ważonych Sieci Wkładów Marginalnych (podrozdział 4.3)

Praca ma następującą strukturę. W rozdziale 1 wprowadzimy podstawowe pojęcia i przedstawimy wartość Shapleya dla gier bez efektów zewnętrznych. W rozdziale 2 przeanalizujemy i porównamy rozszerzenia wartości Shapleya prezentowane w literaturze. W rozdziale 3 przedstawimy reprezentację z pracy [Michalak:et:al:10], która pozwala zwięźle zapisywać formuły opisujące struktury koalicyjne. W rozdziale 4 omówimy kwestię złożoności obliczeniowej algorytmu do wyznaczania wymienionych powyżej rozszerzonych wartości Shapleya. Pracę zakończy podsumowanie w rozdziale 5, w którym zbierzemy uzyskane wyniki.

Rozdział 1

Podstawowe pojęcia

W tym rozdziale wprowadzimy podstawowe pojęcia jakimi będziemy posługiwać się w naszej pracy. Zaczniemy od zdefiniowania pojęć dotyczących zbioru graczy (koalicja, podział, zanurzona koalicja) po czym powiemy czym jest gra koalicyjna (określona przez funkcje podziału) (sekcja 1.1). W oparciu o tą wiedzę będziemy mogli wprowadzić pojęcie wartości gry oraz wartość Shapleya, czyli sprawiedliwy rezultat dla gier bez efektów zewnętrznych (sekcja 1.2). Pokażemy na jakich aksjomatach oparł swoją teorię Shapley i zaprezentujemy wzór na obliczanie jego wartości. Na koniec zastanowimy się nad tym jak duża jest przestrzeń gier z efektami zewnętrznymi i przedstawimy rezultat oparty na znanych z matematyki dyskretnej liczbach Bella (sekcja 1.3).

W całej naszej pracy zbiór $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ będzie oznaczał niepusty zbiór graczy.

1.1. Koalicja, układ koalicyjny, funkcja charakterystyczna

Definicja 1.1 Koalicją *nazywamy dowolny podzbiór zbioru graczy* $S \subseteq N$.

Definicja 1.2 Podziałem *lub* układem koalicyjnym *nazywamy zbiór rozłącznych koalicji, które pokrywają cały zbiór graczy, czyli* $P = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ *przy czym* $\bigcup S_i = N$ *oraz* $S_i \cap S_j = \emptyset$ *dla* $i \neq j$. *Zbiór wszystkich podziałów będziemy oznaczać przez* $\mathcal{P}$.

Definicja 1.3 Zanurzoną koalicją *nazywamy parę* (S, P), *gdzie* S *jest koalicją, a* P *podziałem zawierającym* S. *Zbiór wszystkich zanurzonych koalicji oznaczamy przez* EC:
$EC = \{(S, P) \mid P \in \mathcal{P}, S \in P\}$.

Zgodnie z konwencją będziemy przyjmować, że zbiór pusty należy do każdego podziału, jednakże nie będziemy go wliczać do rozmiaru podziału - przez $|P|$ rozumiemy ilość niepustych koalicji, jakie podział P zawiera.

Ponadto przez $P(i)$ będziemy oznaczać koalicję w podziale P w której znajduje się gracz i. Dla $S \subseteq N, i \notin S, j \in S$ używać będziemy także skrótowej notacji: $S_{+i} = S \cup \{i\}$ oraz $S_{-j} = S \setminus \{j\}$.

Wprowadźmy teraz dodatkową funkcję, aby ułatwić zapis sytuacji, w której gracz i powoduje zmianę układu koalicyjnego P przechodząc ze swojej koalicji S do koalicji T. Niech $tr^i_T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ określona będzie następująco:

$$tr^i_T(P) = (P \setminus \{S, T\}) \cup \{S_{-i}, T_{+i}\}$$

dla $S = P(i)$.

Definicja 1.4 Funkcją podziału *nazywamy funkcję* $v : EC \to \mathbb{R}$*, która każdej zanurzonej koalicji przypisuje liczbę rzeczywistą (odpowiadającą wartości koalicji w danym układzie koalicyjnym) przy czym* $v(\emptyset, P) = 0$ *dla każdego* $P \in \mathcal{P}$.

Definicja 1.5 Grą koalicyjną *w postaci funkcji podziału nazywamy parę* $G = (N, v)$*, gdzie* N *jest zbiorem graczy, a* v *- funkcją podziału.*

Dla uproszczenia notacji będziemy utożsamiać grę z jej funkcją podziału i oznaczać ją literą v.

Wśród gier koalicyjnych wyróżniamy zbiór gier *bez efektów zewnętrznych*. W grach tych wartość koalicji jest niezależna od ułożenia pozostałych graczy, czyli formalnie dla każdej koalicji S i dwóch dowolnych układów koalicyjnych P_1, P_2 zawierających S zachodzi równość $v(S, P_1) = v(S, P_2)$. W takim wypadku zapis funkcji podziału możemy uprościć do funkcji $\hat{v}$, której argumentem będzie wyłącznie koalicja - $\hat{v} : 2^N \to \mathbb{R}$. Funkcję w tej formie nazywamy *funkcją charakterystyczną*.

Mówimy, że gra jest *z efektami zewnętrznymi* kiedy istnieje choć jedna koalicja S i dwa układy P_1, P_2 zawierające ją dla których $v(S, P_1) \neq v(S, P_2)$.

Niech $(S, P) \in EC$. Za [Bolger89] zdefiniujmy grę $v^{(S,P)}$ następująco:

$$v^{(S,P)}(S', P') = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } (S', P') = (S, P) \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

W grze tej tylko koalicja S otrzymuje wypłatę i to pod warunkim, że pozostali gracze „dopasują” się do układu koalicyjnego P. McQuillin nazywa te gry *grami typu* β.

1.2. Sprawiedliwy podział wypłaty i wartość Shapleya

Przejdziemy teraz do zdefiniowania głównego zagadnienia tej pracy, czyli pytania jak powinien wyglądać podział wypłaty uzyskanej po utworzeniu przez wszystkich graczy jednej koalicji (ang. *grand coalition*). Podział ten nazywany jest *wartością gry*, co wynika z faktu, że większość prac dotyczących tego zagadnienia opiera się na założeniu, że wspólna koalicja wszystkich graczy zostanie utworzona (mimo że w ogólności nie musi być najbardziej opłacalnym układem).[1]

Definicja 1.6 Wartością gry *nazywamy funkcję* φ*, która przyjmuje za argument grę* v *i zwraca wektor* $\mathbb{R}^N$ *postaci* $(\varphi_i)_{i \in N}$ *gdzie* φ_i *odpowiada wypłacie gracza* i.

Wprowadźmy formalnie definicje permutacji koalicji, podziału, gry oraz wartości gry, które będą nam potrzebne w aksjomacie symetryczności. Niech $\sigma : N \to N$ będzie permutacją zbioru N. Wówczas $\sigma(S) = \{\sigma(i) : i \in S\}$ dla $S \subseteq N$ oraz $\sigma(P) = \{\sigma(S) : S \in P\}$ dla $P \in \mathcal{P}$. Ponadto permutację gry $\sigma(\varphi(v))$ defniujemy następująco: $\sigma(v)(S, P) = v(\sigma(S), \sigma(P))$. Z kolei przez permutację wartości gry $\sigma(\varphi(v))$ rozumiemy wektor $(\varphi_{\sigma(i)}(v))_{i \in N}$. Przykładowo w grze $v^{(S,P)}$ dla $S = \{1\}$ i $P = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ dla permutacji $\sigma_{1\leftrightarrow 2}$ zamieniającej gracza 1 z 2 (formalnie $\sigma_{1\leftrightarrow 2}(1) = 2$, $\sigma_{1\leftrightarrow 2}(2) = 1$, $\sigma_{1\leftrightarrow 2}(3) = 3$) mamy: $\sigma_{1\leftrightarrow 2}(\{1\}) = \{2\}$, $\sigma_{1\leftrightarrow 2}(\{2, 3\}) = \{1, 3\}$, a zatem $\sigma_{1\leftrightarrow 2}(\{\{1\}, \{2, 3\}\}) = \{\{2\}, \{1, 3\}\}$ oraz $\sigma_{1\leftrightarrow 2}(v^{\{\{1\},\{2,3\}\}}) = v^{\{\{2\},\{1,3\}\}}$.

Przedstawimy teraz rozwiązanie problemu podziału wypłaty dla gier bez efektów zewnętrznych, jakie Shapley opisał w [Shapley53]. Swoją wartość oparł on na czterech podstawowych aksjomatach jakie powinna spełniać szukana funkcja:

[1] Wartość Shapleya została określona dla gier *superaddytywnych* w których koalicja wszystkich graczy musi być najbardziej opłacalnym układem. Założenie superaddytywności jest jednak bardzo silne, dlatego ograniczymy się do założenia, że w omawianych grach koalicja wszystkich graczy jest najbardziej opłacalna.

Aksjomat 1.1 *Efektywność:*
Funkcja φ spełnia aksjomat efektywności*, jeśli cała wypłata zostanie podzielona między graczy, czyli $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$.*

Aksjomat 1.2 *Addytywność:*
Funkcja φ spełnia aksjomat addytywności*, jeśli dla każdych dwóch gier v_1, v_2 zachodzi $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$, gdzie $v' = v_1 + v_2$ jest sumą gier zdefiniowaną równaniem $v'(S, P) = v_1(S, P) + v_2(S, P)$, a $\varphi(v_1) + \varphi(v_2)$ jest sumą wektorów.*

Aksjomat 1.3 *Symetria:*
Funkcja φ spełnia aksjomat symetrii*, jeśli jej wartość jest niezależna od kolejności graczy, czyli dla każdej gry v i permutacji σ zachodzi $\varphi(\sigma(v)) = \sigma(\varphi(v))$.*

Aksjomat 1.4 *Gracz-atrapa (ang. dummy player)*
Funkcja φ spełnia aksjomat gracza-atrapy*, jeśli dla każdego gracza-atrapy i mamy $\varphi_i(v) = 0$. Gracz i jest graczem-atrapą jeśli $\forall_S (v(S \cup \{i\}) = v(S))$, czyli jego obecność w dowolnej koalicji nie wpływa na jej wypłatę.*

Aksjomat efektywności, jako najważniejszy, czasem włączany jest do definicji wartości gry. W literaturze spotyka się także określenie *aksjomat anonimowości* zamiast aksjomat symetrii. Aksjomat addytywności oznacza, że jeżeli gracze pobierają wypłatę z dwóch różnych źródeł, wówczas końcowa wypłata uzyskana przez gracza nie zależy od tego, czy rozpatrujemy te gry osobno czy jako jedną grę.

Zanim zaprezentujemy wartość Shapleya, wprowadźmy jeszcze jedną pomocną definicję:

Definicja 1.7 Wkładem marginalnym *gracza i do koalicji S ($i \in S$) nazywamy wartość $v(S) - v(S \setminus \{i\})$.*

Widzimy teraz, że *gracz-atrapa* z definicji ma zerowy wkład marginalny w każdą koalicję.

Shapley pokazał w swojej pracy, że powyższe aksjomaty wystarczą aby jednoznacznie zdefiniować wartość gry (bez efektów zewnętrznych):

$$Sh_i(v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(|S| - 1)!(|N| - |S|)!}{|N|!}(v(S) - v(S \setminus \{i\})) \tag{1.1}$$

Za wartością tą stoi następująca intuicja. Przyjmijmy że gracze przychodzą na miejsce spotkania w losowej kolejności. Każdy przychodzący gracz wnosi do „koalicji” graczy już obecnych ($S \setminus \{i\}$) swój wkład $v(S) - v(S \setminus \{i\})$. Wartość Shapleya jest wówczas średnią po wszystkich wkładach marginalnych danego gracza. W powyższym wzorze wkład gracza i do koalicji S przemnażamy przez ilość permutacji, dla których i zastaje na miejscu spotkania $S \setminus \{i\}$ - jest ich dokładnie $(|S| - 1)! \cdot (|N| - |S|)!$, ponieważ nie obchodzi nas kolejność przychodzenia graczy przed i oraz po i. Całość dzielimy przez ilość wszystkich permutacji, czyli $|N|!$.

Popatrzmy na prosty przykład obliczania wartości Shapleya (tabela 1.1). Załóżmy, że $N = \{1, 2, 3\}$, każdy gracz sam otrzymuje wypłatę $v(i) = 5$, a koalicja wszystkich graczy jest warta 24: $v(N) = 24$. Wartości koalicji dwuelementowych będą się jednak różnić - niech $v(1, 2) = 12$, $v(1, 3) = 13$ i $v(2, 3) = 14$. Widzimy, że dla dowolnych rozłącznych koalicji S_1, S_2: $v(S_1 \cup S_2) > v(S_1) + v(S_2)$. Własność tę nazywamy *superaddytywnością*. Policzmy wartość Shapleya dla tego przykładu. W tym celu posłużymy się wspomnianą powyżej interpretacją - dla każdej permutacji policzymy wkład marginalny gracza i.

	gracz 1	gracz 2	gracz 3
1,2,3	$v(\{1\}) - v(\emptyset) = 5$	$v(\{1,2\}) - v(\{1\}) = 7$	$v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\}) = 12$
1,3,2	$v(\{1\}) - v(\emptyset) = 5$	$v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\}) = 11$	$v(\{1,3\}) - v(\{1\}) = 8$
2,1,3	$v(\{1,2\}) - v(\{2\}) = 7$	$v(\{2\}) - v(\emptyset) = 5$	$v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\}) = 12$
2,3,1	$v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\}) = 10$	$v(\{2\}) - v(\emptyset) = 5$	$v(\{2,3\}) - v(\{2\}) = 9$
3,1,2	$v(\{1,3\}) - v(\{3\}) = 8$	$v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\}) = 11$	$v(\{3\}) - v(\emptyset) = 5$
3,2,1	$v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\}) = 10$	$v(\{2,3\}) - v(\{3\}) = 9$	$v(\{3\}) - v(\emptyset) = 5$
	$Sh_1(v) = 7,5$	$Sh_2(v) = 8$	$Sh_3(v) = 8,5$

Tabela 1.1: Przykład obliczenia wartości Shapleya dla prostej gry określonej zdefiniowanej następująco: $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 5$, $v(\{1,2\}) = 12$, $v(\{1,3\}) = 13$, $v(\{2,3\}) = 14$ i $v(\{1,2,3\}) = 24$.

Jak widzimy, niewielkie zaburzenie symetrii wśród danych spowodowało oczekiwane niewielkie zaburzenie wartości Shapleya.

1.3. Wymiar przestrzeni gier z efektami zewnętrznymi

O ile łatwo określić wymiar przestrzeni gier bez efektów zewnętrznych (jest on równy ilości podzbiorów N, a zatem 2^N), o tyle wymiar przestrzeni gier w których efekty zewnętrzne mogą występować nie jest już tak elementarnym zagadnieniem. W poniższym dodatku policzymy liczbę zanurzonych koalicji, które stanowią bazę przestrzeni wszystkich gier w postaci funkcji podziału.[2]

Oznaczmy zbiór właściwych zanurzonych koalicji dla n graczy przez EC_n. Przez właściwe zanurzone koalicje rozumiemy (S, P) w których $S \neq \emptyset$, na nich bowiem rozpięta jest przestrzeń naszych gier. Szukamy zatem $|EC_n|$. To zagadnienie kombinatoryczne zdefiniowalibyśmy jako liczbę różnych podziałów n-rozróżnialnych elementów na dowolną ilość nierozróżnialnych koszyków w których zaznaczamy jeden koszyk. Posługując się tą definicją otrzymujemy od razu wzór:

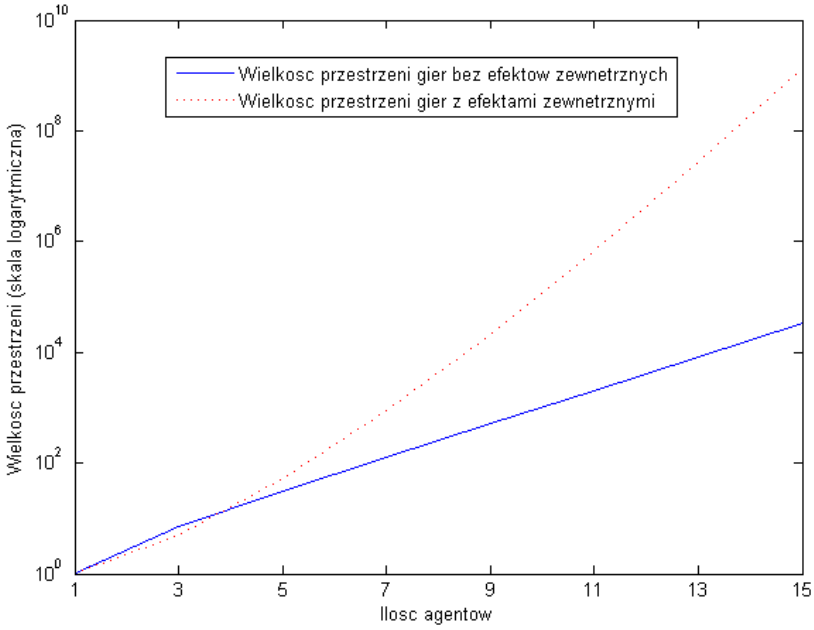
$$|EC_n| = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \cdot k$$

gdzie $\left\{ {n \atop k} \right\}$ oznacza liczbę Stirlinga II rodzaju, czyli liczbę podziałów n rozróżnialnych elementów na k nierozróżnialnych koszyków. W powyższej sumie iterujemy zatem po wielkości podziału uzyskanego z n i dla każdego podziału wielkości k mamy k wyborów koszyka do zaznaczenia.

Zamiast próbować uprościć powyższą sumę podejdźmy do naszego problemu w inny sposób. Poprzednio najpierw tworzyliśmy podział, a potem wybieraliśmy koszyk, teraz najpierw wybierzmy koszyk, a potem dobierzmy do niego podział pozostałych elementów. Niech k oznacza ilość elementów w wybranym koszyku. Ilość podziałów pozostałych elementów jest zatem równa B_{n-k} czyli jest $(n-k)$-tą liczbą Bella (liczba Bella określa właśnie liczbę podziałów elementów na dowolną liczbę koszyków, zachodzi zatem równość $B_n = \sum_{i=0}^{n} \left\{ {n \atop i} \right\}$). Otrzymujemy następujący wzór:

$$|EC_n| = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_{n-k}$$

[2] Dokładniej gry z efektami zewnętrznymi są przestrzenią wektorową, każdy element jest postaci $(a_{(S,P)})_{(S,P)\in EC}$, bazę tworzą wektory jednostkowe określone dla każdego $(S, P) \in EC$ jako $a_{(S,P)} = 1$ i $a_{(S',P')} = 0$ dla $(S', P') \neq (S, P)$ a wymiarem przestrzeni jest rozmiar bazy, czyli $|EC|$.



Rysunek 1.1: Wykres porównujący rozmiar przestrzeni gier bez oraz z efektami zewnętrznymi w zależności od ilości graczy.

Sumujemy od jedynki, ponieważ wybrany koszyk nie może być pusty. Przekształcimy teraz powyższe równanie korzystając z wzoru rekurencyjnego liczb Bella: $B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i$. A zatem:

$$\begin{aligned} |EC_n| &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_{n-k} = (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_{n-k}) - B_n = (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \cdot B_{n-k}) - B_n \\ &= (\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot B_i) - B_n = B_{n+1} - B_n \end{aligned}$$

Uzyskaliśmy następujący wynik:

Lemat 1.1 *Liczba zanurzonych koalicji dla n graczy jest równa $|EC_n| = B_{n+1} - B_n$, gdzie B_k jest k-tą liczbą Bella.*

Przykładowo dla 3 graczy mamy $B_4 - B_3 = 15 - 5 = 10$ zanurzonych koalicji: 1 dla podziału $\{\{1,2,3\}\}$, po 2 dla każdego z 3 podziałów postaci $\{\{i\},\{j,k\}\}$ oraz 3 dla podziału $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$.

Zauważmy jeszcze że powyższy wynik posiada ładną interpretację kombinatoryczną. Dorzućmy do naszych n elementów dodatkowy będący znacznikiem i rozważmy ich podziały. Każdy podział jednoznacznie wyznacza nam podział graczy n z wyróżnionym jednym koszykiem - otrzymujemy go przez wyjęcie znacznika i oznaczenie koszyka w którym był. Ponadto dla dwóch różnych podziałów powiększonej grupy poprzez powyższą operację nie otrzymamy takiego samego podziału z zaznaczonym koszykiem. A zatem każdemu podziałowi powiększonej grupy odpowiada jeden podział zwykłej grupy z zaznaczonym jednym koszykiem. Pozostaje jeszcze zauważyć, że znacznik mógł być w koszyku sam - wtedy otrzymujemy bowiem pusty zaznaczony koszyk. Od liczby podziałów ze znacznikiem musimy zatem odjąć liczbę podziałów bez znacznika (tyle razy znacznik będzie sam). Otrzymujemy zatem uzyskany powyżej rezultat: $B_{n+1} - B_n$.

Na wykresie 1.1 porównaliśmy rozmiary przestrzeni gier z efektami i bez efektów zewnętrznych.

Rozdział 2

Rozszerzenia wartości Shapleya

W tym rozdziale omówimy rozszerzenia wartości Shapleya prezentowane w literaturze. Opisując każdą z nich przedstawimy poza jej wzorem aksjomatyczne wyprowadzenie, które odniesiemy do aksjomatów z poprzednich wartości. Najpierw jednak zdefiniujemy aksjomaty Shapleya w kontekście gier z efektami zewnętrznymi (sekcja 2.1). Omówienie wartości rozpoczniemy od rozszerzeń najprostszych - wartości wolnej od efektów zewnętrznych oraz wartości McQuillina (odpowiednio sekcje 2.2 i 2.3), które do obliczenia wartości gry uwzględniają niewielką część układów koalicyjnych. Następnie przedstawimy wartość Macho-Stadlera, Pereza-Castrillo i Wettsteina (sekcja 2.4). Autorom tej wartości zawdzięczamy *podejście uśredniania*, które omówimy jeszcze w tym wprowadzeniu. Kolejnymi wartościami będą pierwsze chronologicznie wartości Myersona i Bolgera (sekcje 2.5 i 2.6). Przegląd wartości zakończymy w sekcji 2.7 rezultatem z pracy Hu i Yanga opublikowanej w styczniu 2010 roku. Dotychczas nie powstała praca która porównałaby te rozszerzenia, postaramy się zmierzyć z tym zagadnieniem - na koniec w podsumowaniu (sekcja 2.8) zestawimy cechy różnych wartości w formie tabeli oraz zaproponujemy twierdzenie pokazujące relację między aksjomatem marginalności i wzmocnieniem aksjomatu gracza-atrapy i udowodnimy je.

Zanim przejdziemy do przedstawienia aksjomatów i omówienia wartości, wprowadźmy pojęcia jakich będziemy używać w tym rozdziale. Shapley definiował swoją wartość w oparciu o pojęcie wkładu marginalnego. O ile w grze bez efektów zewnętrznych definicja wkładu gracza do koalicji jest oczywista, to na wiele sposobów można sformułować pojęcie wkładu gracza do zanurzonej koalicji - wartość zysku z przyjścia do koalicji zależy bowiem od tego z jakiej koalicji gracz przychodzi. Określenie co tak naprawdę nazywamy wkładem marginalnym gracza do koalicji w danym układzie koalicyjnym często jest kluczowe w aksjomatycznym wyprowadzeniu rozszerzonej wartości Shapleya. Jak zobaczymy Bolger, De Clippel i Serrano oraz Hu i Yang w pracach [Bolger89], [ClippelSerrano08] i [HuYang09] zaproponowali 3 różne pojęcia wkładu marginalnego, nie skłaniając się ku żadnemu w tym wstępie wprowadzimy tylko pojęcie elementarnego wkładu marginalnego, które przyda nam się później:

Definicja 2.1 Elementarnym wkładem marginalnym *gracza i do koalicji S ($i \in S$) w układzie koalicyjnym P przy przejściu z koalicji $T \in P \setminus S$ nazywamy wartość $mc_{(i,S,P,T)}(v)$ określoną następująco: $mc_{(i,S,P,T)}(v) = v(S, P) - v(S_{-i}, tr_i^T(P))$*

Przykładowo dla zanurzonej koalicji $(S, P) = (\{1, 2\}, \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\})$ gracz 1 może opuścić koalicję $\{1, 2\}$ i przejść do dwóch innych niepustych koalicji - $\{3\}$ oraz $\{4, 5\}$ lub stworzyć swoją własną (czyli przejść do koalicji $\emptyset$). W ten sposób powstać mogą trzy różne układy koalicyjne - $tr_1^{\{3\}}(P) = \{\{2\}, \{1, 3\}, \{4, 5\}\}$, $tr_1^{\{4,5\}}(P) = \{\{2\}, \{3\}, \{1, 4, 5\}\}$ oraz $tr_1^{\emptyset}(P) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$. Elementarnym wkładem marginalnym nazywamy wówczas różnice pomiędzy wartością koalicji $\{1,2\}$ w wyjściowym układzie P, a wartością tej samej koalicji bez gracza 1 (czyli $\{2\}$) w układzie nowopowstałym, czyli np. $mc_{(1,S,P,\{3\})}(v) = v(S,P) - v(S_{-1}, tr_1^{\{3\}}(P)) = v(\{1,2\},\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}) - v(\{2\},\{\{2\},\{1,3\},\{4,5\}\})$.

Jak zobaczymy definicja gracza atrapy w grach z efektami zewnętrznymi będzie opierała się właśnie na zerowym elementarnym wkładzie marginalnym do każdej zanurzonej koalicji przy przejściu z każdej innej koalicji w układzie.

Często rozszerzenia definiowane są poprzez wyznaczenie wartości koalicji na podstawie jej wartości w różnych układach koalicyjnych. Określenie jednej wartości dla każdej koalicji pozwala nam zbudować grę bez efektów zewnętrznych, która nazywamy *grą uśrednioną*. Wówczas wypłaty końcowe wyznacza zwykła wartość Shapleya policzona w grze uśrednionej.

Takie podejście, opisane w [MachoStadler:et:al:07], nazwane zostało *podejściem uśredniania*. Formalnie, definiujemy grę $\hat{v}$ bez efektów zewnętrznych następująco:

$$\hat{v}(S) = \sum_{P \in \mathcal{P}, S \in P} \alpha(S,P) v(S,P)$$

przy czym $\sum_{P \in \mathcal{P}, S \in P} \alpha(S,P) = 1$. Wartość $\hat{v}(S)$ jest zatem średnią ważoną po wszystkich układach koalicyjnych zawierających S. Wartość gry policzona na podstawie *podejścia uśredniania* jest wówczas równa wartości gry $\hat{v}$ liczonej zgodnie z oryginalną wartością Shapleya - $\varphi(v) = Sh(\hat{v})$.

2.1. Aksjomaty gier z efektami zewnętrznymi

Popatrzmy jeszcze raz na zdefiniowane w pierwszym rozdziale aksjomaty w kontekście gier z efektami zewnętrzymi. Aksjomat efektywności oraz aksjomat symetrii bezpośrednio przenoszą się na gry z efektami zewnętrznymi:

Aksjomat 2.1 *Efektywność (w grach z efektami zewnętrznymi):*
Funkcja φ spełnia aksjomat efektywności*, jeśli cała wypłata zostanie podzielona między graczy, czyli $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N, \{N\})$.*

Aksjomat 2.2 *Symetria (w grach z efektami zewnętrznymi):*
Funkcja φ spełnia aksjomat symetrii*, jeśli jej wartość jest niezależna od kolejności graczy, czyli dla każdej gry v i permutacji σ zachodzi $\varphi(\sigma(v)) = \sigma(\varphi(v))$.*

Aksjomat addytywności zastąpimy aksjomatem liniowości:

Aksjomat 2.3 *Liniowość (w grach z efektami zewnętrznymi):*
Funkcja φ spełnia aksjomat liniowości, jeśli:

1. *dla każdych dwóch gier v_1, v_2 zachodzi $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$*
2. *dla każdej gry v oraz stałej $\lambda \in \mathbb{R}$ zachodzi $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$, gdzie grę λv definiujemy przez przemnożenie wartości dla każdej zanurzonej koalicji przez λ, czyli $(\lambda v)(S,P) = \lambda \cdot v(S,P)$.*

Aksjomaty liniowości i addytywności są tożsame w przypadku gier bez efektów zewnętrznych, jednak jak pokazali Macho-Stadler, Perez-Castrillo i Wettstein w [MachoStadler:et:al:07] w ogólności istnieja gry spełniające podpunkt pierwszy powyższej definicji i niespełniające podpunktu drugiego. Dokładniej, addytywność wymusza liniowość tylko w stosunku do liniowych kombinacji gier z wymiernymi współczynnikami.

Z kolei w przypadku ostatniego aksjomatu pojawia się niejednoznaczność w zdefiniowaniu kiedy gracza możemy nazwać graczem-atrapą. Przyjmijmy na razie najbardziej popularną wersję tego aksjomatu zgodną z [Bolger89] i [MachoStadler:et:al:07].

Definicja 2.2 *Gracz i jest graczem-atrapą w grze z efektami zewnętrznymi jeżeli dla każdej koalicji do jakiej należy przy dowolnym układzie koalicyjnym jego wyjście z koalicji nie wpływa na wypłatę, tzn.* $\forall_{(S,P)\in EC, i\in S}\forall_{T\in P\setminus\{S\}} v(S,P) = v(S_{-i}, tr_i^T(P))$.

Aksjomat 2.4 *Gracz-atrapa (w grach z efektami zewnętrznymi)*
Funkcja φ *spełnia aksjomat gracza-atrapy, jeśli dla każdego gracza-atrapy* $\varphi_i(v) = 0$.

De Clippel i Serrano w [ClippelSerrano08] nazwali tę definicję „graczem-atrapą *w silnym znaczeniu*”, a sami użyli słabszego warunku skutkującego mocniejszym aksjomatem. Przedstawimy go później.

Zaznaczmy jeszcze, że powyższy warunek implikuje także fakt, że przy zanurzonej koalicji (S, P) zmiana przynależności gracza-atrapy $i \notin S$ między koalicjami $P \setminus \{S\}$ nie wpływa na zmianę wypłaty dla S. Wynika to z prostej przechodniości - niech bowiem $P = \{S, T, T'\} \cup P'$ oraz $i \in T$, wówczas: $v(S, \{S, T, T'\} \cup P') = v(S_{+i}, \{S_{+i}, T_{-i}, T'\} \cup P') = v(S, \{S, T_{-i}, T'_{+i}\} \cup P')$ czyli $v(S, P) = v(S, tr_i^{T'})$.

Przedstawione powyżej aksjomaty będziemy czasem nazywać *podstawowymi* lub *wyjściowymi* aksjomatami.

2.2. Wartość wolna od efektów zewnętrznych *(ang. externality-free)*

Pierwszym i najprostszym rozszerzeniem wartości Shapleya jest wartość wolna od efektów zewnętrznych. Nazwa bierze się stąd, że przy liczeniu tej wartości uwzględniamy tylko układy koalicyjne, na które nie oddziałują efekty zewnętrzne.

Wprowadźmy pomocniczą funkcję *sing* która dla danego podzbioru graczy zwraca zbiór ich singletonów, tzn. $sing(S) = \{\{i\} : i \in S\}$. Zdefiniujmy teraz grę $v^{sing} : 2^N \to \mathbb{R}$ w postaci funkcji charakterystycznej w następujący sposób:

$$v^{sing}(S) = v(S, \{S\} \cup sing(N \setminus S))$$

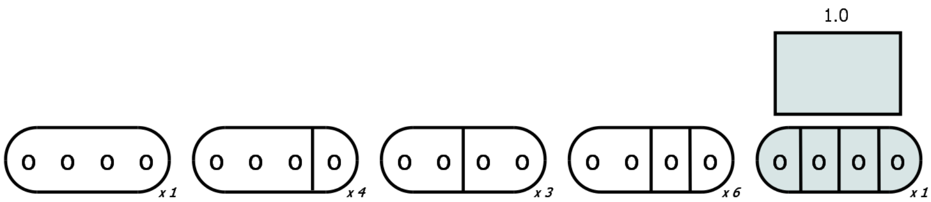
Do policzenia wartości koalicji używamy tylko układu w którym pozostali gracze nie tworzą żadnej koalicji i nie generują efektów zewnętrznych. Widzimy wyraźnie, że wartość ta jest wynikiem *podejścia uśredniania* dla wag $\alpha(S, \{S\} \cup sing(N \setminus S)) = 1$ oraz $\alpha(S, P) = 0$ kiedy $P \neq \{S\} \cup sing(N \setminus S)$. Wagi te przedstawilismy na rysunku 2.1.

Wartość Shapleya wolną od efektów zewnętrznych φ^{sing} definiujemy teraz następująco:

$$\varphi_i^{sing}(v) = \sum_{S\subseteq N, i\in S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!}(v^{sing}(S) - v^{sing}(S_{-i})) \qquad (2.1)$$

Intuicja stojąca za tą wartością jest analogiczna do tej proponowanej przez Shapleya z tą tylko różnicą, że zakładamy że pozostali gracze pozostają niezależni nie tworząc żadnej wspólnej koalicji.

Wartość wolna od efektów zewnętrznych została po raz pierwszy przedstawiona w pracy [PhamDoNorde07]. Pham Do i Norde pokazali, że jest ona jedyną wartością spełniającą aksjomaty efektywności, addytywności, symetrii i gracza-atrapy, jednakże aksjomaty symetrii i gracza-atrapy różnią się od tych przyjętych przez nas wcześniej. Zaprezentujemy je teraz.



Rysunek 2.1: Diagram przedstawiający wagi w podejściu uśredniania w zależności od konfiguracji utworzonej przez graczy $N \setminus S$ dla $|N \setminus S| = 4$. Wartość wolna od efektów zewnętrznych uwzględnia tylko układ w którym wszyscy gracze poza S są osobno nie tworząc żadnej wspólnej koalicji.

Aksjomat 2.5 *Symetria marginalna:*
Funkcja φ spełnia aksjomat symetrii marginalnej, jeśli dla każdych marginalnie symetrycznych *graczy i, j zachodzi $\varphi_i(v) = \varphi_j(v)$. Graczy i, j nazywamy marginalnie symetrycznymi, jeżeli dla wszystkich układów pozostałych graczy P' i każdej koalicji $S \in P'$ zachodzi równość $v(S_{+i}, \{S_{+i}, \{j\}\} \cup P') = v(S_{+j}, \{S_{+j}, \{i\}\} \cup P')$.*

Standardowo dwóch graczy i, j nazywamy symetrycznymi, kiedy ich zamiana w dowolnej zanurzonej koalicji nie wpływa na wynik ($v(\sigma_{i\leftrightarrow j}(S, P)) = v(S, P)$ gdzie $\sigma_{i\leftrightarrow j}$ zamienia tylko graczy i i j). Korzystając z podstawowego aksjomatu symetrii otrzymujemy, że dla graczy symetrycznych w takim znaczeniu wartość φ powinna być równa ($\varphi(\sigma_{i\leftrightarrow j}(v)) = \sigma_{i\leftrightarrow j}(\varphi(v))$, a zatem $\varphi_i(\sigma_{i\leftrightarrow j}(v)) = \varphi_j(v)$ czyli dla każdej zanurzonej koalicji (S, P): $\varphi_i(v(\sigma_{i\leftrightarrow j}(S, P))) = \varphi_i(v(S, P)) = \varphi_j(v(S, P))$). Powyższy aksjomat natomiast nazywa graczy i, j symetrycznymi (marginalnie), kiedy ich zamiana tylko w niektórych zanurzonych koalicjach (S, P) nie wpływa na wynik - dokładniej w tych, w których jeden z graczy jest w S, a drugi jest sam w P. Warunek na bycie graczami symetrycznymi marginalnie jest zatem słabszy niż na bycie graczami „w pełni" symetrycznymi.

Prześledźmy to na przykładzie. Niech $N = \{1, 2, 3\}$. Aby gracze 1 i 2 byli symetryczni marginalnie spełnione musza być następujące warunki na funkcję gry: $v(\{1\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}) = v(\{2\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\})$, $v(\{1, 3\}, \{\{1, 3\}, \{2\}\}) = v(\{2, 3\}, \{\{2, 3\}, \{1\}\})$. Aby byli w pełni symetryczni wymagane jest też spełnianie zależności $v(\{1\}, \{\{1\}, \{2, 3\}\}) = v(\{2\}, \{\{2\}, \{1, 3\}\})$.

Założenie innego aksjomatu symetryczności nie było jednak potrzebne - jak pokazali później de Clippel i Serrano w [ClippelSerrano08] wartość wolna od efektów zewnętrznych jest także jedyną wartością spełniającą pozostałe aksjomaty i aksjomat symetryczności, przyjęty przez nas wcześniej (aksjomat 2.2). Skoro nasze wyjściowe aksjomaty nie wystarczają aby zdefiniować unikalną wartość gry, kluczowy dla tej wartości musi być silniejszy aksjomat gracza-atrapy. Zanim przejdziemy do niego zdefiniujemy potrzebne w jego definicji pojęcie *właściwego wkładu marginalnego.*

Definicja 2.3 Właściwym marginalnym wkładem *gracza $i \in S$ do koalicji zanurzonej $(S, P) \in EC$ nazywamy wartość $mc_{(i,S,P)}(v)$ określoną następująco:*

$$mc_{(i,S,P)}(v) = v(S, P) - v(S_{-i}, \{S_{-i}, \{i\}\} \cup (P \setminus \{S\}))$$

Wektorem właściwych wkładów marginalnych *nazywamy $mc_i(v) = (mc_{(i,S,P)}(v))_{(S,P)\in EC, i\in S}$.*

Powyższa definicja pochodzi z pracy [ClippelSerrano08], w której przejście gracza z zanurzonej koalicji (S, P) do T autorzy rozdzielają na dwa kroki. W pierwszym kroku, gracz opuszcza koalicję S i przez chwilę jest niezależny - generuje to *właściwy wkład marginalny* gracza do koalicji. Drugim krokiem jest złączenie koalicji $\{i\}$ z koalicją T, co oczywiście wpływa na wartość S_{-i}, jednak według autorów jest raczej efektem zewnętrznym łączenia koalicji, aniżeli wkładem gracza w koalicję S. Stąd bierze się powyższa definicja która pociąga za sobą poniższy aksjomat.

Aksjomat 2.6 *Gracz-atrapa w sensie właściwego wkładu marginalnego*
Funkcja φ spełnia aksjomat gracza-atrapy w sensie właściwego wkładu marginalnego, jeśli dla każdego gracza i, dla którego wektor właściwych wkładów marginalnych $mc_i(v)$ jest zerowy zachodzi $\varphi_i(v) = 0$.

Widzimy, że przy takiej definicji dużo łatwiej sklasyfikować gracza jako gracza-atrapę - definicja ta uznaje za takiego każdego gracza, który wchodząc do dowolnej koalicji nie zmienia jej wartości, jednak może „mieszać”, tzn. wpływać na wartość koalicji przechodząc między pozostałymi koalicjami w danym układzie. Przykładowo: mimo że $v(\{1\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}) \neq v(\{1\}, \{\{1\}, \{2, 3\}\})$ to gracze 2 i 3 mogą zostać uznani za graczy-atrapy, a przecież ich ułożenie wpływa na wartość koalicji $\{1\}$. Do tej definicji bardziej pasuje inne tłumaczenie angielskiego określenia *dummy* - figurant. Według powyższej definicji figuranci także nie dostają nic ze wspólnej końcowej wypłaty.

Wzmocnienie aksjomatu gracza-atrapy jest tylko jednym ze sposobów aksjomatycznego wyprowadzenia wartości wolnej od efektów zewnętrznych. W swojej pracy de Clippel i Serrano uzyskali ją także korzystając z ciekawego aksjomatu marginalności właściwej. Mówi on o tym, że rozszerzona wartość Shapleya dla gracza powinna zależeć jedynie od jego wektora właściwych wkładów marginalnych.

Aksjomat 2.7 *Marginalność właściwa*
Funkcja φ spełnia aksjomat marginalności właściwej *jeśli dla każdego gracza i oraz każdych dwóch gier v_1, v_2 jeżeli $mc_i(v_1) = mc_i(v_2)$ to $\varphi_i(v_1) = \varphi_i(v_2)$.*

Aksjomat ten razem z aksjomatami efektywności oraz symetrii (zastępuje on zatem aksjomat gracza-atrapy i aksjomat addytywności) implikuje wartość wolną od efektów zewnętrznych opisaną w tym rozdziale.

2.3. Wartość McQuillina

Jako drugie rozszerzenie wartości Shapleya omówimy wartość McQuillina (oznaczaną przez φ^{McQ}) wprowadzoną w [McQuillin08]. Mimo pozornej prostoty wartość ta poparta jest niebagatelną teorią.

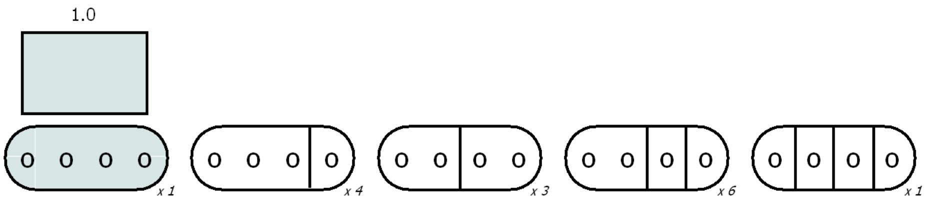
Podobnie jak w przypadku wartości wolnej od efektów zewnętrznych wartość gry wyliczymy tworząc grę bez efektów zewnętrznych i obliczając jej wartość Shapleya. Zdefiniujmy grę $v^{McQ} : 2^N \to \mathbb{R}$ następująco:

$$v^{McQ}(S) = v(S, \{S, N \setminus S\})$$

Wówczas wartość McQuillina φ^{McQ} ma postać:

$$\varphi_i^{GSV}(v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(|S| - 1)!(|N| - |S|)!}{|N|!} (v^{GSV}(S) - v^{GSV}(S_{-i})) \tag{2.2}$$

Znowu ignorujemy większość wartości, biorąc pod uwagę tylko jeden układ koalicyjny dla każdej koalicji - tym razem jest to układ, w którym wszyscy gracze poza tą koalicją łączą się tworząc opozycyjną koalicję. Także do tej sytuacji możemy dopasować *podejście uśredniania* stosując wagi $\alpha(S, \{S, N \setminus S\}) = 1$ i $\alpha(S, P) = 0$ dla pozostałych układów koalicyjnych P. Wagi te przedstawiliśmy na rysunku 2.2.



Rysunek 2.2: Diagram przedstawiający wagi w podejściu uśredniania w zależności od konfiguracji utworzonej przez graczy $N \setminus S$ dla $|N \setminus S| = 4$. Wartość McQuillina uwzględnia tylko układ w którym wszyscy gracze poza S tworzą jedną koalicję.

Po raz kolejny możemy użyć intuicji Shapleya, zaznaczając jednak że pozostali gracze którzy nie przybyli jeszcze na miejsce spotkania tworzą jedną koalicję.

Poza czterema aksjomatami zaprezentowanych przez nas we wprowadzeniu do tego rozdziału McQuillin użył jeszcze trzech nowych: aksjomatu słabej monotoniczności, aksjomatu uogólniania oraz aksjomatu rekurencji.

Aksjomat 2.8 *Słaba monotoniczność*
Funkcja φ spełnia aksjomat słabej monotoniczności jeśli dla gry $v^{(S,P)}$ i dowolnego gracza $i \in S$ zachodzi nierówność $\varphi_i(v^{(S,P)}) \geqslant 0$.

Aksjomat słabej monotoniczności dotyczy gier $v^{(S,P)}$ zdefiniowanych przez nas na końcu sekcji 1.1, w których jedyną niezerową wypłatę otrzymuje koalicja S jeżeli pozostali gracze utworzą odpowiedni układ koalicyjny P. Aksjomat ten mówi, że w takiej sytuacji wypłata każdego gracza tworzącego koalicję S nie powinna być mniejsza od zera. To założenie jest bardzo intuicyjne - nie powinniśmy karać graczy, którzy jako jedyni mogą wnieść jakąś wypłatę do gry. Mimo że rzadko używany do wyprowadzenia wartości Shapleya ten aksjomat jest spełniany przez prawie wszystkie opisane w tej pracy wartości.

Kolejny aksjomat dotyczy *uogólnionej wartości gry*. Uogólnioną wartością gry nazywamy funkcję, która zwraca wartość nie tylko dla pojedynczego gracza, a także dla zanurzonych koalicji. W konsekwencji z gry v dostajemy nową grę - mamy bowiem zdefiniowaną całą nową funkcję podziału. Uogólnioną zwykłą wartość gry $\varphi(v)$ będziemy oznaczać znaczkiem tyldy $\tilde{\varphi}(v)$, a jej wynik dla zanurzonej koalicji (S, P) jako $\tilde{\varphi}_{(S,P)}(v)$. Przyjmujemy, że $\tilde{\varphi}_{(\{i\},sing(N))}(v) = \varphi_i(v)$.

Aksjomat 2.9 *Uogólniania*
Uogólniona funkcja $\tilde{\varphi}(v)$ spełnia aksjomat uogólniania jeśli dla każdej zanurzonej koalicji (S, P) wartość na niej określona jest zgodna z wartością uzyskaną następującym algorytmem:

- *wybieramy z każdej koalicji w P jednego reprezentanta*
- *tworzymy grę v' w której wszyscy niereprezentanci są graczami-atrapami, a wartość każdej koalicji reprezentantów jest równa wartości koalicji złożonej z sumy koalicji jakie oni reprezentują w grze v*

Rozpatrzmy znaczenie powyższego aksjomatu na przykładzie. Niech $N = \{1, 2, 3\}$, v będzie naszą funkcją podziału i $\varphi(v)$ zwykłą wartością Shapleya. Przeanalizujmy podział $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$. Aby policzyć uogólnioną wartości Shapleya $\tilde{\varphi}(v)$ koalicji w tym układzie musimy wybrać po jednym reprezentancie z koalicji - niech będą to gracz 2 i 3 - i policzyć zwykła (nieuogólnioną) wartość Shapleya φ dla nowej gry v' zdefiniowanej następująco: $v'(\{2\}, \{\{2\}, \{3\}, \{1\}\}) = v(\{1, 2\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\})$,$v'(\{3\}, \{\{2\}, \{3\}, \{1\}\}) = v(\{3\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\})$

i $v'(\{2,3\},\{\{2,3\},\{1\}\}) = v(\{1,2,3\},\{\{1,2,3\}\})$.[1] Teraz $\tilde{\varphi}_{(\{1,2\},\{\{1,2\},\{3\}\})}(v) = \varphi_2(v')$ oraz $\tilde{\varphi}_{(\{3\},\{\{1,2\},\{3\}\})}(v) = \varphi_3(v')$.

Przedstawmy ostatni aksjomat McQuillina. Aksjomat ten mówi, że uogólniona wartość gry powinna być punktem stałym, tzn. rozwiązaniem rozwiązania powinno być rozwiązanie.

Aksjomat 2.10 *Rekurencja*[2]
Uogólniona funkcja $\tilde{\varphi}$ spełnia aksjomat rekurencji, jeśli $\tilde{\varphi}(v) = \tilde{\varphi}(\tilde{\varphi}(v))$.

Popatrzmy na przykład z tabeli 2.1, który unaoczni esencje podejścia McQuillina. Widzimy że wyjściowa gra jest bardzo prosta, od gry $v^{(N,\{N\})}$ (w której tylko wspólna koalicja wszystkich graczy otrzymuje wartość) różni ją tylko zaburzenie wartości dla drugiego gracza. Do policzenia wyniku zastosowaliśmy wartość Myersona. Uogólnienie dało rozciągnięcie tej wartości na wszystkie koalicję. Wynik poprzedniej gry traktujemy teraz jako wejście nowej i obliczamy kolejny raz wartość gry. McQuillin pokazał, że jeżeli w powyższej operacji zastąpimy wartość Myersona dowolna wartością spełniającą podstawowe cztery aksjomaty oraz aksjomat słabej monotoniczności, wówczas z kolejnymi iteracjami wartość graczy będzie zmierzać do jego wartości φ^{McQ}.

S	P	$v(S,P)$	$\tilde{\varphi}_{(S,P)}(v)$	$(\tilde{\varphi}(v))(S,P)$	$\tilde{\varphi}_{(S,P)}(\tilde{\varphi}(v))$	
$\{1\}$	$\{1\},\{2\},\{3\}$	0	1/6	1/6	5/12	$\cdots$
$\{2\}$	$\{1\},\{2\},\{3\}$	-1	2/3	2/3	1/6	$\cdots$
$\{3\}$	$\{1\},\{2\},\{3\}$	0	1/6	1/6	5/12	$\cdots$
$\{1\}$	$\{1\},\{2,3\}$	0	1/2	1/2	1/2	$\cdots$
$\{2\}$	$\{1,3\},\{2\}$	0	1/2	1/2	1/2	$\cdots$
$\{3\}$	$\{1,2\},\{3\}$	0	1/2	1/2	1/2	$\cdots$
$\{1,2\}$	$\{1,2\},\{3\}$	0	1/2	1/2	1/2	$\cdots$
$\{1,3\}$	$\{1,3\},\{2\}$	0	1/2	1/2	1/2	$\cdots$
$\{2,3\}$	$\{1\},\{2,3\}$	0	1/2	1/2	1/2	$\cdots$
$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	1	1	1	1	$\cdots$

Tabela 2.1: Przykład użycia mechanizmu rekurencji i uogólniania. Wartość $\tilde{\varphi}$ jest wartością Myersona uogólnioną zgodnie z *zasadą uogólniania.*

Na podstawie powyższych aksjomatów McQuillin skonstruował rozszerzoną, uogólnioną wartość Shapleya (oznaczaną w literaturze jako $EGSV$ od angielskiego *Extended, Generalized Shapley Value*). Po obcięciu jej do wartości dla pojedynczych graczy, a nie zanurzonych koalicji (jest to operacja odwrotna do uogólniania z aksjomatu 2.9) otrzymujemy zwykłą rozszerzoną wartość Shapleya (czyli ESV, bo tak oznacza się rozszerzone wartości Shapleya w angielskiej literaturze), którą przedstawiliśmy w tym rozdziale.

[1] Nie określiliśmy tu funkcji na całej dziedzinie, jednak fakt, że gracz 1 jest graczem atrapą implikuje równości $v'(\{2\},\{\{2\},\{3\},\{1\}\}) = v'(\{2\},\{\{2\},\{3,1\}\}) = v'(\{2,1\},\{\{2,1\},\{3\}\})$, $v'(\{3\},\{\{2\},\{3\},\{1\}\}) = v'(\{3,1\},\{\{2\},\{3,1\}\}) = v'(\{3\},\{\{2,1\},\{3\}\})$ i w końcu $v'(\{2,3\},\{\{2,3\},\{1\}\}) = v'(\{1,2,3\},\{\{1,2,3\}\})$. Kusząca jest chęć wyrzucenia gracza 1 z gry i zbudowania gry dla dwóch graczy 2 i 3, jednak nasza definicja gracza-atrapy nie wymusza braku wpływu 1 na wynik końcowy gry. W pracy [McQuillin08] wprowadza aksjomat *uogólnionego gracza-atrapy* jednak dodanie go do zbioru aksjomatów nie jest potrzebne do końcowego rezultatu.

[2] McQuillin nazwał tą własność funkcji *własnością rekurencji*, jednak tak naprawdę chodzi o *idempotentność.*

2.4. Wartość Macho-Stadlera, Pereza-Castrillo oraz Wettsteina

Kolejne rozszerzenie wartości Shapleya jakie omówimy zostało zaproponowane w pracy [MachoStadler:et:al:07]. Zostało ono uzyskane na drodze *podejścia uśredniania*, przy czym zastosowane wagi (w odróżnieniu od poprzednich rozszerzeń) uwzględniają wszystkie podziały po których sumujemy, jednak z różną mocą. Przy obliczaniu wypłaty koalicji S w uśrednionej grze podziałowi P przypisujemy wagę

$$\alpha^*(S,P) = \frac{\prod_{T \in P \setminus S}(|T|-1)!}{(|N|-|S|)!},$$

którą możemy utożsamiać z prawdopobieństwem utworzenia się podziału P przy założeniu że utworzyła się koalicja S.[3] Przykład ukształtowania się wag dla $|N \setminus S| = 4$ przedstawiliśmy na diagramie 2.3.

Gra uśredniona jest zatem postaci:

$$v^*(S) = \sum_{P \in \mathcal{P}, S \in P} \alpha^*(S,P) v(S,P) = \sum_{P \in \mathcal{P}, S \in P} \frac{\prod_{T \in P \setminus \{S\}}(|T|-1)!}{(|N|-|S|)!} v(S,P),$$

a końcowa wartość:

$$\varphi_i^*(v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!}(v^*(S) - v^*(S_{-i})) \tag{2.3}$$

Do wag tych postaci doprowadziły autorów aksjomaty *silnej symetrii* oraz *podobnego wpływu*. Niech $\sigma_{N \setminus S}$ oznacza permutację zmieniającą ułożenie tylko graczy $N \setminus S$. Wówczas $\sigma_{N \setminus S}(P)$ dla $S \in P$ oznacza dowolny podział zawierający S w którym zachowana jest liczebności pozostałych koalicji.

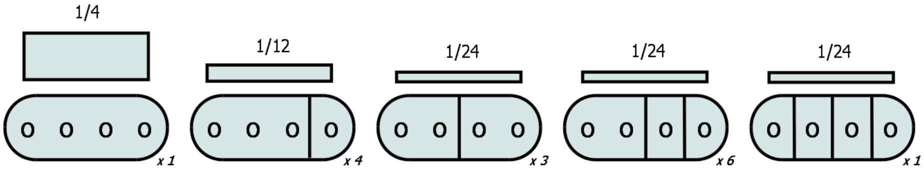
Aksjomat 2.11 *Silna symetria:*
Funkcja φ spełnia aksjomat silnej symetrii, jeśli:

1. *dla każdej permutacji σ zachodzi $\varphi(\sigma(v)) = \sigma(\varphi(v))$*
2. *dla każdej zanurzonej koalicji $(S,P) \in EC$ i dla każdej permutacji $\sigma_{N \setminus S}$ zachodzi $\varphi(\sigma_{N \setminus S}(v)) = \varphi(v)$*

Aksjomat silnej symetrii mówi, że wartość nie powinna się zmienić po spermutowaniu graczy $N \setminus S$ dla każdej zanurzonej koalicji (S,P). Oznacza to zatem, że w grach postaci $v^{(S,P)}$ wszyscy gracze spoza S powinni dostać taką samą wypłatę. Niech bowiem $P = \{S, I, J\} \cup P'$, $i \in I$, $j \in J$ oraz $A_{i \to j}$ oznacza $(A_{-i})_{+j}$. Wówczas $\varphi_i(v^{(S,\{S,I,J\} \cup P')}) = \varphi_j(v^{(S,\{S,I_{i \to j},J_{j \to i}\} \cup P')}) = \varphi_j(v^{(S,\{S,I,J\} \cup P')})$ przy czym pierwsza równość wynika z pierwszego, a druga z drugiego podpunktu aksjomatu o silnej symetrii.

Autorzy pokazali ponadto, że rozszerzoną wartość Shapleya spełniającą podstawowe aksjomaty liniowości i gracza-atrapy można skonstruować za pomocą *podejścia uśredniania* wtedy i tylko wtedy gdy spełnia aksjomat silnej symetrii. Aby uzyskać unikalną wartość do zbioru dotychczasowych aksjomatów w pracy [MachoStadler:et:al:07] doszedł jeszcze jeden „drobny” aksjomat.

[3] Ta intuicja pochodzi od zliczania ilości permutacji „generujących” dany podział. Każdą permutację (np. $\sigma(1,2,3,4,5,6) = (3,5,4,1,2,6)$) możemy przedstawić na dokładnie jeden sposób w formie podziału na rozłączne cykle $((3,4,1)(5,2)(6)$, bo $\sigma(1) = 3$, $\sigma(3) = 4$ i $\sigma(4) = 1$ generuje cykl $(3,4,1)$ itd.). Zauważmy, że z grupy k liczb możemy skonstruować dokładnie $(k-1)!$ cykli, zatem nasz podział na cykle jest tylko jednym z $(3-1)!(2-1)!(1-1)!$ generujących takie rozdzielenie liczb na grupy (grupy nie uwzględnianiają kolejności wewnątrz). Skoro wszystkich permutacji jest $6!$ to iloraz tych liczb jest prawdopodobieństwem uzyskania takiego podziału liczb na grupy.



Rysunek 2.3: Diagram przedstawiający wagi w podejściu uśredniania w zależności od konfiguracji utworzonej przez graczy $N \setminus S$ dla $|N \setminus S| = 4$. Wartość φ^* uwzględnia wszystkie układy, przypisując większe wagi układom w których istnieją duże koalicje.

Aksjomat 2.12 *Podobny wpływ:*
Funkcja φ spełnia aksjomat podobnego wpływu, jeśli dla dwóch gier v_1 i v_2 w których gracze i oraz j mają podobny wpływ *zachodzą równości $\varphi_i(v_1) = \varphi_i(v_2)$ i $\varphi_j(v_1) = \varphi_j(v_2)$.*
Gracze i oraz j mają podobny wpływ *w grach v_1, v_2, kiedy zachodzą warunki:*

- *dla każdej zanurzonej koalicji $(T, Q) \in EC \setminus \{(S, P_1), (S, P_2)\}$ zachodzi $v_1(T, Q) = v_2(T, Q)$,*
- *$v_1(S, P_1) = v_2(S, P_2)$ oraz $v_1(S, P_2) = v_2(S, P_1)$*
- *jedyną różnicą między podziałami P_1 a P_2 jest to, że $\{i, j\} \in P_1 \setminus S$ oraz $\{i\}, \{j\} \in P_2 \setminus S$*

Aksjomat ten mówi o tym, że przy dwóch prawie identycznych grach wypłaty graczy którzy wpływają na tę lekką modyfikację nie powinny się różnić. W naszych prostych grach $v^{(S,P)}$ oznacza to, że $\varphi_i(v^{(S,P\cup\{\{i\},\{j\}\})}) = \varphi_i(v^{(S,P\cup\{\{i,j\}\})})$.

Na koniec wspomnimy jeszcze o aksjomacie, który nie był potrzebny do wyprowadzenia wartości φ^*, jednak który jest przez nią spełniony. Aksjomat ten jest wzmocnieniem aksjomatu gracza-atrapy. Nasza pierwotna wersja zakłada jedynie, że gracz-atrapa otrzyma zerową wypłatę, nie mówi jednak nic o wpływie obecności „zerowego" gracza na wartości pozostałych. *Silny aksjomat gracza-atrapy* mówi, że φ powinna przydzielać identyczne wypłaty jak w grze bez niego.

Aksjomat 2.13 *Gracz-atrapa (silny aksjomat):*
Funkcja φ spełnia silny aksjomat gracza-atrapy jeżeli dla każdego gracza-atrapy j zachodzi $\forall_{i \in N_{-j}}(\varphi_i(N, v) = \varphi_i(N_{-j}, v))$

2.5. Wartość Myersona

Wartość Myersona, jaką zaprezentujemy w tym rozdziale, jest w zasadzie pierwszym rozszerzeniem wartości Shapleya do gier z efektami zewnętrznymi zaprezentowanym w literaturze. W swojej pracy z 1977 roku Myerson oparł budowę wartości Shapleya na silnym *aksjomacie nośnika* (*ang. carrier*).

Wartość ta nie spełnia aksjomatu silnej symetrii i nie może być zbudowana za pomocą *podejścia uśredniania*. Zwarta formuła wartości Myersona - oznaczanej przez nas φ^M - wygląda następująco:

$$\varphi_i^M(v) = \sum_{(S,P)\in EC} (-1)^{|P|-1}(|P|-1)!(\frac{1}{|N|} - \sum_{T\in P\setminus\{S,P(i)\}} \frac{1}{(|P|-1)(|N|-|T|)})v(S,P) \quad (2.4)$$

Myerson pokazał w swojej pracy, że jego wartość jest jedyną wartością spełniającą aksjomat symetryczności, aksjomat addytywności (czyli „połowę” naszego aksjomatu liniowości) oraz aksjomat nośnika, który implikuje aksjomaty efektywności i aksjomat gracza-atrapy. Aby zdefiniować pojęcie nośnika musimy wprowadzić dodatkową notację.

Niech P_1 i P_2 będą dwoma podziałami. Wówczas mówimy, że P_1 *pokrywa* P_2 (co oznaczamy przez $P_1 \gg P_2$) jeśli każdy zbiór z P_2 jest podzbiorem zbioru z P_1, czyli $\forall_{S_2 \in P_2} \exists_{S_1 \in P_1} S_2 \subseteq S_1$. Tę definicję możemy rozciągnąć na zanurzone koalicje w naturalny sposób:

$$(S_1, P_1) \gg (S_2, P_2) \Leftrightarrow (S_2 \subseteq S_1) \wedge (P_1 \gg P_2).$$

Ponadto przez $P_1 \wedge P_2$ rozumiemy:

$$P_1 \wedge P_2 = \{S_1 \cap S_2 | S_1 \in P_1, S_2 \in P_2, S_1 \cap S_2 \neq \emptyset\}$$

czyli największy (względem relacji $\gg$) podział, który jest pokrywany i przez P_1, i przez P_2. Przykładowo aby policzyć $P \wedge \{S, N \setminus S\}$, każdy zbiór z P który zawiera elementy z S i spoza S dzielimy na dwa zbiory według tego warunku. To pojęcie też możemy rozszerzyć na zanurzone koalicje:

$$(S_1, P_1) \wedge (S_2, P_2) = (S_1 \cap S_2, P_1 \wedge P_2)$$

Możemy teraz zdefiniować pojęcie *nośnika*.

Definicja 2.4 *Zbiór T jest* nośnikiem *w grze v jeżeli dla każdej zanurzonej koalicji (S, P) zachodzi $v(S, P) = v(S', P')$ dla $(S', P') = (S, P) \wedge (T, \{T, N \setminus T\})$.*

Przykładowo w grze w której tylko dwie zanurzone koalicje $(\{1\}, \{\{1\}, \{2, 3\}\})$ oraz $(\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2, 3\}\})$ otrzymują wypłatę równą w gracz 1 sam jest nośnikiem. Nie oznacza to jednak, że pozostali gracze nie mają wpływu na grę - widzimy, że kiedy 2 i 3 nie znajdą się w tej samej koalicji gracz 1 nie dostanie wypłaty. Określenie gracza 1 nośnikiem bierze się jednak stąd, że tylko on może dostać wypłatę, „przenosi” na sobie wypłatę z układu $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$ do układu $\{\{1, 2, 3\}\}$.

Poniższy aksjomat mówi, że całą wypłata końcowa w grze powinna być rozdysponowana między graczy należących do nośnika.

Aksjomat 2.14 *Nośnik:*
Funkcja φ spełnia aksjomat nośnika *jeżeli dla każdego zbioru S będącego nośnikiem zachodzi $\sum_{i \in S} \varphi_i(v) = v(N, \{N\})$.*

Jako że N jest nośnikiem w każdej grze, to z aksjomatu nośnika wynika oczywiście aksjomat efektywności. Wynika także nasz aksjomat gracza-atrapy, ponieważ jeżeli gracz i jest graczem-atrapą to $N \setminus \{i\}$ też jest nośnikiem,[4] więc cała wartość $v(N, \{N\})$ jest rozdzielona między innych. Jak zostało stwierdzone w [MachoStadler:et:al:07] wynika nawet silny aksjomat gracza-atrapy, mówiący że gracz-atrapa nie tylko nie dostaje niczego, ale także nie wpływa na wartości uzyskiwane przez innych.

[4] Zauważmy, że $(S, P) \wedge (N \setminus \{i\}, \{N \setminus \{i\}, \{i\}\})$ oznacza wyjęcie gracza i z koalicji w jakiej znajduje się w P i umieszczenie go jako singletona obok. Jak już wspomnieliśmy nasza definicja gracza atrapy zapewnia, że jeżeli i jest graczem-atrapą to funkcja gry v daje tą samą wartość dla (S, P) i dla $(S, tr_i^{\emptyset}(P))$ (lub ewentualnie $(S_{-i}, tr_i^{\emptyset}(P))$ jeżeli $i \in S$).

Zdefiniujmy teraz rodzinę prostych gier, dla których wartość Myersona jest łatwa do wyznaczenia. Niech $(S, P) \in EC$, zdefiniujmy teraz grę $m^{(S,P)}$ następująco:

$$m^{(S,P)}(S', P') = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } (S', P') \gg (S, P) \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

W grze $m^{(S,P)}$ wypłatę otrzymują zatem tylko koalicje zawierające S w układach koalicyjnych które pokrywają P. Innymi słowami każdą koalicję z P traktujemy jako nierozłączną i za zepsucie jej karzemy brakiem wypłaty. Jeżeli spojrzymy na układy koalicyjne które otrzymują wypłatę tworzą one swoistą grę, w której graczami są koalicję z podziału P, a jedyne wypłaty otrzymują koalicję zawierające „gracza S". Pozostali gracze są zatem graczami-atrapami, więc „gracz S" powinien otrzymać całą wypłatę z koalicji wszystkich graczy. Wartość Myersona jest zgodna z tą intuicją i daje wszystkim graczom koalicji S wypłatę $1/|S|$, a pozostałym - 0.

Lemat 2.1 *W grze $m^{(S,P)}$ wartość Myersona $\varphi^M(i) = 1/|S|$ dla $i \in S$ oraz $\varphi^M(i) = 0$ dla $i \notin S$.*

Myerson pokazał, że lemat ten jest prawdziwy dla wszystkich wartości spełniających aksjomat nośnika i efektywności - na tym fakcie oparł on dowód istnienia tylko jednej takiej wartości.

Jest jednak kwestią sporną, czy wynik opisanej powyżej gry dla całych koalicji możemy w ten sposób przenieść na wynik gry dla pojedynczych graczy. Czy *fair* jest otrzymanie przez S całej wypłaty skoro pozostali gracze muszą dopasować się do układu P?

Zastanówmy się teraz nad wartościami uzyskiwanymi przez wartość Myersona dla naszej rodziny gier $v^{(S,P)}$. Rozpatrzmy grę $v^{(\{1\},sing(N))}$. Wypłata gracza 1 jest w niej równą $(-1)^{|N|} \cdot \frac{(|N|-2)!}{|N|}$, a zatem zmienia znak razem z parzystością liczby graczy! Na przykład dla trzech graczy otrzymujemy $\varphi^M(v^{(\{1\},\{\{1\},\{2\},\{3\}\})}) = (-1/3, 1/6, 1/6)$.

Fakt że w powyższym przykładzie gracz 1 może otrzymać ujemną wypłatę, mimo że jego singletonowa koalicja jest jedyną mająca większą od zera wartość łamie aksjomat słabej monotoniczności, co jest szeroko krytykowane w literaturze (patrz [ClippelSerrano08], [MachoStadler:et:al:07], [McQuillin08]).

2.6. Wartość Bolgera

Wartość Bolgera jest drugim chronologicznie opisanym rozszerzeniem wartości Shapleya ([Bolger89]). Do zbioru podstawowych aksjomatów Bolger dodał jeszcze jeden, który w naszej pracy nazwiemy *aksjomatem pełnej marginalności*. Niestety wartości Bolgera nie da się zapisać w zwięzłej formie. Będziemy ją oznaczać przez φ^B.

Zaczniemy od wprowadzenia definicji *prostych gier*.

Definicja 2.5 *Grę v nazywamy* grą prostą *jeżeli dla każdej zanurzonej koalicji przyjmuje wartość 0 lub 1, tzn. $v(S, P) = 1$ lub $v(S, P) = 0$ dla każdej $(S, P) \in EC$.*
Prosta gra jest monotoniczna *jeśli $v(S, P) = 1 \Rightarrow \forall_{T \subseteq N} v(S \cup T, \{S \cup T\} \cup \{R \setminus T : R \in P \setminus S\}) = 1$.*

Ponadto mówimy, ze koalicja S *wygrywa* w odniesieniu do P jeżeli $v(S, P) = 1$. Gra jest zatem monotoniczna jeżeli dojście grupy graczy do wygrywającej koalicji S (w odniesieniu do P) nie psuje jej wygrywania.

Wprowadzoną przez nas wcześniej funkcję $tr_i^T(P)$ dla zanurzonej koalicji $(P(i), P)$ Bolger nazywa *ruchem* gracza i. Ruch jest korzystny (u Bolgera *pivot move*), jeżeli $P(i)$ wygrywało w odniesieniu do P, a $P(i) \setminus \{i\}$ nie wygrywa w odniesieniu do $tr_i^T(P)$. Aksjomat marginalności pełnej dla dwóch prostych monotonicznych gier v_1, v_2 oznacza, że gracz i powinien mieć w obu taką samą wartość jeżeli ma w nich taką samą ilość ruchów korzystnych. Zanim go jednak przedstawimy wprowadźmy jeszcze jedną definicję.

Definicja 2.6 Pełnym wkładem marginalnym *gracza $i \in S$ do koalicji zanurzonej $(S, P) \in EC$ nazywamy wartość $mc^{\Sigma}_{(i,S,P)}(v)$ określoną następująco:*

$$mc^{\Sigma}_{(i,S,P)}(v) = \sum_{T \in P \setminus \{S\}} v(S, P) - v(S_{-i}, tr_i^T(P))$$

Wektorem pełnych wkładów marginalnych *nazywamy* $mc_i^{\Sigma}(v) = (mc^{\Sigma}_{(i,S,P)}(v))_{(S,P) \in EC, i \in S}$.

Warto porównać tę definicję z definicją właściwego wkładu marginalnego z rozdziału o wartości wolnej od efektów zewnętrznych. De Clippel i Serrano także rozważali wkłady marginalne danego gracza do danej zanurzonej koalicji, jednak tam wartość $mc_{(i,S,P)}$ oznaczająca właściwy wkład marginalny określona była tylko na podstawie przejścia gracza i z S do koalicji pustej, czyli $tr_i^{\emptyset}(P)$. Bolgera wkład marginalny do koalicji zanurzonej (S, P) jest sumą wszystkich zysków z wszystkich przejść, czego skutkiem jest bardziej skomplikowana wartość. Poniższy aksjomat jest dokładnym odpowiednikiem aksjomatu marginalności z uwzględnieniem tej właśnie różnicy w rozumieniu wkładu marginalnego.

Aksjomat 2.15 *Marginalność pełna:*
Funkcja φ spełnia aksjomat pełnej marginalności *jeśli dla każdego gracza i oraz każdych dwóch gier v_1, v_2 jeżeli $mc_i^{\Sigma}(v_1) = mc_i^{\Sigma}(v_2)$ to $\varphi_i(v_1) = \varphi_i(v_2)$.*

W swojej pracy Bolger pokazał, że wartość spełniająca podstawowe aksjomaty (z wyłączeniem aksjomatu efektywności) oraz aksjomat marginalności pełnej spełnia następujące równanie:

$$\varphi_i^B(v) = \sum_{(S,P) \in EC, i \in S} \frac{\varphi_i^B(v^{(S,P)})}{|P|} mc^{\Sigma}_{(i,S,P)}(v) \tag{2.5}$$

Pozostaje już tylko dookreślić wartość Bolgera dla prostych gier z rodziny $v^{(S,P)}$. To jednak nie jest takie proste i wymaga obliczenia rozwiązania równania rekurencyjnego ułożonego na $\alpha(S, P) = \frac{\varphi_i^B(v^{(P(i),P)})}{|P|}$.[5] W naszej pracy nie będziemy już bardziej zagłębiać się w te obliczenia. Przykładowo dla $N = \{1, 2, 3\}$ wzór rekurencyjny daje wartości:
$\alpha(\{i\}, \{\{i\}, \{j\}, \{k\}\}) = 1/18$,
$\alpha(\{i\}, \{\{i\}, \{j, k\}\}) = 1/12$,
$\alpha(\{i, j\}, \{\{i, j\}, \{k\}\}) = 1/12$,
$\alpha(\{i, j, k\}, \{\{i, j, k\}\}) = 1/3$
dla dowolnej permutacji $\{i, j, k\}$ graczy $\{1, 2, 3\}$. Wartość Bolgera dla trzech graczy ma więc postać:

$$\varphi_i^B(v) = \tfrac{1}{3} mc^{\Sigma}_{(1,\{1,2,3\},\{\{1,2,3\}\})}(v) + \tfrac{1}{12} mc^{\Sigma}_{(1,\{1,2\},\{\{1,2\},\{3\}\})}(v) + \tfrac{1}{12} mc^{\Sigma}_{(1,\{1,3\},\{\{1,3\},\{2\}\})}(v) + \tfrac{1}{12} mc^{\Sigma}_{(1,\{1\},\{\{1\},\{2,3\}\})}(v) + \tfrac{1}{18} mc^{\Sigma}_{(1,\{1\},\{\{1,2,3\}\})}(v)$$

[5] Dokładniej α opiera się jedynie na wielkościach koalicji, tzn. dla zanurzonej koalicji (S, P) w postaci $P = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ gdzie $S = S_1$ argumentami funkcji α są $|S_1|$, $|S_2|$ itd. Jest to dość oczywiste, ponieważ przy symetrycznych graczach wartości te jednoznacznie definiują grę $v^{(S,P)}$.

2.7. Wartość Hu-Yanga

Wartość Hu-Yanga także opiera się na definicji wkładu marginalnego gracza do koalicji. W pracy [HuYang09] jest ona użyta do wzmocnienia aksjomatu gracza-atrapy, a nie do dodania nowego aksjomatu marginalności jak było to w przypadku wartości Bolgera oraz wartości wolnej od efektów zewnętrznych przy podejściu de Clippel i Serrano.

Zanim przedstawimy wzór wprowadźmy dodatkowe oznaczenia. Dla dowolnej koalicji S i dowolnego podziału P przez $P_{[S]}$ będziemy oznaczać modyfikację podziału P polegającą na „wyciągnięciu" graczy należących do zbioru S do osobnej koalicji, czyli formalnie:

$P_{[S]} = \{T \setminus S : T \in P\} \cup \{S\}$

Oczywiście jeżeli $S \in P$ wówczas $P_{[S]} = P$. Ponadto określmy jeszcze podzbiór zbioru podziałów określony przez zanurzoną koalicję (S, P) następująco:

$\mathcal{P}_{(S,P)} = \{P' \in \mathcal{P} : P'_{[S]} = P\}$

Według powyższej definicji podziały należące do $\mathcal{P}_{(S,P)}$ muszą zachowywać układ pomiędzy graczami z poza S (mówiąc inaczej jest to dowolne „wmieszanie" graczy ze zbioru S w podział $P \setminus \{S\}$ określony na zbiorze $N \setminus S$). Przykładowo dla $(S, P) = (\{1\}, \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\})$ $\mathcal{P}_{(S,P)} = \{\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}, \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}, \{\{2, 3\}, \{1, 4\}\}\}$.

Możemy teraz przystąpić do przedstawienia wzoru na wartość φ^{HY}:

$$\varphi_i^{HY}(v) = \sum_{P\in\mathcal{P}} \sum_{S\subseteq N, i\in S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!|\mathcal{P}|}(v(S, P_{[S]}) - v(S_{-i}, P_{[S_{-i}]})) \tag{2.6}$$

W powyższej definicji sumowanie zostało rozdzielone na dwa osobne znaki aby zwrócić uwagę na to, że w odróżnieniu od kilku poprzednich równań nie iterujemy tu po (S, P), czyli podziałach w których utworzona jest koalicja S, tylko po wszystkich podziałach i wszystkich koalicjach osobno.

Jak wspomnieliśmy we wstępie, wartość ta jest wynikiem analizy wkładów marginalnych. Zdefiniujmy zatem wkład marginalny w rozumieniu Hu i Yanga, nazwiemy go *zliczanym wkładem marginalnym.*

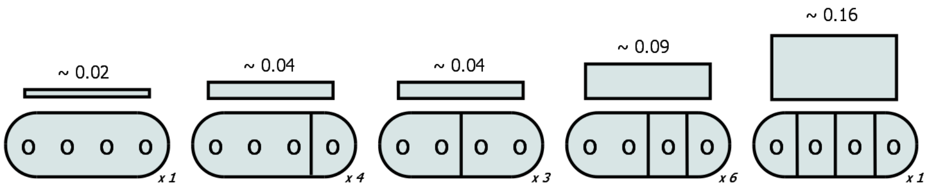
Definicja 2.7 Zliczanym wkładem marginalnym *gracza* $i \in S$ *do koalicji zanurzonej* $(S, P) \in EC$ *nazywamy wartość* $mc^{HY}_{(i,S,P)}(v)$ *określoną następująco:*

$$mc^{HY}_{(i,S,P)}(v) = \sum_{O\in\mathcal{P}_{(S,P)}} v(S, O_{[S]}) - v(S_{-i}, O_{[S_{-i}]})$$

Wektorem zliczanych wkładów marginalnych *nazywamy* $mc_i^{HY}(v) = (mc^{HY}_{(i,S,P)}(v))_{(S,P)\in EC, i\in S}$.

Zliczany wkład marginalny jest zatem sumą zysków przejścia i do koalicji S zsumowanych po wszystkich podziałach z których przez „wyjęcie" S otrzymujemy podział P. Aby nabrać więcej intuicji co do tej definicji przekształćmy trochę użyty wzór. Skoro $O \in \mathcal{P}_{(S,P)}$ to $O_{[S]} = P$, a także $O_{[S_{-i}]} = tr_i^T(P)$, gdzie T jest wyznaczone przez koalicję do której należy i w O.[6] Oznacza to, że zliczamy te same elementarne wkłady marginalne z przejścia gracza i z $T \in P \setminus \{S\}$ do S w układzie P wielokrotnie dla wszystkich podziałów O dla których T są

[6] Trzeba być ostrożnym w formalnym określeniu koalicji T - pisząc $T = O(i)$ popełnimy bowiem dwa błędy. Koalicja o jakiej mówimy to oczywiście koalicja $O(i)$ jednak po przejściach - wyjęcie graczy ze zbioru S_{-i} oczywiście nie zmieniło faktu przynależenia gracza i do tej koalicji, jednak zmieniło samą koalicję. A jest to dla nas ważne, ponieważ nasze notacje nie operują na identyfikatorach, zbiory w podziale nie są ponumerowane - zbiór określamy opisując całą jego zawartość. Abyśmy mogli użyć zapisu $tr_i^T(P)$ zbiór T musi należeć do $P \setminus S$. Bliżej prawdy jesteśmy zatem pisząc $T = O_{[S_{-i}]}$, to też nie jest dobrym rezultatem - w P gracz i już przeszedł do koalicji S_{-i}! Poprawnym zapisem jest zatem $T = O_{[S_{-i}]} \setminus \{i\}$.



Rysunek 2.4: Diagram przedstawiający wagi w podejściu uśredniania w zależności od konfiguracji utworzonej przez graczy $N \setminus S$ dla $|N \setminus S| = 4$. Wagi przy obliczaniu wartości Hu i Yanga jako jedyne zależą od wielkości koalicji S, w powyższym diagramie założyliśmy, że $|S| = 3$.

równe, czyli układy $O_{[S_{-i}]}$ są takie same. Ile jest takich podziałów O? Spośród „wtasowań" graczy z S wybieramy te, w których i trafia do T. Czyli tak naprawdę wtasowujemy tylko graczy z S_{-i} w układ w którym i już jest w T, jest ich zatem dokładnie $|\mathcal{P}_{(S_{-i}, tr_i^T(P))}|$.[7] Zliczany wkład marginalny możemy zatem zapisać inaczej:

Lemat 2.2 *Zliczany wkład marginalny jest równy, dla* $(S, P) \in EC$ *oraz* $i \in S$*:*

$$mc^{HY}_{(i,S,P)}(v) = \sum_{T \in P \setminus \{S\}} |\mathcal{P}_{(S_{-i}, tr_i^T(P))}| \cdot (v(S, P) - v(S_{-i}, tr_i^T(P)))$$

Bolger za wkład marginalny uznawał sumę elementarnych wkładów marginalnych. Hu i Yang idą o krok dalej i zliczają te same wartości z różnymi wagami odpowiadającymi za częstotliwość ich występowania.

Na podstawie tej definicji wkładu marginalnego zdefiniujemy teraz mocniejszy aksjomat gracza-atrapy.

Aksjomat 2.16 *Gracz-atrapa w sensie zliczanego wkładu marginalnego*
Funkcja φ *spełnia* aksjomat gracza-atrapy *w sensie zliczanego wkładu marginalnego, jeśli dla każdego gracza* i *dla którego wektor zliczanych wkładów marginalnych* $mc_i^{HY}(v)$ *jest zerowy zachodzi* $\varphi_i(v) = 0$.

Hu i Yang pokazali, że razem z aksjomatami efektywności, symetrii, addytywności ten silniejszy aksjomat gracza-atrapy implikuje wartość φ^{HY}.

Wartość φ^{HY} można także uzyskać metodą uśredniania z wagami:

$$\alpha^{HY}(S, P) = \frac{|\mathcal{P}_{(S,P)}|}{|\mathcal{P}|}$$

Dowód tego faktu pokazujemy w Dodatku A. Przykład kształtowania się wag α^{HY} przedstawiliśmy na diagramie 2.4.

Liczby $|\mathcal{P}_{(S,P)}|$ w ogólności nie upraszczają się do żadnej prostszej formuły, łatwo jednak z naszej interpretacji zauważyć, że dla ustalonego S są one tym większe, im więcej w danym układzie P jest koalicji. Przykładowo dla $S = \{1\}$ zachodzi $|\mathcal{P}_{(\{1\},P)}| = |P|$, a zatem $v^{HY}(\{1\}) = \frac{1}{|\mathcal{P}|} \sum_{P \in \mathcal{P}, \{1\} \in P} v(\{1\}, P)|P|$. Kiedy koalicja S składa się z jednego gracza różnice wag nie są takie duże, jednak już przy 10 graczach dla $|S| = 4$ waga układu $\{S\} \cup sing(S)$ jest ponad 50 razy większa niż waga $\{S, N \setminus S\}$! Wartości Hu-Yanga zdecydowanie bliżej zatem do wartości wolnej od efektów zewnętrznych niż do wartości McQuillina.

[7] Wchodząc jeszcze głebiej (co zrobimy dokładniej w Dodatku A) zauważamy, że wartość ta zależy jedynie od wielkości zbioru S (dokładniej S_{-i}) oraz ilości koalicji w podziale $tr_i^T(P)$. Zatem dla wszystkich T nie będących koalicją pustą (wtedy tylko przejście i do T zwiększa rozmiar układu koalicyjnego) wartość ta jest równa. Inną wagę w zliczanym wkładzie marginalnym ma zatem tylko jeden elementarny wkład marginalny $v(S, P) - v(S_{-i}, \{S_{-i}, \{i\}\} \cup P \setminus \{S\})$. Oznacza to między innymi, że zliczany wkład marginalny jest kombinacją liniową pełnego wkładu marginalnego oraz właściwego wkładu marginalnego: $mc^{HY} = \alpha \cdot mc + \beta \cdot mc^{\Sigma}$.

2.8. Podsumowanie

Niech wkład marginalny będzie zdefiniowany jako ważona suma elementarnych wkładów marginalnych, czyli:

$$mc_{(i,S,P)}(v) = \sum_{T \in P \setminus \{S\}} \alpha(i,S,P,T) \cdot (v(S,P) - v(S_{-i}, tr_i^T(P))) \tag{2.7}$$

Z tą definicją zgodne są przedstawione przez nas definicje właściwego, pełnego oraz zliczanego wkładu marginalnego.

Rozpocznijmy od twierdzenia mówiącego, że dla dowolnych wag w definicji wkładu marginalnego zdefiniowanie gry przez aksjomat marginalności („gracz mający identyczne wektory wkładów marginalnych w dwóch różnych grach otrzymuje w obu taką samą wypłatę”) jest równoważne zdefiniowaniu gry przez wzmocnienie aksjomatu gracza-atrapy („gracz mający zerowy wektor wkładów marginalnych otrzymuje zerową wypłatę”).

Twierdzenie 2.1 *Niech φ będzie funkcją spełniającą aksjomaty efektywności, symetrii, oraz liniowości i niech $mc_i(v) = (mc_{(i,S,P)}(v))_{(S,P)\in EC, i\in S}(v)$ oznacza wektor wkładów marginalnych określonych jak w równaniu 2.7. Wówczas poniższe zdania są równoważne:*

(1) $\forall_v \forall_i ((\forall_{(S,P)\in EC} mc_{(i,S,P)}(v) = 0) \Rightarrow \varphi_i(v) = 0)$, czyli dla każdej gry v i dla każdego gracza i dla którego $mc_i(v)$ jest wektorem zerowym zachodzi $\varphi_i(v) = 0$,

(2) $\forall_{v_1,v_2} \forall_i ((\forall_{(S,P)\in EC} mc_{(i,S,P)}(v_1) = mc_{(i,S,P)}(v_2)) \Rightarrow \varphi_i(v_1) = \varphi_i(v_2))$, czyli dla każdego gracza i oraz dla każdych dwóch gier v_1, v_2 w których gracz i ma identyczne wektory wkładów marginalnych ($mc_i(v_1) = mc_i(v_2)$) zachodzi $\varphi_i(v_1) = \varphi_i(v_2)$

Dowód:

(1) $\Rightarrow$ (2): Weźmy dowolnego gracza i oraz dowolne gry v_1 i v_2 dla których $mc_i(v_1) = mc_i(v_2)$. Naszym celem jest zatem pokazanie, że $\varphi_i(v_1) = \varphi_i(v_2)$.

Niech $\bar{v}$ będzie grą przeciwną do dowolnej gry v - dla każdej zanurzonej koalicji (S,P) jej wartość definiujemy jako $\bar{v}(S,P) = -v(S,P)$. Wówczas oczywiście $mc_i(\bar{v}) = -mc_i(v)$.[8] Niech teraz $v' = \bar{v_1}$. Jedyną cechą gry v' z jakiej skorzystamy jest wspomniany fakt, że $mc_i(v') = -mc_i(v_1)$, a także skoro $mc_i(v_1) = mc_i(v_2)$ to $mc_i(v') = -mc_i(v_2)$.

Rozpatrzmy sumę gier v_1 i v' zdefiniowaną jak w aksjomacie liniowości (czyli sumujemy gry po wartościach zanurzonych koalicji). Wektor wkładów marginalnych gracza i w tej grze jest zerowy, a skoro tak to z (1) $\varphi_i(v_1 + v') = 0$. Analogicznie rozumowanie prowadzi nas do $\varphi_i(v_2 + v') = 0$.

Korzystając teraz z aksjomatu liniowości otrzymujemy równania $0 = \varphi_i(v_1+v') = \varphi_i(v_1) + \varphi_i(v')$ oraz $0 = \varphi_i(v_2 + v') = \varphi_i(v_2) + \varphi_i(v')$ czyli

$$\varphi_i(v_1) = -\varphi_i(v') = \varphi_i(v_2)$$

co było do okazania.

(2) $\Rightarrow$ (1): Weźmy dowolną grę v i dowolnego gracza i dla którego $mc_i(v)$ jest wektorem zerowym. Chcemy zatem pokazać, że $\varphi_i(v) = 0$.

[8] Przyjęliśmy, że wkład marginalny jest ważoną sumą elementarnych wkładów marginalnych, a zatem dla każdej zanurzonej koalicji (S,P) zachodzi $mc_{(i,S,P)}(\bar{v}) = \sum_{T\in P\setminus\{S\}} \alpha(i,S,P,T) \cdot (\bar{v}(S,P) - \bar{v}(S_{-i}, tr_i^T(P))) = \sum_{T\in P\setminus\{S\}} \alpha(i,S,P,T) \cdot (-v(S,P) - (-v(S_{-i}, tr_i^T(P)))) = -\sum_{T\in P\setminus\{S\}} \alpha(i,S,P,T) \cdot (v(S,P) - v(S_{-i}, tr_i^T(P))) = -mc_{(i,S,P)}(v)$

Ten rezultat otrzymujemy natychmiast. Weźmy bowiem grę zerową v^0 zdefiniowaną następująco: $v^0(S, P) = 0$. Oczywiste jest, że wszystkie elementarne wkłady marginalne sa równe 0, zatem i wszystkie wektory wkładów marginalnych $mc_j(v^0)$ są zerowe dla każdego j. Ponadto z aksjomatu symetrii i efektywności natychmiastowo otrzymujemy oczywisty podział wypłaty - $\varphi_j(v^0) = 0$ dla każdego gracza j. A skoro tak, to korzystając z (2) mamy $\varphi_i(v) = \varphi_i(v^0) = 0$ co było do okazania.

□

Z naszego twierdzenia wynika między innymi, że zdefiniowanie przez de Clippel i Serrano wartości wolnej od efektów zewnętrznych przez aksjomat marginalności było tak naprawdę wtórne do zdefiniowania jej przez Pham-Do i Norde przez wzmocnienie aksjomatu gracza-atrapy.[9] Ponadto z użyciem go moglibyśmy stworzyć nowe aksjomatyczne wyprowadzenie wartości Bolgera.

Co jednak ważniejsze twierdzenie to oznacza dla nas, że aż cztery z sześciu przedstawionych wartości Shapleya opierają się na wzmocnieniu aksjomatu gracza-atrapy - wartość wolna od efektów zewnetrznych oraz wartości Bolgera i Hu-Yanga opierały się właśnie na definicji wkładu marginalnego, ponadto wartość Myersona opiera się na aksjomacie nośnika, na który możemy patrzeć jako na bardzo silny aksjomat gracza-atrapy (aksjomat nośnika definiował pomiędzy których graczy powinna być dzielona wypłata, zatem pozostali gracze są graczami-atrapami w sensie pojęcia nośnika). Jedynymi wartościami których aksjomatycznego wyprowadzenia nie możemy uznać za wzmocnienie aksjomatu gracza-atrapy są zatem wartość McQuillina oraz wartość Macho-Stadlera i jego współpracowników.

Innym kryterium porównawczym które przewijało się przez cały rozdział jest możliwość skonstruowania wartości poprzez podejście uśredniania. Tylko wartości Bolgera oraz Myersona nie da się skonstruować za pomocą tego podejścia, natomiast pozostałe wartości przy wyliczaniu wartości S w grze uśrednionej przyznają bardzo różne wagi α różnym układom P zawierającym S w zależności od tego, jak bardzo połączani są gracze $N \setminus S$. „Początkowa" wartość koalicji S, niezależna od efektów zewnętrznych powstałych z łączenia się graczy z poza S jest jedyną jaką uwzględniają Pham-Do i Norde oraz de Clippel i Serrano w swoich pracach. Wagi maleją kiedy gracze $N \setminus S$ łączą się w koalicje w wartości Hu i Yanga. Za ważniejszą od wartości „początkowej" wartość „końcową" uznają autorzy pozostałych dwóch prac. U Macho-Stadlera, Pereza-Castrillo i Wettsteina wagi rosną razem z rozmiarem koalicji graczy spoza S, natomiast skrajne rozwiązanie wybiera McQuillin, który przyznaje wagę niezerową tylko układowi pomiędzy graczami $N \setminus S$, w którym wszyscy tworzą jedną koalicję.

W pracy [MachoStadler:et:al:07] autorzy pokazali, że rozszerzoną wartość Shapleya da się skonstruować za pomocą podejścia uśredniania wtedy i tylko wtedy gdy spełnia ona aksjomat silnej symetrii (aksjomat 2.11). Aksjomat ten jest jednym z kilku aksjomatów które nie implikują (razem z podstawowymi aksjomatami) unikalnej wartości i są spełniane przez kilka wartości. Innym aksjomatem tego typu, zaproponowanym przez kilku autorów pod różnymi nazwami, jest silny aksjomat gracza-atrapy (u nas jest to aksjomat 2.13), który mówi że obecność gracza-atrapa nie wpływa na wypłaty pozostałych graczy. Kolejnym jest aksjomat słabej monotoniczności (aksjomat 2.8), który spełniają wartości które w prostych grach $v^{(S,P)}$ przypisują graczom z S nieujemne wypłaty.

Cechy wartości porównaliśmy w tabeli 2.2. Na uwagę zasługuje niespełnianie przez wartość Hu-Yanga silnego aksjomatu gracza-atrapy. Jest to bezpośrednim skutkiem tego, że wagi układów w podejściu uśredniania zależą od wielkości koalicji jakiej wartość liczymy.

[9] Gwoli sprawiedliwości przyznać trzeba, że Pham-Do i Norde niepotrzebnie wzmocnili także aksjomat symetryczności, na co de Clippel i Serrano zwrócili uwagę.

	φ^{free}	φ^{McQ}	φ^{M}	φ^{B}	φ^{*}	φ^{HY}
wykorzystanie wszystkich wartości	-	-	+	+	+	+
tylko wzmocnienie gracza-atrapy	+	-	+	+	-	+
aksjomat silnej symetrii	+	+	-	-	+	+
silny aksjomat gracza-atrapy	+	+	+	-	+	-
aksjomat słabej monotoniczności	+	+	-	+	+	+

Tabela 2.2: Porównanie cech wartości przedstawionych w pracy.

Przykładowo wartości gry $v(\{1\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}) = 0$ i $v(\{1\}, \{\{1\}, \{2, 3\}\}) = 1$ dadzą w podejściu uśredniania wartośći $\hat{v}(\{1\}) = 2/5$, natomiast po dodaniu gracza atrapy (4) mamy $\hat{v}(\{1, 4\}) = \hat{v}(\{1\}) = 1/3$. Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że silny aksjomat gracza-atrapy jest dużo silniejszy niż aksjomaty oparte na marginalności, dlatego możliwość zdefiniowania wartości przez wzmocnienie gracza-atrapy nie stoi w sprzeczności z niespełnianiem silnego aksjomatu gracza-atrapy.

Rozdział 3

Ważone Sieci Wkładów Marginalnych

W tym rozdziale przedstawimy reprezentacje służące do zapisu gier koalicyjnych. We wprowadzeniu przedstawimy kryteria oceny danej reprezentacji. Następnie w sekcji 3.1 zdefiniujemy Sieci Wkładów Marginalnych służące do zapisu gier bez efektów zewnętrznych. Uogólnimy także przedstawiony przez pomysłodawców dowód szybkiego obliczania wartości Shapleya z tej reprezentacji na formuły zawierające same negatywne literały. W kolejnej sekcji 3.2 zaprezentujemy Ważone Sieci Wkładów Marginalnych opisujące gry z efektami zewnętrznymi oraz wyprowadzimy twierdzenie znacznie upraszczające tę reprezentację.

Najpierw zastanówmy się dlaczego potrzebujemy nowych reprezentacji. Przy wprowadzaniu rozszerzeń wartości Shapleya posługiwaliśmy się reprezentowaniem gry poprzez *funkcję podziału*. Wadą tej reprezentacji jest jednak brak zwięzłości - jak widzieliśmy w jednym z przykładów już dla trzech graczy musieliśmy określić dziesięć wartości. W rzeczywistości często mamy do czynienia z ponad stu graczami i określenie wszystkich wartości funkcji podziału nie jest wykonalne.

Problem ze zwięzłością reprezentacji pojawił się już przy grach bez efektów zewnętrznych. Funkcja charakterystyczna przyjmuje za argument dowolną koalicję, a dowolnych koalicji istnieje przecież $2^{|N|}$! Już w tym wypadku określenie wszystkich wartości osobno nie jest możliwe, co ważne nie jest też potrzebne, ponieważ zwykle całą przestrzeń wartości da się opisać za pomocą pewnych reguł. Przykładem mogą być *gry większości* których wartości możemy opisać następującym zdaniem: „wartość 1 otrzymują tylko koalicje posiadające więcej niż połowę graczy, pozostałe otrzymują 0”, czyli formalnie „$\hat{v}(S) = 1$ dla $|S| > |N|/2$ i $\hat{v}(S) = 0$ w przeciwnym przypadku”. Opis słowny wartości koalicji oczywiście też jest jedną z możliwych reprezentacji, jednak ze względu na brak ścisłości jest on kompletnie bezużyteczny dla komputerów, których używamy do obliczenia najlepszego układu lub podziału końcowej wypłaty. Potrzebujemy zatem ścisłego zapisu, który pozwoli nam w miare zwięźle określić wartości gry. Czasem do rozważań dopuszczamy także reprezentacje, które (w zamian za inne plusy) nie opisują wszystkich możliwych gier.

Trzema najważniejszymi kryteriami, których używamy do oceny reprezentacji są:

- *ekspresywność* - jak duży podzbiór wszystkich gier może ona opisać?
- *zwięzłość* - jak duży musi być opis przy użyciu tej reprezentacji?
- *własności obliczeniowe* - jak szybkie algorytmy możemy napisać dla gry w tej reprezentacji?

Rozpatrując własności obliczeniowe skupimy się na obliczaniu wartości Shapleya.

Funkcja charakterystyczna dla gier bez efektów zewnętrznych jest ekspresywna, może bowiem wyrazić wszystkie możliwe gry koalicyjne i ma dobre własności obliczeniowe - pozwala policzyć wartość Shapleya bez dodatkowego narzutu czasowego (wartość Shapleya określiliśmy właśnie w oparciu o wartości funkcji charakterystycznej). Czas jest więc liniowy ze względu na wielkość reprezentacji. Dużym problemem jest jednak zwięzłość. Te same cechy ma funkcja podziału dla gier w których dopuszczamy efekty zewnętrzne.

O ile kwestia reprezentacji gier koalicyjnych bez efektów zewnętrznych była bardzo szeroko omawiana w wielu pracach to temat reprezentacji dla gier w ogólności dopiero zdobywa popularność. W naszej pracy przedstawimy reprezentację *Ważonych Sieci Wkładów Marginalnych* (w skrócie *Ważone Sieci WM*) zaproponowaną w [Michalak:et:al:10]. Zanim jednak to nastąpi zaprezentujemy *Sieci Wkładów Marginalnych* wymyślone dla gier bez efektów zewnętrznych przez Ieonga i Shohama w [IeongShoham05], na których opiera się nasza ogólna reprezentacja.

3.1. Sieci Wkładów Marginalnych (*ang. MC-Nets*)

W tej sekcji przez v będziemy oznaczać gry bez efektów zewnętrznych.

Reprezentacja Ieonga i Shohama składa się ze zbioru reguł. Reguły są postaci:[1]

$$(\beta; w)$$

gdzie β nazywamy *wzorcem*, a w jest pewną wartością ($w \in \mathbb{R}$). Wzorzec jest z kolei prostą formułą logiczną określoną na zbiorze graczy:

$$\beta = p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k \wedge \neg n_1 \wedge \neg n_2 \wedge \ldots \wedge \neg n_l$$

gdzie $p_i, n_i \in N$.[2] p_i nazywamy *pozytywnym literałem*, natomiast n_i - *negatywnym literałem*. Niech L^+_β oznacza zbiór graczy występujących w pozytywnych literałach we wzorcu β, tzn. $L^+_\beta = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant k}\{p_i\}$, i analogicznie L^-_β zbiór graczy z negatywnych - $L^-_\beta = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant l}\{n_i\}$. Jeżeli β będzie jasne z kontekstu będziemy je pomijać. Zbiór graczy S *spełnia* powyższą formułę ($S \vDash \beta$), jeżeli zawiera wszystkich graczy z pozytywnych literałów i nie zawiera żadnego z negatywnych literałów, czyli formalnie:

$$S \vDash \beta \Leftrightarrow \forall_{p \in L^+_\beta}(p \in S) \wedge \forall_{n \in L^-_\beta}(n \notin S)$$

Przykładowo dla $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i formuły $\beta = 1 \wedge 2 \wedge \neg 4$ koalicjami spełniającymi β są $\{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}\}$.

Dla zbioru reguł R opisanych powyżej wartość koalicji S obliczamy sumując wszystkie wartości z reguł dla których S spełnia formułę:

$$v(S) = \sum_{(\beta; w) \in R, S \vDash \beta} w$$

Zastanówmy się nad własnościami tej reprezentacji. Po pierwsze jest ona w pełni ekspresywna. Niech bowiem v będzie dowolną funkcją charakterystyczną. Możemy skonstruować

[1] W oryginalnej pracy używana była notacja $\beta \rightarrow w$.

[2] Ieong i Shoham zdefiniowali Sieci WM za pomocą reguł w których nie ma literałów negatywnych, a dodanie literałów negatywnych zasugerowali jako rozszerzenie znacznie zwiększające zwięzłość reprezentacji. Przykładowo dla gry $v(\{1\}) = 1$ i $v(S) = 0$ dla pozostałych koalicji potrzebujemy tylko jednej formuły która używa literałów negatywnych i aż $2^{|N|-1} + 1$ formuł jeżeli nie będziemy ich używać.

$2^{|N|}$ reguł, dla każdej koalicji jedną, postaci $(\beta_S; v(S))$, gdzie $L^+_{\beta_S} = S$ i $L^-_{\beta_S} = N \setminus S$ - taka formuła jest spełniona tylko przez koalicję S. Także bez literałów negatywnych udałoby nam się to zrobić, musielibyśmy postąpić jednak odrobinę sprytniej - dla każdej koalicji S określamy regułę $(\beta'_S; v'(S))$, gdzie $L^+_{\beta'_S} = S$ a $v'(S) = v(S) - \sum_{i \in S} v(S_{-i})$.

Pokazaliśmy, że reprezentacja Sieci Wkładów Marginalnych jest w pełni ekspresywna. Porównywanie zwięzłości nie jest proste, dla każdej reprezentacji istnieją bowiem gry, których nie da się zwięźle zapisać. Możemy za to stwierdzić, że nasza reprezentacja wymaga tyle samo miejsca co funkcja charakterystyczna dla najgorszego przypadku (to pokazaliśmy przed chwilą określając dowolną grę za pomocą $2^{|N|}$ reguł), a potrafi być wykładniczo bardziej zwięzła. Aby to potwierdzić pokażmy jeszcze jeden przykład, który ładnie ilustruje mechanizm jej działania. Niech *gra jednostkowa* v będzie określona następująco: $\forall_{S \subseteq N} v(S) = 1$. Zdefiniujmy $|N|$ reguł postaci $(\beta_k; 1)$ gdzie $\beta_k = \neg 1 \wedge \neg 2 \wedge ... \wedge \neg(k-1) \wedge k$. Widzimy że każda koalicja w której graczem z najmniejszym indeksem jest gracz k spełnia tylko jedną formułę β_k - we wszystkie poprzednich formułach występuje gracz z mniejszym indeksem jako pozytywny literał, we wszystkich późniejszych gracz k jest już literałem negatywnym.

Ostatnią kwestią do analizy są własności obliczeniowe. Ieong i Shoham w [IeongShoham05] pokazali, że wartość Shapleya z użyciem ich reprezentacji można policzyć w czasie liniowym względem wielkości reprezentacji. W naszej pracy pokażemy lekko zmodyfikowany dowód tej własności. Zaczniemy od uwagi.

Uwaga 3.1 *Jeżeli reprezentacja gry koalicyjnej składa się ze zbioru* reguł R *i wartość gry możemy obliczyć jako sumę wartości gier zdefiniowanych przez każdą regułę osobno* ($v_R = \sum_{r \in R} v_r$, *gdzie* v_r *jest grą zdefiniowaną przez regułę* r), *wówczas wartość Shapleya spełniająca addytywność także jest sumą wartości Shapleya określonych na grach zdefiniowanych każdą regułą osobno* ($\varphi(v_R) = \sum_{r \in R} \varphi(v_r)$).

Uwaga ta, będąca bezpośrednim wnioskiem z aksjomatu addytywności, pozwala nam nie zajmować się obliczaniem wartości Shapleya dla zbioru reguł, a ograniczyć się do policzenia wartości Shapleya dla każdej reguły osobno i zsumowania jej po zbiorze wszystkich reguł.

Naszym zadaniem jest zatem policzenie wartości Shapleya dla gry wyznaczonej regułą $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k \wedge \neg n_1 \wedge \neg n_2 \wedge \ldots \wedge \neg n_l; w)$. W grze tej wartości niezerowe otrzymują wszystkie koalicje zawierające zbiór L^+ i nie zawierające żadnego gracza ze zbioru L^-. Oczywiście jeżeli $L^+ \cap L^- \neq \emptyset$, to formuła nigdy nie jest spełniona i gra jest pusta - $\forall_S (v(S) = 0)$ oraz $\forall_i (Sh_i(v) = 0)$. Założymy zatem, że $L^+ \cap L^- = \emptyset$.

W swojej pracy Ieong i Shoham pokazali dowód tylko dla formuł w których istnieje conajmniej jeden literał pozytywny. Uzupełnimy ich dowód o formuły zawierające same literały negatywne, jednak najpierw zajmijmy się przypadkiem w którym $|L^+| > 0$.

Przyjmijmy na chwilę, że $L^+ \cup L^-$ są zbiorem wszystkich graczy. Z powyższej uwagi wnioskujemy, że $v(S) = w \Leftrightarrow S = L^+$, ponieważ wszystkie inne koalicje nie zawierają całego zbioru L^+ albo zawierają graczy z L^-. Oznaczmy przez p, n, s moce zbiorów L^+, L^-, S. Wzór na wartość Shapleya dla i ma postać:

$$Sh_i(v) = \sum_{S \subseteq L^+ \cup L^-, i \in S} \frac{(s-1)!(p+n-s)!}{(p+n)!} (v(S) - v(S \setminus \{i\}))$$

jednak tylko dla jednego S wartość $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ jest niezerowa - dla $i \in L^+$ jest to L^+, dla $i \in L^-$ jest to $L^+ \cup \{i\}$. Wartości Shapleya jest więc równa: $Sh_{i \in L^+}(v) = \frac{(p-1)!(n)!}{(p+n)!} \cdot w$ oraz $Sh_{i \in L^-}(v) = -\frac{(p)!(n-1)!}{(p+n)!} \cdot w$.

A co kiedy zbiór graczy jest większy niż suma L^+ i L^-? Oczywiste jest, że gracze nie występujący w formule są graczami-atrapami - wartość koalicji „wygrywającej” ($v(S) = w$) może zmienić się tylko przy odejściu gracza z L^+ oraz przy przyjściu gracza L^-, zatem wszystkie ich wkłady marginalne są zerowe. Pamiętamy jednak z analizy rozszerzonych wartości Shapleya, że gracz-atrapa (mimo że wartość gry dla niego jest zerowa) może mieć wpływ na wartość gry dla innych graczy. Na szczęście tego problemu nie mamy w grach bez efektów zewnętrznych, możemy zatem przypisać graczom-atrapom wartość zerową - $Sh_{i \notin L^+ \cup L^-}(v) = 0$ i do liczenia pozostałych wartości Shapleya rozpisać grę bez ich udziału, tak jak zrobiliśmy to powyżej.

Zajmijmy się teraz drugim przypadkiem kiedy $L^+ = \emptyset$.

Twierdzenie 3.1 *Niech gra v będzie opisana w reprezentacji Sieci Wkładów Marginalnych jedną regułą $(\beta; w)$ gdzie wzorzec jest postaci $\beta = \neg n_1 \wedge \neg n_2 \wedge \ldots \wedge \neg n_k$. Wówczas wartość Shapleya jest równa:*

- $Sh_{i \notin L^-}(v) = \frac{1}{|N|} \cdot w$

- $Sh_{i \in L^-}(v) = -\frac{|N| - |L^-|}{|N| \cdot |L^-|} \cdot w$

przy czym L^- jest zbiorem graczy występujących w literałach negatywnych w β.

Dowód: Zastanówmy się dla jakich koalicji zachodzi warunek $v(S) = w$. Z postaci formuły wynika, że dla wszystkich koalicji które nie zawierają graczy z L^-, jednak z małym wyjątkiem - definiując gry koalicyjne przyjęliśmy, że $v(\emptyset) = 0$. Na tym założeniu opiera się także wartość Shapleya. A skoro tak, to gracze spoza L^- nie są graczami-atrapami - każdy $i \in N \setminus L^-$ ma niezerowy wkład marginalny w koalicję $\{i\}$, ponieważ $v(\{i\}) = w$, a $v(\emptyset) = 0$.

Spróbujmy znaleźć wszystkie koalicje dla których przyjście gracza i zmienia ich wartość. Załóżmy że $i \notin S$. Jeżeli $v(S) = w$ oznacza to, że w S nie ma żadnego gracza „psującego” (tworzącego literał negatywny) i że istnieje jakiś gracz niepsujący (bo $v(\emptyset) = 0$), a zatem $v(S \cup \{i\}) = w$ - gracz i nie wpłynął na wartość. Jeżeli z kolei $v(S) = 0$ to albo koalicja S jest pusta, albo w S jest gracz „psujący”. W drugim przypadku gracz i nie pomoże, natomiast w pierwszym jak już wspomnieliśmy ma pozytywny wkład marginalny.

Czyli koalicja $v(\emptyset)$ jest jedyną do której gracz i z poza L^- wnosi jakikolwiek wkład marginalny. Współczynnik stojący we wzorze na wartość Shapleya przy wkładzie marginalnym $v(\{i\}) - v(\emptyset)$ jest równy $\frac{(|N|-1)!}{(|N|)!} = \frac{1}{|N|}$ a zatem $Sh_{i \notin L^-}(v) = \frac{1}{|N|} \cdot w$. Skoro $v(N) = 0$ (ponieważ w N są gracze „psujący”), to z aksjomatu efektywności $\sum_{i \in N} Sh_i = 0$. Otrzymujemy zatem równanie $\sum_{i \in L^-} Sh_i = -\sum_{i \notin L^-} Sh_i$. Korzystając z aksjomatu symetrii mamy zatem $Sh_{i \in L^-} = -\frac{1}{|L^-|} \cdot ((|N| - |L^-|) \cdot \frac{1}{|N|} \cdot w) = -\frac{|N| - |L^-|}{|N| \cdot |L^-|} \cdot w$, co kończy nasz dowód.

□

Zauważmy jeszcze że wynik ten możemy uzyskać w czysto obliczeniowy sposób. Zapiszmy formułę $(\neg n_1 \wedge \neg n_2 \wedge \ldots \wedge \neg n_l; w)$ jako $2^{|N \setminus L^-|}$ formuł z literałami pozytywnymi, dla których umiemy liczyć wartość Shapleya - dla każdej koalicji $S \in N \setminus L^-$ tworzymy formułę którą spełnia tylko ona - $(\bigwedge_{i \in S} i \wedge \bigwedge_{j \notin S} \neg j; w)$. Wartość Shapleya dla gracza „psującego” w oryginalnej formule jest równa sumie wartości Shapleya dla gracza „psującego” w tych formułach. Oznaczmy przez n moc zbioru $|L^-|$ oraz przez s ilość wszystkich graczy. Wówczas:

$$\begin{aligned}
Sh_{i\in L^-} &= \sum_{1\leqslant p\leqslant s-n} \binom{s-n}{p} \frac{-p!\cdot(s-p-1)!}{s!} = -\sum_{1\leqslant p\leqslant s-n} \frac{(s-n)!}{p!\cdot(s-n-p)!}\frac{p!\cdot(s-p-1)!}{s!} \\
&= -\frac{(s-n)!}{s!} \sum_{1\leqslant p\leqslant s-n} \frac{(s-p-1)!}{(s-n-p)!} = -\frac{1}{s\binom{s-1}{n-1}} \sum_{1\leqslant p\leqslant s-n} \binom{s-p-1}{n-1} \\
&= -\frac{1}{s\binom{s-1}{n-1}} \sum_{0\leqslant i\leqslant s-n-1} \binom{n+i-1}{n-1} = -\frac{1}{s\binom{s-1}{n-1}}\binom{s-1}{n} = -\frac{\frac{s-n}{n}\binom{s-1}{n-1}}{s\binom{s-1}{n-1}} = -\frac{s-n}{n\cdot s}
\end{aligned}$$

przy czym w obliczeniach użyliśmy znanej kombinatorycznej właściwości współczynników dwumianowych - $\sum_{0\leqslant i\leqslant b}\binom{a+i}{a} = \binom{a+b+1}{a+1}$.

Zauważmy jeszcze, że dopuszczenie formuł zawierających tylko negatywne literały może zmniejszyć ilość potrzebnych reguł $|N|$ krotnie - przykładem na potwierdzenie tego zdania jest praktycznie każda taka formuła. Ciekawszym faktem jest jednak to, że zwięzłość reprezentacji nie zwiększyła się wykładniczo jak można było przypuszczać. Aby to zauważyć wystarczy przypomnieć sobie naszą konstrukcję gry jednostkowej - zdefiniowaliśmy w niej zbiór reguł $\bigcup_{1\leqslant k\leqslant |N|}\{(\neg 1 \wedge \neg 2 \wedge \ldots \wedge \neg(k-1) \wedge k; 1)\}$, który przypisuje wszystkim koalicjom wartość 1. Aby stworzyć analogiczny zbiór maksymalnie $|N|$ reguł dla gry, w której wartość w otrzymują koalicje bez graczy z L^-_β wystarczy przemnożyć wartość w regułach przez w, do każdej formuły dorzucić formułę β oraz usunąć $|L^-_\beta|$ sprzecznych reguł.

3.2. Ważone Sieci Wkładów Marginalnych (*ang. Weighted MC-Nets*)

Ważone Sieci Wkładów Marginalnych są adaptacją Sieci Wkładów Marginalnych do środowiska w którym istnieją efekty zewnętrzne. W takiej sytuacji nie wystarczą nam formuły logiczne opisujące koalicje, potrzebujemy opisywać całe układy koalicyjne. W jaki sposób wygodnie zapisać relację między koalicjami?

Michalak, Rahwan, Marciniak, Szamotulski i Jennings w [Michalak:et:al:10] swoją reprezentację nazwali Ważonymi Sieciami Wkładów Marginalnych, jako że inspiracją dla ich postaci były formuły ważone, używane w literaturze do prezentowania preferencji graczy. Podobnie jak u Ieonga i Shahoma reprezentacja jest zbiorem reguł. Każda reguła (reguły będziemy oznaczać przez ω) składa się z k *bloków*, czyli zbiorów reguł elementarnych (takich jak w Sieciach WM) oddzielonych kreskami - $\Gamma_1|\Gamma_2|\ldots|\Gamma_k$ gdzie $\Gamma_j = (\beta^j_1; w^j_1)(\beta^j_2; w^j_2)\ldots(\beta^j_{s_j}; w^j_{s_j})$, a zatem:

$$\omega = (\beta^1_1; w^1_1)(\beta^1_2; w^1_2)\ldots(\beta^1_{s_1}; w^1_{s_1})|\ldots|(\beta^k_1; w^k_1)(\beta^k_2; w^k_2)\ldots(\beta^k_{s_k}; w^k_{s_k})$$

Formuły β^j_i są formułami tej samej postaci jak w Sieciach WM (koniunkcją literałów pozytywnych i negatywnych), przyjmijmy jednak że w każdej formule jest co najmniej jeden literał pozytywny.[3] Zbiory literałów pozytywnych i negatywnych zamiast $L^+_{\beta^i_j}, L^-_{\beta^i_j}$ będziemy oznaczać jako $L^+_{i,j}$ oraz $L^-_{i,j}$. Układ koalicyjny P *spełnia* powyższą formułę ($P \vDash \omega$), jeśli

[3] Co zaraz zobaczymy, założenie to jest przydatne przy definiowaniu naszej reprezentacji. Ponadto jak pokazaliśmy na koniec poprzedniej sekcji dopuszczenie formuł zawierających tylko negatywne literały zwiększa zwięzłość tylko liniowo względem ilość graczy. Przy wielomianowej lub nawet wykładniczej liczbie formuł dla większości gier ta modyfikacja wydaje się niepotrzebna.

istnieje jego podział na rozłączne zbiory koalicji $P = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_k$ ($P_i \cap P_j = \emptyset$) taki, że zbiór koalicji P_j spełnia zbiór reguł Γ_j. Zbiór koalicji P_j spełnia zbiór formuł elementarnych $\Gamma_j = (\beta_1^j; w_1^j)(\beta_2^j; w_2^j)\ldots(\beta_{s_j}^j; w_{s_j}^j)$ jeśli dla każdej formuły logicznej β_i^j istnieje koalicja która ją spełnia (także zgodnie z definicją Sieci WM).

Mimo dużej ilości kwantyfikatorów w definicji, spełnianie formuły nie jest trudne do sprawdzenia - podział P na P_j jest praktycznie jednoznacznie określony, tak samo jak koalicja w P_j która musi spełniać β_i^j. Rozważmy to na przykładzie. Niech $|N| = 6$, $\omega = (1 \wedge \neg 2; w_1)(3 \wedge 4; w_2)|(5 \wedge \neg 6; w_3)$ i sprawdźmy czy układ koalicyjny $P = \{\{1,3,4\},\{2,5\},\{6\}\}$ spełnia ω. Pozytywne literały wymuszają aby do P_1 trafiły koalicje zawierające graczy 1, 3 i 4. Do P_2 musi natomiast trafić koalicja gracza 5. Jedyną niewiadomą jest położenie koalicji $\{6\}$ (czyli koalicji która składa się z samych graczy, którzy nie występują w żadnej formule β_i^j jako literał pozytywny), jednak to do którego zbioru P_j ją dorzucimy nie wpłynie ani na spełnienie formuły, ani na wartość koalicji w tej formule (tę zdefiniujemy za chwilę). Przyjmijmy, że $P = P_1 \cup P_2 = \{\{1,3,4\}\} \cup \{\{2,5\},\{6\}\}$. Analogicznie jak przydzielaliśmy koalicje do bloków teraz przydzielamy formuły elementarne β_i^j do koalicji z P_j. Formuła logiczna $(1 \wedge \neg 2)$ musi być spełniona przez koalicję w której jest gracz 1, a zatem $\{1,3,4\}$, $(3 \wedge 4)$ - przez koalicję z graczami 3 i 4, czyli też $\{1,3,4\}$, natomiast za kreską $(5 \wedge \neg 6)$ - przez koalicję z graczem 5, czyli $\{2,5\}$. Wszystkie warunki są spełnione, a zatem układ P spełnia ω.

Określmy teraz wartość zanurzonej koalicji (S,P), kiedy grę mamy zapisaną przy pomocy naszej reprezentacji. Jeżeli podział P spełnia regułę ω, wówczas *wartość* koalicji $S \in P$ w danej regule ω jest sumą wartości znajdujących się we wszystkich formułach elementarnych jakie ona spełnia. W powyższym przykładzie wartość koalicji $\{1,3,4\}$ w ω jest zatem równa $w_1 + w_2$, natomiast wartość $\{6\}$ w ω jest zerowa. Wartość zanurzonej koalicji (S,P) reprezentowanej zbiorem reguł Ω jest sumą wartości w każdej z nich:

$$v(S,P) = \sum_{\omega \in \Omega, P \vDash \omega} \quad \sum_{(\beta_i^j; w_i^j) \in \Gamma_j \in \omega, S \vDash \beta_i^j} w_i^j$$

Przejdziemy teraz do omówienia własności tej reprezentacji.

Ważone Sieci Wkładów Marginalnych są w pełni ekspresywne. Weźmy dowolną grę v i dla każdego układu koalicyjnego $P = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ niech $\omega_P = \Gamma_1|\Gamma_2|\ldots|\Gamma_k$ przy czym $\Gamma_j = (\bigwedge_{i \in S_j} i; v(S_j, P))$. Wówczas $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} \omega_P$ jest reprezentacją tej gry. Przykładowo dla $P = \{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$ nasza reguła ma postać $\omega_P = (1 \wedge 3; v(\{1,3\},P))|(2; v(\{2\},P))|(4; v(\{4\},P))$. Warto podkreślić że udało nam się to uzyskać bez literałów negatywnych oraz dla $|\Gamma_j| = 1$.

Ten sam efekt możemy też uzyskać odrzucając kreski i dodając do każdej formuły logicznej literały negatywne graczy z poza niej - dla powyższego przykładu formuła ta będzie miała postać $\omega'_P = (1 \wedge 3 \wedge \neg 2 \wedge \neg 4; v(\{1,3\},P))(2 \wedge \neg 1 \wedge \neg 3 \wedge \neg 4; v(\{2\},P))(4 \wedge \neg 1 \wedge \neg 2 \wedge \neg 3; v(\{4\},P))$. Pokazaliśmy zatem że dwie prostsze reprezentacje także są w pełni ekspresywne - reprezentacja w której jest jeden blok, czyli $k = 1$ i $\omega = \Gamma_1$ oraz reprezentacja w której każdy blok składa się z jednej reguły i nie ma literałów negatywnych, czyli $\forall_{1 \leqslant j \leqslant k} |\Gamma_j| = 1$ oraz $\forall_{i,j} |L_{i,j}^-| = 0$.

O zwięzłości możemy powiedzieć dokładnie tyle samo, co o zwięzłości Sieci Wkładów Marginalnych - Ważone Sieci Wkładów Marginalnych są conajmniej tak zwięzłe jak funkcja podziału, a dla części gier są wykładniczo bardziej zwięzłe. Za dowód tej własności wystarczyłoby zaznaczenie, że każda formuła Sieci WM jest także formułą Ważonych Sieci WM (dla $\omega = \Gamma_1$ oraz $|\Gamma_1| = 1$), a każda gra bez efektów zewnętrznych jest elementem przestrzeni gier jaką rozważamy rozpatrując gry z efektami zewnętrznymi. A zatem skoro Sieci WM potrafią wyrażać gry w sposób wykładniczo bardziej zwięzły niż funkcja charakterystyczna, to Ważone Sieci WM także to potrafią (tym bardziej będzie to wykładniczo bardziej zwięzły zapis w stosunku do funkcji podziału, która „nie wie" że gra nie ma efektów zewnętrznych). Popatrzmy jednak na inne gry, które potrafimy zwięźle zapisać.

Gry $m^{(S,P)}$ przedstawialiśmy już opisując wartość Myersona. W grze takiej wypłatę (równą w) otrzymują tylko koalicje które zawierają S w układach koalicyjnych które pokrywają P. Przykładowo dla $(S, P) = (\{1\}, \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\})$ wypłatę otrzymują zanurzone koalicje $(\{1\}, \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\})$, $(\{1\}, \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\})$, $(\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\})$, $(\{1, 4\}, \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\})$, $(\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2, 3, 4\}\})$. Nasza reprezentacja jest wyjątkowo prosta w takim wypadku - składa się z tylko jednej reguły $\omega = (1; w)(2 \wedge 3; 0)(4; 0)$.

Przypomnijmy sobie teraz definicję z pracy Hu i Yanga. Rozpatrywali oni zbiór podziałów $\mathcal{P}_{(S,P)}$ do których należały wszystkie podziały, które po wydzieleniu z nich S do osobnej koalicji dają podział P. Określmy grę $hy^{(S,P)}$ w oparciu o tą definicję następująco:

$$hy^{(S,P)}(S', P') = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } P \in \mathcal{P}_{(S,P)} \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

W grze tej, zgodnie z nomenklaturą Bolgera, „wygrywają” wszystkie koalicje zanurzone w P' zgodnym z P pod względem zależności między graczami $N \setminus S$. Jak możemy opisać te gry przy pomocy naszej reprezentacji? Niech $P = \{S\} \cup \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$. Wystarczy że stworzymy jedną regułę postaci:

$$\omega = (\bigwedge_{i \in S_1} i; 1)|(\bigwedge_{i \in S_2} i; 1)| \ldots |(\bigwedge_{i \in S_k} i; 1)$$

Pokazaliśmy zatem, że Ważone Sieci WM mogą być wykładniczo bardziej zwięzłe niż funkcja podziału. Jedyną cechą reprezentacji jakiej nie omówiliśmy są zatem własności obliczeniowe. Na to poświęcimy jednak cały następny rozdział.

Zanim jednak to nastąpi poczyńmy parę uwag na temat naszej reprezentacji. Zacznijmy od lematu który pozwala uprościć regułę nie zmniejszając jej wyrazu.

Lemat 3.1 *Każdą spełnialną regułę Ważonych Sieci Wkładów Marginalnych możemy zapisać w postaci znormalizowanej reguły zgodnej z dwoma założeniami:*

(1) każdy gracz występuje w maksymalnie jednym literale pozytywnym, czyli formalnie $\forall_{(i,j) \neq (k,l)} L^+_{i,j} \cap L^+_{k,l} = \emptyset$

(2) każdy gracz występujący w jakimś literale pozytywnym występuje w literałach negatywnych tylko w innych formułach tego samego bloku, czyli formalnie $\forall_p (p \in L^+_{i,j}) => \forall_{(k \neq i,l)} (p \notin L^-_{k,l})$

Dowód: Lemat ten jest dość elementarny. Pokażmy obie właściwości osobno.

Załóżmy że gracz p tworzy literały pozytywne w dwóch formułach w różnych blokach. Wówczas reguła ta nie jest spełnialna przez żaden układ, ponieważ wymusza na nim, żeby gracz p był w dwóch różnych koalicjach (które przy podziale układu na zbiory koalicji mają trafić do dwóch różnych bloków). Jeżeli zaś obie formuły w których gracz p tworzy literały pozytywne są w tym samym bloku, wówczas muszą być spełniane przez tą samą koalicję - a zatem możemy je złączyć w jedną formułę sumując zbiory literałów pozytywnych i literałów negatywnych (przykład pokażemy po dowodzie lematu).

Zastanówmy się teraz nad drugim założeniem. Jeżeli gracz p tworzy literał pozytywny w jednym bloku to oznacza że przy podziale układu na bloki koalicja z graczem p nie może trafić na inny blok. A zatem występowanie gracza p w literale negatywnym w każdym innym bloku jest informacją zbędną i możemy ją odrzucić.

□

Rozpatrzmy przykładowo regułę $(1 \wedge 2 \wedge \neg 3; v_1)(2 \wedge \neg 4; v_2)|(3 \wedge \neg 6; v_3)$. Skoro formuły $1 \wedge 2 \wedge \neg 3$ i $2 \wedge \neg 4$ obie zawierają gracza 2 to muszą być spełniane przez tą samą koalicję w układzie koalicyjnym. Możemy je zatem złączyć - dostajemy wówczas regułę $(1 \wedge 2 \wedge \neg 3 \wedge \neg 4; v_1 + v_2)|(3 \wedge \neg 6; v_3)$. Zauważmy jeszcze, że w pierwszej formule $\neg 3$ jest niepotrzebne, ponieważ wiemy już to z faktu, że 3 tworzy literał pozytywny w innym bloku. Możemy zatem wyrzucić ten literał i nasza finalna reguła spełniająca założenia z lematu ma postać $(1 \wedge 2 \wedge \neg 4; v_1 + v_2)|(3 \wedge \neg 6; v_3)$.

Wprowadźmy w tym miejscu dodatkowe oznaczenie. Jeżeli dla danego zbioru formuł $B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\}$ nie istnieje zbiór graczy który spełnia wszystkie reguły z B wówczas mówimy, że *zbiór formuł jest niespełnialny* i zapisujemy jako $\ominus B$. W przeciwnym wypadku mówimy, że *zbiór formuł jest spełnialny* i fakt ten oznaczamy jako $\oplus B$. Zbiór formuł jest spełnialny wtedy i tylko wtedy gdy żaden gracz nie tworzy równocześnie literału pozytywnego i negatywnego tzn. przecięcie sumy zbiorów literałów pozytywnych z sumą zbiorów literałów negatywnych jest puste - $\bigcup_k \{L^+_{\beta_k}\} \cap \bigcup_k \{L^+_{\beta_k}\} = \emptyset$. Przykładowo $\oplus\{1 \wedge \neg 2 \wedge \neg 3\, 4 \wedge 5\}$ oraz $\ominus\{1 \wedge 3, 2 \wedge \neg 1\}$.

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że istnienie w jednym bloku zbioru formuł, które nie są spełnialne przez jedną koalicję nie oznacza że cała reguła jest niespełnialna - formuły z jednego bloku mają być przecież spełnione przez zbiór koalicji.

Ważnym wnioskiem z powyższego lematu jest fakt, że każdą regułę możemy zapisać z użyciem tylko $|N|$ prostych reguł - wynika to z tego, że w znormalizowanej formule każdy gracz występuje tylko w jednym literale pozytywnym, a założyliśmy, że w każdej prostej regule jest conajmniej jeden literał pozytywny.

Pokażemy teraz przekształcenie pozwalające zamienić dowolną regułę Ważonych Sieci Wkładów Marginalnych na regułę w której mamy tylko jeden blok. Kosztem tej operacji jest jednak zwiększenie rozmiaru formuły maksymalnie $|N|$ krotnie.

Twierdzenie 3.2 *Każdą regułę Ważonych Sieci Wkładów Marginalnych zawierającą k prostych formuł możemy zapisać w postaci równoważnej reguły zawierającej tylko jeden blok z taką samą ilością prostych formuł złożonych z maksymalnie k razy większej liczby literałów.*

Dowód: Umieszczenie dwóch prostych reguł $(\beta_1; v_1)$, $(\beta_2; v_2)$ w różnych blokach oznacza że reguły te nie mogą być spełnione przez tą samą koalicję. Aby po „usunięciu kresek", czyli połączeniu wszystkich bloków, zapewnić ten sam efekt wystarczy dodać do formuły β_1 literał negatywny z graczem który znajduje się w literale pozytywnym w β_2 (przypomnijmy, że założyliśmy że w każdej formule jest conajmniej jeden literał pozytywny).

Żeby zapewnić że proste reguły z różnych bloków nie trafią do tej samej koalicji wystarczy zatem że każdej formule dopiszemy literały negatywne z graczami z literałów pozytywnych z reguł z innych bloków (z każdej reguły jednego gracza), czyli $\omega = \Gamma_1|\Gamma_2|\ldots|\Gamma_k$ przekształcamy w $\hat{\omega} = \bigcup_i \Gamma_i$, natomiast każdą prostą regułę β^i_j na formułę $\hat{\beta^i_j} = \beta^i_j \wedge \bigwedge_{(k \neq i, l), p = f(L^+_{k,l})} \neg p$, gdzie f jest dowolną funkcją wybierającą reprezentanta ze zbioru graczy.

W naszej konstrukcji nie zmieniła się ilość prostych formuł, jednak zwiększyła się wielkość każdej z nich. Do każdej formuły dodaliśmy około $\sum_i |\Gamma_i| = |\omega|$ literałów (dokładniej do formuły z i-tego bloku dodaliśmy o $|\Gamma_i|$ literałów mniej), a skoro jakiś musiał już w niej być, to ilość literałów zwiększyła się maksymalnie $|\omega|$ razy.[4]

□

[4] Aby poprawić ten rezultat moglibyśmy dopisywać negatywne literały asynchronicznie - jeżeli modyfikując formułę z pierwszego bloku zapewnimy już, że nigdy nie połączy się z formułą z piątego bloku, to nie musimy już w tym celu modyfikować formuły z piątego bloku. Zysk z tych zmian jest jednak tylko dwukrotny, czyli znikomy dla dużej ilości graczy dla których ta reprezentacja powstała.

Wzrost ilości literałów ograniczyliśmy przez wielkość formuły, możemy także ograniczyć go przez ilość graczy. W tym celu wystarczy że skorzystamy z naszego lematu normalizującego 3.1 zanim zaczniemy dopisywać literały negatywne. Po normalizacji ilość prostych reguł jest ograniczona przez $|N|$, a zatem wynikowa reguła będzie miała maksymalnie $|N|$ razy więcej literałów (przy ewentualnej mniejszej ilości prostych formuł).

Widzimy zatem, że jeżeli rozmiar zapisu gry w naszej reprezentacji zdefiniujemy jako ilość reguł zysk z użycia w reprezentacji kresek jest zerowy. Jeżeli zaś licząc rozmiar zapisu będziemy zliczać ilość literałów we wszystkich formułach (ta metoda odpowiada także liczeniu znaków potrzebnych do zapisu gry) to uzyskany zysk będzie maksymalnie liniowy względem ilości graczy. Dla dużej ilości reguł (lub przy małych regułach) nawet przy tym sposobie liczenia zysk ten ginie w obliczeniach. Z analizy naszej wysnuć można wniosek, że nie popełniając dużego błędu możemy uprościć sposób myślenia o Ważonych Sieciach Wkładów Marginalnych zakładając, że reguły są zbiorem prostych reguł Sieci Wkładów Marginalnych, które muszą być wszystkie spełnione, aby którakolwiek z nich dała wypłatę koalicjom jakich dotyczy.

Rozdział 4

Obliczanie rozszerzonych wartości Shapleya

W tym rozdziale zajmiemy się zagadnieniem obliczania rozszerzeń wartości Shapleya na gry z efektami zewnętrznymi, przyjmując za naszą reprezentację Ważone Sieci Wkładów Marginalnych. Zaczniemy od zaprezentowania algorytmów z [Michalak:et:al:10] obliczających wartość McQuillina oraz wartość wolną od efektów zewnętrznych (odpowiednio podrozdziały 4.1 i 4.2). W oparciu o te algorytmy wyznaczymy zwarty wzór dla tych wartości. Następnie pokażemy własny wynik pozwalający szybko obliczać wartość Macho-Stadlera i jego współpracowników dla w pełni ekspresywnego podzbioru naszej reprezentacji (podrozdział 4.3).

Jak wspomnieliśmy we wprowadzeniu do pracy, obliczanie rozszerzonych wartości Shapleya jest bardzo trudnym zagadnieniem. Wiekszość rozszerzeń wartości Shapleya jest zdefiniowana na wszystkich wartościach zanurzonych koalicji, a wyznaczenie tych wartości z zapisu w naszej reprezentacji oczywiście nie jest możliwe ze względu na ich ogromną ilość (rozmiar przestrzeni gier z efektami zewnętrznymi omawialiśmy w 1.3). Musimy zatem postępować sprytniej i starać się liczyć wartość Shapleya bezpośrednio z reguł naszej reprezentacji lub próbować sprowadzać naszą reprezentację do prostszych wersji, z których wartość Shapleya już policzono.

Ze względu na różnorodność definicji wartości Shapleya dla gier z efektami zewnętrznymi trudno jest stworzyć jedną reprezentację, która pozwoliłaby policzyć je wszystkie w czasie liniowym. Nasza analiza z rozdziału 2 pokazała jak bardzo różnią się one między sobą. Nic więc dziwnego, że przy wyliczeniu różnych wartości musimy nałożyć na zbiór reguł dodatkowe założenia. Ta technika jest stosowana w [Michalak:et:al:10] przy wartości wolnej od efektów zewnętrznych oraz wartości McQuillina. Także nasz rezultat dla wartości Macho-Stadlera i współpracowników nie działa dla dowolnego zdefiniowania gry w naszej reprezentacji.

Niech v będzie grą koalicyjną z efektami zewnętrznymi. Korzystając z uwagi 3.1 będziemy przyjmować, że jest ona reprezentowana przez tylko jedną regułą Ważonych Sieci Wkładów Marginalnych oznaczaną ω postaci $\omega = \Gamma_1|\Gamma_2|\dots|\Gamma_k$. Z uwagi tej wynika między innymi, że algorytm liniowy (względem ilości literałów w ω) łatwo uogólnić na algorytm liniowy względem całego zbioru formuł, czyli $|\Omega|$ - wystarczy zapuścić nasz algorytm dla każdej reguły osobno i potem dodać do siebie wyniki.

Przez $|\omega|$ będziemy oznaczać rozmiar reguły, który zdefiniujemy jako ilość literałów w formule. W dalszych rozważaniach założymy, że reguła ω jest znormalizowana zgodnie z 3.1, tzn. między innymi ilość prostych reguł jest ograniczona przez $|N|$ oraz zbiory pozytywnych literałów formuł są rozłączne. Ułatwi nam to obliczenia, a jak pokazaliśmy nie wpłynie na wynik.[1]

4.1. Obliczenie wartości McQuillina

Przypomnijmy, że aby policzyć wartość McQuillina wyliczaliśmy prostszą grę uśrednioną (będącą grą bez efektów zewnętrznych) w której wartością każdej koalicji S była wartość układu koalicyjnego $\{S, N \setminus S\}$ (czyli układu w którym istnieją tylko dwie koalicje - S i jej dopełnienie). Wartość McQuillina jest wówczas równa wartości Shapleya dla obliczonej gry uśrednionej.

Przedstawimy teraz rezultat uzyskany przez pomysłodawców Ważonych Sieci Wkładów Marginalnych. Autorzy skorzystali z pokazanej przez nas właściwości Sieci Wkładów Marginalnych umożliwiającej policzenie wartości Shapleya w czasie liniowym. Dzięki niej wystarczy że, zamiast konstruować grę uśrednioną bezpośrednio, wskażemy proste reguły definiujące ją. Poniższe twierdzenie mówi, że dla większości gier możemy szybko przekształcić regułę Ważonych Sieci Wkładów Marginalnych na nieduży zbiór prostych reguł Sieci Wkładów Marginalnych określających grę uśrednioną co wystarczy do policzenia wartości Shapleya.

Twierdzenie 4.1 *(za tw. 5.3 z [Michalak:et:al:10])*
Niech v będzie grą reprezentowaną regułą $\omega = \Gamma_1|\Gamma_2|\ldots|\Gamma_k$. Załóżmy, że $k > 1$ lub jeśli $k = 1$ to $|\Gamma_1| = 1$. Wówczas istnieje algorytm przekształcający ω w zbiór prostych reguł Sieci Wkładów Marginalnych definiujących grę uśrednioną w podejściu McQuillina, przy czym zbiór zawiera od zera do dwóch reguł. Ponadto czas działania algorytmu jest równy $O(|\omega|)$.

Dowód: Naszym celem jest zatem określenie jakie układy koalicyjne postaci $\{S, N \setminus S\}$ spełniają regułę ω i sformułowanie prostych reguł które określają znaleziony zbiór.

Jeżeli $\omega = (\beta; w)$ wówczas wynik otrzymujemy natychmiast - ω sama w sobie jest prostą regułą. Jeżeli z kolei $k > 2$ to żeby spełniać tą regułę układ koalicyjny musi posiadać więcej niż dwie koalicje, czyli żaden układ postaci $\{S, N \setminus S\}$ jej nie spełnia. Możemy ją zatem odrzucić.

Pozostaje zatem rozpatrzeć najtrudniejszy przypadek kiedy $k = 2$. W takiej sytuacji koalicja S musi spełniać wszystkie reguły z jednego bloku, a jej dopełnienie wszystkie reguły z drugiego bloku. Ale żeby to się udało musza być spełnione 2 warunki - po pierwsze wszystkie koalicje z jednego bloku muszą być kompatybilne (czyli $\oplus\Gamma_1$ i $\oplus\Gamma_2$), a po drugie żaden gracz nie może występować w obu blokach jako literał negatywny - wówczas nie będzie mógł być w żadnej koalicji. Jeżeli te dwa proste do sprawdzenia warunki są spełnione wówczas reguła jest spełnialna przez pewien podział $\{S, N \setminus S\}$.

Skonstruujmy zatem proste reguły jakie zdefiniują zbiory S dla których układy $\{S, N \setminus S\} \vDash \omega$. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $S \vDash \Gamma_1$ i $N \setminus S \vDash \Gamma_2$. Aby tak było, to S musi zawierać wszystkich graczy którzy występują w literałach pozytywnych i żadnego z literałów negatywnych z pierwszego bloku. Żeby z kolei zachodziło $N \setminus S \vDash \Gamma_2$ koalicja S nie może zawierać żadnego z graczy z literałów pozytywnych z drugiego bloku i musi zawierać wszystkich graczy z literałów negatywnych z drugiego bloku. Określmy zbiory L_i^+ i L_i^- następująco: $L_i^+ = \bigcup_j L_{i,j}^+$, $L_i^- = \bigcup_j L_{i,j}^-$. Nasza reguła na S ma zatem postać:

$$(\bigwedge_{p \in L_1^+ \cup L_2^-} p \wedge \bigwedge_{n \in L_1^- \cup L_2^+} \neg n; \sum_j w_j^1)$$

[1] Warto dodać jeszcze, że operacja normalizacji jest liniowa względem wielkości formuły, zatem nie wpłynie też na złożoność naszych algorytmów.

Jeżeli S generuje podział spełniający ω, to $N \setminus S$ też generuje taki podział, musimy zatem dodać drugą analogiczną regułę -

$$(\bigwedge_{p \in L_2^+ \cup L_1^-} p \wedge \bigwedge_{n \in L_2^- \cup L_1^+} \neg n; \sum_j w_j^2)$$

.

Dla przypadku $k = 2$ tak jak obiecaliśmy, dodaliśmy zatem dwie proste reguły. Czas działania algorytmu wyliczającego proste reguły jest oczywiście liniowy względem wielkości reguły $|\omega|$. Jedyne wątpliwości mogą się pojawić przy sprawdzaniu kompatybilności zbioru formuł $\oplus\Gamma_i$ - nierozważnie moglibyśmy sprawdzać kompatybilność parami. Jednak jak wspomnieliśmy już wcześniej dla zbioru $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ wystarczającym warunkiem jest $\bigcup_k \{L_{\beta_k}^+\} \cap \bigcup_k \{L_{\beta_k}^-\} = \emptyset$ co oczywiście możemy sprawdzić liniowo.

$\square$

Popatrzmy na przykład ilustrujący najważniejszą część dowodu. Niech $|N| = 8$ i $\omega = (1 \wedge \neg 8; v_1)(2 \wedge 3; v_2)|(4 \wedge \neg 5; v_3)$. Żaden gracz nie występuje w literałach negatywnych po dwóch stronach kreski i w każdym bloku reguły są kompatybilne (wystarczy że sprawdzimy $\oplus\{1 \wedge \neg 8, 2 \wedge 3\}$ co zachodzi, bo $\{1, 2, 3\} \cap \{8\} = \emptyset$). Koalicja S tworząca układ koalicyjny $\{S, N \setminus S\}$ który spełnia tę regułę musi albo spełniać wszystkie formuły z pierwszego bloku, albo z drugiego. Przyjmijmy że spełnia formuły z pierwszego bloku, a zatem w S muszą być gracze 1, 2 oraz 3 i nie może być gracza 8. Z kolei w $N \setminus S$ musi być gracz 4 i nie może być gracza 5. A skoro tak, to gracz 5 musi być w S i wiemy też że gracza 4 w S nie ma. Jeśli zbierzemy powyższe warunki w jedną formułę logiczną, wówczas reguła definiująca S będzie miała postać $(1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 5 \wedge \neg 4 \wedge \neg 8; v_1 + v_2)$ (dodaliśmy wartości koalicji z pierwszego bloku, ponieważ S spełnia je wszystkie). Jeżeli z kolei S spełnia wszystkie reguły z drugiego bloku wówczas otrzymujemy analogiczną regułę z przeciwną formułą i wartością v_3. Reguły bardzo dokładnie definiują nam koalicje które mają niezerową wypłatę, jednak nie jednoznacznie - nie zapominajmy, że w grze są jeszcze dwaj gracze atrapy - 6 i 7. W grze uśrednionej są więc 4 koalicje z wartością $v_1 + v_2$ ({1,2,3,5}, {1,2,3,5,6}, {1,2,3,5,7} i {1,2,3,5,6,7}) i 4 - będące dopełnieniem poprzednich czterech - z wartością v_3 ({4}, {4,6}, {4,7}, {4,6,7}).

Zauważmy, że używając rozumowania z dowodu możemy od razu wyznaczyć wartość Shapleya bez konieczności używania Sieci Wkładów Marginalnych. Rozpatrzmy wszystkie 3 przypadki:

- Kiedy $k > 2$ uśredniona gra jest zerowa, zatem wartość Shapleya też jest równa zero dla każdego gracza i:
$$\varphi_i^{McQ}(v) = 0$$
- Kiedy $\omega = (\beta; w)$, czyli $k = 1$ i $|\Gamma_1| = 1$, wówczas zapis gry uśrednionej w reprezentacji Sieci Wkładów Marginalnych składa się właśnie z tej reguły, zatem wartość Shapleya obliczamy zgodnie z rezulatem Ieonga i Shohama. Oznaczmy $|L_\beta^+|$ i $|L_\beta^-|$ odpowiednio przez p i n. Wówczas:
$$\varphi_i^{McQ}(v) = \begin{cases} \frac{(p-1)!(n)!}{(p+n)!} \cdot w & \text{jeśli } i \in L_\beta^+ \\ -\frac{(p)!(n-1)!}{(p+n)!} \cdot w & \text{jeśli } i \in L_\beta^- \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

- Kiedy zaś $k = 2$ (czyli $\omega = \Gamma_1|\Gamma_2$) i reguła jest spełnialna, wówczas wystarczy złączyć rezultaty z dwóch reguł Sieci Wkładów Marginalnych. Formuły obu reguł są przeciwne, wartość dla każdego gracza jest zatem różnicą pomiędzy zyskiem z reguły w której występował on jako literał pozytywny, a stratą z reguły w której tworzy literał negatywny. Niech $p_i = |L_i^+|$, $n_i = |L_i^-|$ (przypomnijmy, że $L_i^+ = \bigcup_j L_{i,j}^+$ i $L_i^- = \bigcup_j L_{i,j}^-$) oraz $w_i = \sum_j w_j^i$ dla $i \in \{1, 2\}$. Uzyskujemy zatem następujący rezultat:

$$\varphi_i^{McQ}(v) = \begin{cases} \frac{(p_1+n_2)!(p_2+n_1)!}{(p_1+p_2+n_1+n_2)!} \cdot (\frac{w_1}{p_1+n_2} - \frac{w_2}{p_2+n_1}) & \text{jeśli } i \in L_1^+ \cup L_2^- \\ \frac{(p_1+n_2)!(p_2+n_1)!}{(p_1+p_2+n_1+n_2)!} \cdot (\frac{w_2}{p_2+n_1} - \frac{w_1}{p_1+n_2}) & \text{jeśli } i \in L_2^+ \cup L_1^- \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

4.2. Obliczenie wartości wolnej od efektów zewnętrznych

Wartość wolną od efektów zewnętrznych obliczamy w podobny sposób jak wartość McQuillin'a, opieramy się jednak na innych układach. W uśrednionej grze wolnej od efektów zewnętrznych wartość koalicji S jest równa wartości zanurzonej koalicji $(S, sing(N\backslash S))$. Wartość wolna od efektów zewnętrznych jest wówczas równa zwykłej wartości Shapleya policzonej dla tej gry.

Aby policzyć wartość wolną od efektów zewnętrznych zastosujemy taką samą strategię jak poprzednio, czyli wskażemy reguły Sieci Wkładów Marginalnych które definiują grę uśrednioną. Poniższe twierdzenie mówi, że możemy to zrobić szybko.

Twierdzenie 4.2 *(za tw. 5.2 z [Michalak:et:al:10])*
Niech v będzie grą reprezentowaną regułą $\omega = \Gamma_1|\Gamma_2|\ldots|\Gamma_k$. Niech $R = \bigcup_{(i,j):|L_{i,j}^+|>1} \beta_j^i$, czyli R jest zbiorem formuł, które zawierają więcej niż jeden literał pozytywny. Załóżmy, że zbiór R nie jest pusty i jeżeli wszystkie formuły z R znajdują się w jednym bloku, i są ze sobą kompatybilne wtedy w innych formułach z tego bloku kompatybilnych z nimi nie występują literały negatywne. Wówczas istnieje algorytm przekształcający ω w zbiór prostych reguł Sieci Wkładów Marginalnych definiujących grę uśrednioną dla wartości wolnej od efektów zewnętrznych, przy czym zbiór ten zawiera maksymalnie $|N|$ reguł. Ponadto czas działania algorytmu jest równy $O(|\omega|)$.

Dowód: Naszym celem jest zatem określenie prostych reguł, które opisują wszystkie układy koalicje S dla których układ $\{S, sing(N \setminus S)\}$ spełnia regułę ω.

Zauważmy najpierw, że aby jakikolwiek układ postaci $\{S, sing(N \setminus S)\}$ spełniał naszą regułę formuły zawierające więcej niż jeden literał pozytywny muszą być wszystkie spełniane przez jedną koalicję - S. Nie mogą być zatem w różnych blokach, a jeżeli są w jednym bloku muszą być między sobą kompatybilne - jeżeli ω nie spełnia któregoś założenia możemy ją odrzucić. Załóżmy bez straty ogólności, że wszystkie te formuły znajdują się pierwszym bloku. Nasza tymczasowa formuła ma postać:

$$\beta' = \bigwedge_{i:|L_{1,i}^+|>1} \beta_i^1$$

Dotychczasowa wartość przypisana tej formule jest równa $\sum_{i:|L_{1,i}^+|>1} w_i^1$. Zastanówmy się jakie inne warunki nakłada na S nasza reguła. Po pierwsze musimy zaznaczyć w generowanej prostej regule, że S nie zawiera żadnych graczy z innych bloków. Po drugie dla wszystkich formuł z tego samego bloku, które nie są kompatybilne z S powinniśmy zaznaczyć też że S

nie zawiera graczy, którzy występują w nich w literałach pozytywnych. Do naszej formuły β' dochodzą zatem dwa nowe warunki:

$$\beta^* = (\bigwedge_{i:|L^+_{1,i}|>1} \beta^1_i) \wedge (\bigwedge_{(i,j):i\neq 1} \bigwedge_{p\in L^+_{i,j}} \neg p) \wedge (\bigwedge_{i:\ominus\{\beta^1_i,\beta'\}} \bigwedge_{p\in L^+_{1,i}} \neg p)$$

Oznaczmy pozostałe reguły przez R_+ (czyli $R_+ = \{(\beta^1_j; w^1_j) : \forall_{k:|L^+_{1,k}|>1} \oplus \{\beta^1_k, \beta^1_j\}\}$). Założyliśmy, że w takiej sytuacji formuły z R_+ nie posiadają literałów negatywnych. Oznacza to, że dowolny podzbiór formuł z R_+ jest spełnialny razem z β^*, a ponadto że nie wpływa on na graczy, którzy nie pojawili się ani w R_+, ani w β^*.[2] A skoro tak, to β^* jest nie tylko konieczną, ale i wystarczającą formułą na S. Reguła $(\beta^*; \sum_{i:|L^+_{1,i}|>1} w^1_i)$ jest naszą pierwszą prostą regułą.

Koalicja zdefiniowana przez literały pozytywne z β^* otrzymuje już dobrą wypłatę, jednak jeżeli S spełnia β^* i dowolną formułę z R_+ wówczas powinna także za nią otrzymać wypłatę. A zatem dla każdej reguły $(\beta^1_i; w^1_i) \in R_+$ musimy jeszcze dodać regułę $(\beta^* \wedge \beta^1_i; w^1_i)$. Finalnie nasz zbiór prostych reguł ma postać:

$$\{\beta^*; \sum_{j:|L^+_{1,j}|>1} w^1_j\} \cup \bigcup_{(\beta^1_j;w^1_j)\in R_+} \{\beta^* \wedge \beta^1_j; w^1_j\}$$

□

Popatrzmy na przykład ilustrujący powyższy mechanizm. Niech $|N| = 10$ i

$$\omega = (1 \wedge 2; v_1)(3 \wedge 4 \wedge \neg 5; v_2)(6 \wedge \neg 3; v_3)(7; v_4)(9; v_5)|(10 \wedge \neg 4; v_6)$$

Mamy dwie formuły w których jest więcej niż jeden literał pozytywny i na szczęście są w jednym bloku. Naszym pierwszym warunkiem jest zatem $\beta^* = 1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4 \wedge \neg 5$. W S na pewno nie wystąpi gracz 10, znajduje się on bowiem po kresce, więc możemy dodać go do formuły. Ponadto skoro w S na pewno jest gracz 3 to nie może być spełniona reguła $(6 \wedge \neg 3; v_3)$ - czyli w S nie będzie gracza 6. I na tym kończą się warunki obowiązkowe na istnienie koalicji S:

$$\beta^* = 1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4 \wedge \neg 5 \wedge \neg 6 \wedge \neg 10$$

Formuły kompatybile z β^* w pierwszym bloku i mające jeden literał pozytywny, czyli (7) i (9) nie mają literałów negatywnych. Poza graczami 7 i 9 do koalicji S dojść może jeszcze gracz 8, który nie występuje w ogóle w formule. Mamy zatem 8 koalicji które dostaną wypłatę w grze uśredniania: $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 7\}, \{1, 2, 3, 4, 8\}, \ldots, \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$. Na razie wszystkie otrzymują wypłatę $v_1 + v_2$, musimy bowiem dopisać jeszcze dodatkowe reguły dla formuł (7) i (9). Pełen zbiór prostych reguł jest równy: $\{(\beta^*; v_1 + v_2), (\beta^* \wedge 7; v_4), (\beta^* \wedge 9; v_5)\}$.

Tak jak w poprzednim rozdziale wyznaczmy wartość wolną od efektów zewnętrznych bazując na regułach które tworzy algorytm z powyższego twierdzenia i na obliczeniach Ieonga i Shohama. Rozpatrzmy dwa przypadki - kiedy formuła jest spełnialna i nie jest spełnialna.

- Tylko w jednym przypadku reguła nie jest spełniana przez żaden układ postaci $\{S, sing(N \setminus S)\}$ - kiedy wszystkie formuły zawierające więcej niż jeden literał pozytywny nie mogą być spełniane przez jedną koalicję, tzn. są w różnych blokach lub nie

[2] Zauważmy, że rezultat ten osiągamy także gdy osłabimy warunek z twierdzenia. Nie przeszkadzają nam bowiem takie ltierały negatywne, o których wiemy że nie zachodzą, tzn. te które występują w literałach negatywnych β^*.

sa ze sobą kompatybilne. Wówczas nasz algorytm nie tworzy żadnej reguły i wartość Shapleya w grze uśrednionej dla każdego gracza i jest równa zero:

$$\varphi_i^{free}(v) = 0$$

- W przeciwnym przypadku jak w dowodzie przyjmijmy bez straty ogólności, że wszystkie formuły zawierające więcej niż jeden literał pozytywny znajdują się w pierwszym bloku. Oznaczmy przez R_- zbiór reguł z pierwszego bloku które kolidują z którąkolwiek z nich i przez R_+ odpowiednio zbiór reguł niekolidujących (tak samo ten zbiór formuł oznaczaliśmy w dowodzie). Formalnie:

$$R_- = \{(\beta_j^1; w_j^1) : \exists_{k:|L_{1,k}^+|>1} \ominus \{\beta_k^1, \beta_j^1\}\}$$

$$R_+ = \{(\beta_j^1; w_j^1) : \forall_{k:|L_{1,k}^+|>1} \oplus \{\beta_k^1, \beta_j^1\}\}$$

Przypomnijmy, że założyliśmy, że każda formuła z R_+ jest postaci $\beta_j^1 = a$ dla pewnego gracza a.

Aby określić S tworzyliśmy formułę β^*. Literały w β^* są określone następująco:

$$L_{\beta^*}^+ = \bigcup_{j:|L_{1,j}^+|>1} L_{1,j}^+$$

$$L_{\beta^*}^- = \bigcup_{j:|L_{1,j}^+|>1} L_{1,j}^- + \bigcup_{(i,j):i\neq 1} L_{i,j}^+ + \bigcup_{j:(\beta_j^1;w_j^1)\in R_-} L_{1,j}^+$$

Oznaczmy przez p i n ilość literałów pozytywnych i negatywnych w formule β^*, czyli $p = |L_{\beta^*}^+|$ i $n = |L_{\beta^*}^-|$.

Zgodnie z algorytmem z dowodu reguł jest $|R_+| + 1$, z czego jedna zawiera p literałów pozytywnych i n negatywnych, a każda z pozostałych $p + 1$ i n. Wyznaczmy wartość Shapleya w stosunku do $L_{\beta^*}^+$, $L_{\beta^*}^-$, p, n oraz R_+ które zdefiniowaliśmy powyżej:

$$\varphi_i^{free}(v) = \begin{cases} \frac{(p-1)!(n)!}{(p+n)!} \cdot \sum_{j:|L_{1,j}^+|>1} w_j^1 + \frac{(p)!(n)!}{(p+n+1)!} \cdot \sum_{j:(\beta_j^1;w_j^1)\in R_+} w_j^1 & \text{jeśli } i \in L_{\beta^*}^+ \\ -\frac{(p)!(n-1)!}{(p+n)!} \cdot \sum_{j:|L_{1,j}^+|>1} w_j^1 - \frac{(p+1)!(n-1)!}{(p+n+1)!} \cdot \sum_{j:(\beta_j^1;w_j^1)\in R_+} w_j^1 & \text{jeśli } i \in L_{\beta^*}^- \\ \frac{(p)!(n)!}{(p+n+1)!} \cdot w & \text{jeśli } (i;w) \in R_+ \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

4.3. Obliczenie wartości Macho-Stadlera, Pereza-Castrillo oraz Wettsteina

Pokazywaliśmy już parę uproszczeń Ważonych Sieci Wkładów Marginalnych. Kolejnym zmniejszającym zwięzłość maksymalnie liniowo względem ilości graczy jest założenie, że tylko jedna prosta reguła składowa ma niezerową wartość. Zauważmy bowiem, że dowolną formułę postaci $\omega = (\beta_1^1; w_1^1)(\beta_2^1; w_2^1) \dots (\beta_{s_1}^1; w_{s_1}^1)| \dots |(\beta_1^k; w_1^k)(\beta_2^k; w_2^k) \dots (\beta_{s_k}^k; w_{s_k}^k)$ możemy zastąpić przez $\sum_{0\leqslant i\leqslant k} s_i$ reguł w których $\forall_{(i,j)\neq(i^*,j^*)} w_j^i = 0$ dla każdej pary (i^*, j^*). Przykładowo reguła $(1 \wedge 2; v_1)(3; v_2)|(4 \wedge \neg 5; v_3)$ określa taką samą grę jak zbiór reguł:
$\{(1 \wedge 2; v_1)(3; 0)|(4 \wedge \neg 5; 0), (1 \wedge 2; 0)(3; v_2)|(4 \wedge \neg 5; 0), (1 \wedge 2; 0)(3; 0)|(4 \wedge \neg 5; v_3)$. Dlatego w tej sekcji dla uproszczenia będziemy zajmować się regułami, w których tylko jedna „waga”

jest niezerowa. Bez straty ogólności będziemy przyjmować, że znajduje się ona w pierwszej prostej regule w pierwszym bloku.

Przypomnijmy w jaki sposób obliczana jest wartość Macho-Stadler i jego współpracowników. Podobnie jak w poprzednich rozdziałach wyliczamy grę uśrednioną $v^*(S)$, dla której wartość Shapleya jest naszym wynikiem. Grę uśrednioną określamy następująco:

$$v^*(S) = \sum_{P\in\mathcal{P},S\in P} \frac{\prod_{T\in P\setminus\{S\}}(|T|-1)!}{(|N|-|S|)!} v(S,P)$$

Przekształćmy wzór na wartość Shapleya aby wydzielić współczynnik stojący przez wartości $v(S)$:

$$\begin{aligned} Sh_i(v) &= \sum_{S\subseteq N,i\in S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!}(v(S)-v(S\setminus\{i\})) \\ &= \sum_{S\subseteq N,i\in S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!}v(S) - \sum_{S\subseteq N,i\notin S} \frac{(|S|)!(|N|-|S|-1)!}{|N|!}v(S) \\ &= \sum_{S\subseteq N} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!}\gamma_i(S)v(S) \end{aligned}$$

gdzie $\gamma_{i\in S}(S) = 1$ i $\gamma_{i\notin S}(S) = -\frac{|S|}{|N|-|S|}$.

Podstawmy teraz naszą wartość $v^*(S)$ aby wyznaczyć pełen wzór na $\varphi^*(v)$:

$$\begin{aligned} \varphi_i^*(v) &= \sum_{S\subseteq N} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!}\gamma_i(S)\cdot \sum_{P\in\mathcal{P},S\in P} \frac{\prod_{T\in P\setminus\{S\}}(|T|-1)!}{(|N|-|S|)!}v(S,P) \\ &= \sum_{(S,P)} \frac{(|S|-1)!\prod_{T\in P\setminus\{S\}}(|T|-1)!}{|N|!}\gamma_i(S)v(S,P) = \sum_{(S,P)} \frac{\prod_{T\in P}(|T|-1)!}{|N|!}\gamma_i(S)v(S,P) \end{aligned}$$

Przykładowo kiedy $(S,P) = (\{1\},\{\{1\},\{2,3,4\},\{5\}\})$ wartość φ^* dla gry $v^{(S,P)}$ przyjmuje wartości: $\varphi_1^*(v^{(S,P)}) = \frac{0!\cdot 2!\cdot 0!}{5!} = \frac{1}{60}$ oraz $\varphi_{i\in\{2,3,4,5\}}^*(v^{(S,P)}) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{60} = -\frac{1}{240}$. Widzimy, że zgodnie z aksjomatem silnej symetrii w grach $v^{(S,P)}$ wszyscy gracze z poza S otrzymują taką samą wypłatę.

Z powodu tego, że wartość φ^* jest określona na wszystkich zanurzonych koalicjach nie będziemy mogli użyć podejścia jakie zaprezentowaliśmy w poprzednich sekcjach. Nie jest bowiem możliwe ujęcie dowolnych zależności między koalicjami zapisanych w dowolnej regule Ważonych Sieci Wkładów Marginalnych w zbiór reguł Sieci Wkładów Marginalnych (już przy poprzednich wartościach mieliśmy z tym trochę kłopotów). Postaramy się policzyć wartość bezpośrednio z formuły, jednak żeby było to jakkolwiek możliwe zajmiemy się regułami które mają jednoelementowe bloki. To założenie, razem z założeniem mówiącym że tylko jedna waga jest niezerowa daje nam następującą postać formuły:

$$(\beta_1;w)|(\beta_2;0)|\ldots|(\beta_k;0)$$

Przypomnijmy, że $L_i^+ = \bigcup_j L_{i,j}^+$ i $L_i^- = \bigcup_j L_{i,j}^-$, a zatem w naszym prostszym przypadku $L_i^+ = L_{i,1}^+$ i $L_i^- = L_{i,1}^-$. Dodatkowo przyjmijmy, że $s_i = |L_i^+|$, $t_i = |L_i^-|$ oraz niech n będzie liczbą wszystkich literałów - $n = \sum_i(s_i+t_i)$.

Nasz pierwszy prosty rezultat dotyczy formuł dla których nie mamy literałów negatywnych, tzn. $t_i = 0$ dla każdego i.

Lemat 4.1 *Niech formuła ω będzie postaci $\omega = (p_1^1 \wedge p_2^1 \wedge \ldots \wedge p_{s_1}^1; w)| \ldots |(p_1^k \wedge p_2^k \wedge \ldots \wedge p_{s_k}^k; 0)$. Jeżeli zbiory L_i^+ są rozłączne wówczas wartość φ^* przyjmuje wartości:*

$$\varphi_i^*(v) = \begin{cases} \frac{\prod_i (s_i-1)!}{n!} & \textit{jeśli } i \in L_1^+ \\ -\frac{s_1}{n-s_1} \cdot \frac{\prod_i (s_i-1)!}{n!} & \textit{jeśli } i \in L_j^+ \textit{ dla } j \neq 1 \\ 0 & \textit{wpp.} \end{cases}$$

gdzie $n = \sum_i s_i$.

Dowód: Krótki dowód tego lematu zacznijmy uwagą, że wszyscy gracze nie występujący w tej formule są graczami-atrapami. A skoro tak, to nie tylko otrzymują zerową wypłatę, ale skoro wartość Macho-Stadler i współpracowników spełnia aksjomat silnej symetrii, to ich obecność w grze nie wpływa na wypłaty dla innych graczy. Możemy zatem przyjąć, że w grze są tylko gracze $\bigcup_i L_i^+$.

W takiej grze powyższa reguła określa jednoznacznie podział na koalicje: $\{L_1^+, \ldots, L_k^+\}$. Tylko jedna koalicja zanurzona $(L_1^+, \{L_1^+, \ldots, L_k^+\})$ ma wartość, podstawienie wartości do wzoru daje żądany wynik.

□

Jak wspomnieliśmy, reprezentacja Ważonych Sieci Wkładów Marginalnych ograniczona do reguł postaci z powyższego lematu jest w pełni ekspresywna. Problemem tego ograniczenia jest jednak mała zwięzłość.

Przedstawimy teraz nasz główny rezultat. Dotyczy on reguł, w których literały negatywne występują tylko w regule która ma niezerową wagę.

Twierdzenie 4.3 *Niech formuła ω będzie postaci*

$$\omega = (p_1^1 \wedge p_2^1 \wedge \ldots \wedge p_{s_1}^1 \wedge \neg n_1^1 \wedge \neg n_2^1 \wedge \ldots \wedge \neg n_{t_1}^1; w)| \ldots |(p_1^k \wedge p_2^k \wedge \ldots \wedge p_{s_k}^k; 0).$$

Jeżeli zbiory L_i^+ są rozłączne i $L_1^+ \cap L_1^- = \emptyset$ wówczas wartość φ^* przyjmuje wartości:

$$\varphi_i^*(v) = \begin{cases} \frac{(n-s_1)!}{(n-s_1-t_1)!} \cdot \frac{\prod_i (s_i-1)!}{n!} & \textit{jeśli } i \in L_1^+ \\ -\frac{s_1}{n-s_1} \cdot \frac{(n-s_1)!}{(n-s_1-t_1)!} \cdot \frac{\prod_i (s_i-1)!}{n!} & \textit{jeśli } i \in L_1^- \textit{ lub } i \in L_j^+ \textit{ dla } j \neq 1 \\ 0 & \textit{wpp.} \end{cases}$$

gdzie $n = t_1 + \sum_i s_i$.

Dowód: Analogicznie jak w dowodzie lematu powyżej możemy przyjąć, że graczy którzy nie występują w żadnej formule nie ma w ogóle. Ponadto załóżmy, że w L_1^- nie ma graczy którzy występują w L_j^+ dla żadnego j - ta informacja byłaby redundatna, więc możemy ją odrzucić. Zatem w naszej regule każdy gracz występuje w jednym literale.

Wiemy, że każdą grę możemy przedstawić jako sumę gier postaci $v^{(S,P)}$ - gry w których tylko zanurzona koalicja (S, P) ma niezerową wartość. Z aksjomatu silnej symetrii wiemy ponadto, że w każdej takiej grze wartość φ^* ma tylko dwie różne niezerowe wypłaty - jedną wspólną dla graczy z koalicji S oraz jedną wspólną dla graczy z $N \setminus S$. Zauważmy, że nasza reguła przyznaje niezerową wypłatę tylko koalicji L_1^+ w układzie koalicyjnym, który „wtasowuje" graczy z L_1^- między układ pozostałych graczy $\{L_2^+, \ldots, L_k^+\}$. A zatem grę możemy rozłożyć na zbiór gier postaci $v^{(L_1^+, \{L_1^+, P'\})}$ gdzie P' jest pewnym podziałem $N \setminus L_1^+$.

Wnioskiem z powyższych rozważań jest fakt, że wszyscy gracze poza L_1^+ otrzymują taką samą wypłatę. O ile dla graczy z literałów pozytywnych z innego niż pierwszy bloku fakt ten jest dość oczywisty, o tyle równość $\varphi_{i\in L_1^-}(v) = \varphi_{i\in L_j^+:j>1}(v)$ może być pewnym zaskoczeniem. Oznaczmy zatem wartość $\varphi^*_{i\in L_1^+}$ jako φ^*_P, a φ^*_i dla pozostałych wartości jako φ^*_N. Z aksjomatu efektywności wiemy ponadto, że $\varphi^*_P \cdot s_1 + \varphi^*_N \cdot (n - s_1) = 0$, czyli

$$\varphi^*_P(v) = -\frac{n - s_1}{s_1} \cdot \varphi^*_N(v) \tag{4.1}$$

Oznaczmy przez ω_{t_1} naszą wyjściową regułę oraz określmy ω_{i-1} rekurencyjnie względem ω_i przez zamianę literału negatywnego z L_1^- z najmniejszym indeksem na literał pozytywny. Przykładowo dla $\omega_2 = (1 \wedge \neg 2 \wedge \neg 3; w)|(4; 0)$ formuła ω_1 ma postać $\omega_1 = (1 \wedge 2 \wedge \neg 3; w)|(4; 0)$, a $\omega_0 = (1 \wedge 2 \wedge 3; w)|(4; 0)$. Niech v'_i będzie grą zdefiniowaną przez ω_i. Wyrazimy grę v'_{t_1} w stosunku do v'_0, dla której umiemy liczyć wartość φ^*.

Popatrzmy na sumę gier $\hat{v} = v'_i + v'_{i-1}$ i niech t będzie graczem, który w v'_i tworzył literał negatywny, a w v'_{i-1} tworzy literał pozytywny. W grze $\hat{v}$ gracz t jest graczem-atrapą, bo jedyną informacją o t jaka wynika z sumy formuł ω_i oraz ω_{i-1} jest fakt, że t może być w pierwszej koalicji, a może nie być. A skoro tak, to z aksjomatu gracza-atrapy $\varphi_t(\hat{v}) = 0$, czyli $\varphi_t(v'_i) = -\varphi_t(v'_{i-1})$. Ale t w v'_i tworzy literał negatywny, a w v'_{i-1} pozytywny, a zatem

$$\varphi_N(v'_i) = -\varphi_P(v'_{i-1}) \tag{4.2}$$

Za pomocą równości 4.1 oraz zależności rekurencyjnej 4.2 otrzymujemy:

$$\varphi_P(v'_i) = -\frac{n - s_1}{s_1} \cdot \varphi^*_N(v'_i) = \frac{n - s_1}{s_1} \cdot \varphi^*_P(v'_{i-1})$$

czyli iterując dalej (i pamiętając o tym, że zmienna s_1 zależy od gry v'_i) mamy:

$$\begin{aligned}
\varphi_P(v'_{t_1}) &= \frac{n - s_1}{s_1} \cdot \varphi^*_P(v'_{t_1-1}) = \frac{n - s_1}{s_1} \cdot \frac{n - (s_1 + 1)}{s_1 + 1} \cdot \varphi^*_P(v'_{t_1-2}) \\
&= \frac{n - s_1}{s_1} \cdot \frac{n - (s_1 + 1)}{s_1 + 1} \cdot \frac{n - (s_1 + 2)}{s_1 + 2} \cdot \varphi^*_P(v'_{t_1-3}) \\
&= \cdots \\
&= \frac{(n - s_1)!}{(n - s_1 - t_1)!} \cdot \frac{(s_1 - 1)!}{(s_1 + t_1 - 1)!} \cdot \varphi^*_P(v'_0) \\
&= \frac{(n - s_1)!}{(n - s_1 - t_1)!} \cdot \frac{(s_1 - 1)!}{(s_1 + t_1 - 1)!} \cdot \frac{(s_1 + t_1 - 1)! \cdot \prod_{i>1}(s_i - 1)!}{n!} \\
&= \frac{(n - s_1)!}{(n - s_1 - t_1)!} \cdot \frac{\prod_i (s_i - 1)!}{n!}
\end{aligned}$$

□

Rozdział 5

Podsumowanie

W naszej pracy omówiliśmy wartość Shapleya w kontekście gier z efektami zewnętrznymi. Dwoma głównymi zagadnieniami jakimi się zajęliśmy było porównanie rozszerzonych wartości Shapleya oraz zbadanie własności obliczeniowych jednej z nielicznych reprezentacji gier z efektami zewnętrznymi - Ważonych Sieci Wkładów Marginalnych.

Przeanalizowaliśmy sześć różnych rozszerzonych wartości Shapleya i porównaliśmy je. Udowodniliśmy przy tym twierdzenie pozwalające zastąpić aksjomat marginalność wzmocnieniem aksjomatu gracza-atrapy, które pozwoliło nam stwierdzić, że aż cztery wartości możemy wyprowadzić aksjomatycznie jedynie modyfikując aksjomat gracza-atrapy w czterech podstawowych aksjomatach przyjętych przez Shapleya (i uogólnionych przez nas na gry z efektami zewnętrznymi). Innym kryterium porównawczym jest możliwość skonstruowania wartości za pomocą podejścia uśredniania - pokazaliśmy, że tą własność również spełniają cztery wartości. Porównaliśmy także spełnialność dwóch prostych aksjomatów, których założenie wydaje nam się rozsądne - aksjomatu silnego gracza-atrapy oraz aksjomatu słabej monotoniczności.

Nasza analiza nie wskazała jednej sprawiedliwej wartości Shapleya. Odpowiedź na pytanie która wartość powinna być używana do podziału zysków przy tworzeniu wspólnej koalicji wszystkich graczy wciąż zależy od przyjętego przez uczestników gry pojęcia sprawiedliwości.

Korzystając z wyników [Michalak:et:al:10] wyznaczyliśmy zwarty wzór na wartość wolną od efektów zewnętrznych oraz wartość McQuillina dla gry reprezentowanej przez Ważone Sieci Wkładów Marginalnych. Aby osiągnąć szybki (liniowy) czas musieliśmy jednak ograniczyć zbiór dopuszczalnych reguł. Dodatkowo obliczyliśmy wartość Macho-Stadlera, Pereza-Castrillo oraz Wettsteina przy innych założeniach na zbiór reguł.

Nasza praca jest jedną z pierwszych które podejmują temat złożoności obliczeniowej wartości Shapleya. Otrzymane wyniki sugerują wiele interesujących kierunków badań na przyszłość. Ciekawym zagadnieniem jest to, czy da się szybko obliczyć wartości omawiane przez nas dla reguł, które wykluczyliśmy z powyższych algorytmów. Innym pytaniem jest, czy korzystając z reprezentacji Ważonych Sieci Wkładów Marginalnych możemy policzyć szybko te rozszerzenia wartości Shapleya, które nie zostały przez nas omówione. W końcu, czy istnieją inne zwięzłe, w pełni ekspresywne reprezentacje dla gier z efektami zewnętrznymi, które mają lepsze własności obliczeniowe niż Ważone Sieci Wkładów Marginalnych.

Dodatek A

Wartość Hu-Yanga w podejściu uśredniania

Autorzy pracy [HuYang09] wspomnieli, że ich wartość da się uzyskać za pomocą podejścia uśredniania. Poniżej pokażemy jak to uzyskać.

Na początku przekształćmy wzór 2.6:

$$\begin{aligned}
\varphi_i^{HY}(v) &= \sum_{P\in\mathcal{P}} \sum_{S\subseteq N, i\in S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!|\mathcal{P}|}(v(S,P_{[S]})-v(S_{-i},P_{[S_{-i}]})) \\
&= \sum_{(S,P),i\in S} \sum_{O\in\mathcal{P}_{(S,P)}} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!|\mathcal{P}|}(v(S,O_{[S]})-v(S_{-i},O_{[S_{-i}]})) \\
&= \sum_{(S,P),i\in S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!|\mathcal{P}|} \sum_{O\in\mathcal{P}_{(S,P)}} (v(S,O_{[S]})-v(S_{-i},O_{[S_{-i}]})) \\
&=^* \sum_{(S,P),i\in S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!|\mathcal{P}|} \sum_{T\in P\setminus\{S\}} |\mathcal{P}_{(S_{-i},tr_i^T(P))}|\cdot(v(S,P)-v(S_{-i},tr_i^T(P))) \\
&= \sum_{(S,P),i\in S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!} \sum_{T\in P\setminus\{S\}} \frac{|\mathcal{P}_{(S_{-i},tr_i^T(P))}|}{|\mathcal{P}|}\cdot(v(S,P)-v(S_{-i},tr_i^T(P)))
\end{aligned}$$

gdzie równość oznaczona gwiazdką wynika z naszego przekształcenia zliczanego wkładu marginalnego. Z [MachoStadler:et:al:07] wiemy, że jeżeli wartość φ jest wyznaczona w podejściu uśredniania, wówczas spełnia równanie:

$$\varphi_i(v) = \sum_{(S,P),i\in S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!} \sum_{T\in P\setminus\{S\}} \alpha(S_{-i},tr_i^T(P))(v(S,P)-v(S_{-i},tr_i^T(P)))$$

A skoro tak, to współczynnik $\frac{|\mathcal{P}_{(S_{-i},tr_i^T(P))}|}{|\mathcal{P}|}$ musi być wagą podziału $tr_i^T(P)$ przy obliczaniu wartości S_{-i}. Zatem w ogólności:

$$\alpha^{HY}(S,P) = \frac{|\mathcal{P}_{(S,P)}|}{|\mathcal{P}|}$$

Pozostaje jeszcze pokazać, że wagi te są dobre. Najpierw zauważmy, że sumują się do jedynki dla ustalonego S. Skoro z definicji wartość $|\mathcal{P}_{(S,P)}|$ jest liczbą różnych rozmieszczeń graczy z S w układzie $P \setminus \{S\}$, to $\sum_{P \in \mathcal{P}} |P_{(S,P)}|$ jest liczbą rozmieszczeń graczy z S w dowolnym układzie złożonym z graczy $N \setminus S$. Ta liczba jest oczywiście równa ilości wszystkich układów, czyli $|\mathcal{P}|$.

Wagi są symetryczne, pozostaje zatem pokazać spełnialność równania rekurencyjnego z *Twierdzenia 1* w [MachoStadler:et:al:07], które narzuca dodatkowe wymagania na wagi dla wartości spełniających aksjomat gracza-atrapy:

$$\alpha(S, P) = \sum_{T \in P \setminus \{S\}} \alpha(S_{-i}, tr_i^T(P)) \tag{A.1}$$

dla każdego $i \in S$. Wymagana równość $|\mathcal{P}_{(S,P)}| = \sum_{T \in P \setminus \{S\}} |\mathcal{P}_{(S_{-i}, tr_i^T(P))}|$ jest oczywista - prawa strona jest sumą liczby rozmieszczeń graczy z S bez i w układach który powstał po przejściu i do jednej z pozostałych koalicji.

Zastanówmy się jeszcze na koniec nad liczbową postacią $|\mathcal{P}_{(S,P)}|$. Wartość ta zależy oczywiście tylko od dwóch czynników - rozmiaru koalicji S i ilości koalicji w $P \setminus \{S\}$. Zdefiniujmy funkcję $f(n, k)$ oznaczającą ilość rozmieszczeń n graczy w układzie k koalicji złożonych z pozostałych graczy (czyli $\mathcal{P}_{(S,P)}$ dla $|S| = n$ i $|P| = k + 1$). Liczba $f(n, 0)$ (czyli $|\mathcal{P}|$) oznacza zatem ilość podziałów n rozróżnialnych elementów na dowolną ilość nierozróżnialnych koszyków. Liczba ta jest równa n-tej liczbie Bella (B_n). Zwiększając k „oznaczamy" niektóre koszyki - $f(n, 1)$ jest liczbą podziałów na dowolna ilość koszyków, z czego tylko jeden jest odróżnialny (został oznaczony), a w ogólności $f(n, k)$ jest liczbą podziałów n rozróżnialnych elementów na dowolną ilość koszyków, przy założeniu że k koszyków jest ponumerowanych, a pozostałe są nierozróżnialne. Wartości te spełniają wzór rekurencyjny:

$$f(n, k) = k \cdot f(n - 1, k) + f(n - 1, k + 1)$$

który jest odpowiednikiem równania A.1 - tylko stworzenie przez i osobnej koalicji daje inną wagę α, pozostałe $|P| - 1$ wag jest równych sobie.

Posługując się interpretacją kombinatoryczną możemy uzyskać zwarty wzór na wartość $f(n, k)$, który wykorzystuje liczby Bella. Rozdzielmy elementy n na dwie części - te (załóżmy że jest ich i) które umieścimy w którymś z ponumerowanych koszyków i te, które znajdą się poza nimi. Każdy z elementów pierwszej grupy możemy umieścić na k sposobów (k^i), natomiast elementy które nie trafiają do ponumerowanych koszyków tworzą dowolny podział na nierozróżnialne koszyki (czyli B_{n-i}). Wzór na naszą funkcję ma zatem postać:

$$f(n, k) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_{n-i} k^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i k^{n-i}$$

Bibliografia

[Bolger89] E. M. Bolger, 'A set of axioms for a value for partition function games', *Internat. J. Game Theory*, 18(1), 37–44, (1989).

[Shapley53] L. S. Shapley, 'A value for n-person games', in *In Contributions to the Theory of Games, volume II*, eds., H.W. Kuhn and A.W. Tucker, 307-317, Princeton University Press, (1953).

[ClippelSerrano08] G. de Clippel and R. Serrano, 'Marginal contributions and externalities in the value', *Econometrica*, 76(6), 1413-1436, (2008).

[MachoStadler:et:al:07] I. Macho-Stadler, D. Perez-Castrillo, and D. Wettstein, 'Sharing the surplus: An extension of the shapley value for environments with externalities', *J. of Economic Theory*, (135), 339–356, (2007).

[PhamDoNorde07] K.H. Pham Do and H. Norde, 'The Shapley value for partition function form games', *Int. Game T. Rev.*, 9(2), 353–360, (2007).

[McQuillin08] B. McQuillin, 'The extended and generalized Shapley value: Simultaneous consideration of coalitional externalities and coalitional structure', *Journal of Economic Theory*, (144), 696–721, (2009).

[Myerson77] R. B. Myerson, 'Values of games in partition function form', *Internat. J. Game Theory*, 6(1), 23–31, (1977).

[HuYang09] C.-C. Hu and Y.-Y. Yang, 'An axiomatic characterization of a value for games in partition function form', *SERIEs: Journal of the Spanish Economic Association*, 475-487, (2010).

[Michalak:et:al:09] T.P. Michalak, D. Marciniak, M. Samotulski, T. Rahwan, P. McBurney, M. Wooldridge, and N. Jennings, 'A logic-based representation for coalitional games with externalities', in *AAMAS-2010*, 125-132, (2010).

[Michalak:et:al:10] T.P. Michalak, T. Rahwan, D. Marciniak, M. Szamotulski and N. Jennings, 'Computational aspects of extending the Shapley value to coalitional games with externalities', in *ECAI-2010*, 197-202, (2010).

[IeongShoham05] S. Ieong and Y. Shoham, 'Marginal contribution nets: A complact representation scheme for coalitional games', *ACM EC-06*, 193-202, (2006).