GAL 2010/11 — zadania

Aleksander Zabłocki

20 października 2010

“Zadania” to te, które (zgodnie z moją pamięcią) były na ćwiczeniach.

“Zadania domowe” są nieobowiązkowe i nie na kartki (obowiązkowe serie na kartki są w innych plikach w tym katalogu). Chciałbym, żeby każdy umiał je zrobić. W razie jakichkolwiek kłopotów zachęcam do szukania wyjaśnień u mnie lub u kolegów.

Zadania z gwiazdką są ogólniejsze/trudniejsze, tylko dla chętnych! Do oddawania na piśmie, bo może nie być czasu na ich omawianie. Będą za to dodatkowe punkty, i cukierki ;) Polecam.

Linki:

Układy równań — eliminacja Gaußa (8 X)
Układy równań — parametry (13 X)
Liczby zespolone (15 X)
Liczby zespolone — pierwiastki (20 X)

Układy równań — eliminacja Gaußa (8 X)

Zadania

1. Rozwiąż metodą eliminacji Gaussa układ równań o postaci macierzowej:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -10 \end{array}\right]$$

2. Dla jakich wartości $A, B, C \in \mathbb{R}$ poniższe macierze są w postaci schodkowej / schodkowej zredukowanej?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & B & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

3. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +2x_4 & = & 1 \\ 7x_1 & +5x_2 & +9x_3 & +4x_4 & = & 3 \\ 5x_1 & -3x_2 & +7x_3 & +4x_4 & = & 1 \end{cases}$$

4. Rozwiąż układy równań o postaci macierzowej

(a)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 3 & 0 \\ 11 & 17 & -8 & 5 & 1 \end{array}\right]$$

(b)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{array}\right]$$

Zadania domowe

5. Rozwiąż układy równań o macierzach:

(a)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 9 & 2 & 4 \\ 4 & 13 & 11 & 12 & 8 \end{array}\right]$$

(b)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 6 & 3 & 9 \end{array}\right]$$

(c)
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

(d)
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

(e)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 7 \\ 3 & 4 & -9 & 9 \\ 5 & 2 & -8 & 8 \\ 8 & 4 & -7 & 12 \end{array}\right]$$

(*) 6. Udowodnij, że jeśli z macierzy A można uzyskać (poprzez operacje elementarne) macierze w postaci schodkowej zredukowanej A', A'', to $A' = A''$.
Równoważnie: jeśli z macierzy schodkowej zredukowanej B można uzyskać (poprzez op. el.) macierz schodkową zredukowaną B', to $B = B'$.
Wskazówka: Rozważ układy równań związane z tymi macierzami.

Układy równań — parametry (13 X)

Zadania

7. Znajdź wszystkie wielomiany f stopnia co najwyżej 2, spełniające warunki

$$f(-1) = 2, \qquad f(1) = 8, \qquad f(2) = 14.$$

8. Rozwiąż, w zależności od wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, układ równań o postaci macierzowej

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & t & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

9. Rozwiąż, w zależności od wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, układy równań o następującej postaci macierzowej:

(a)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & a & b \end{array}\right]$$

(b)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2b \\ 1 & a & 1 & 2b \\ a & 1 & 1 & b \end{array}\right]$$

10. Doprowadź do postaci schodkowej nie używając ułamków:

(a)
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 20 & 0 & 1 \\ 34 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

11. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ ciąg

$$\left(t^2, -1, 1, -t^2, 1\right)$$

jest rozwiązaniem układu równań o postaci macierzowej

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 7 & -5 & -3 & 5 & -5 & -1 \\ 9 & 8 & -9 & 2 & 11 & 1 \\ -4 & 6 & 2 & -1 & 9 & 2 \end{array}\right]?$$

Zadania domowe

12. Rozwiąż, w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, układy równań o macierzach:

(a)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} a & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 & 0 & a \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(b)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(c)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 4 & a \end{array}\right]$$

13. Układ równań U ma r równań i n niewiadomych. Co wiadomo o ilości rozwiązań układu U (czy może wynosić 0, 1, ∞?) w przypadku, gdy wiadomo, że:
i) $r < n$;
ii) $r = n$;
iii) $r > n$?

(*) 14. Niech x, y, z, A, B, C będą dowolne rzeczywiste, byle by x, y, z były różne między sobą. Udowodnij, że istnieje dokładnie jeden wielomian P stopnia nie większego niż 2, spełniający warunki

$$P(x) = A, \qquad P(y) = B, \qquad P(z) = C.$$

(*) 15. Niech

$$U : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= a_{1,(n+1)} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= a_{2,(n+1)} \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= a_{m,(n+1)} \end{cases}$$

będzie układem równań liniowych z jednym parametrem t, w którym każdy współczynnik a_{ij} ma postać $A_{ij}t + B_{ij}$, gdzie A_{ij}, B_{ij} są liczbami rzeczywistymi (być może równymi zero). Udowodnij, że istnieje skończony zbiór $D = \{d_1, \ldots, d_k\} \subseteq \mathbb{R}$ taki, że dla każdej wartości t spoza zbioru D układ U ma tyle samo rozwiązań.

(*) 16. Rozważamy układy równań z dwoma parametrami t, u, w których każdy współczynnik a_{ij} ma postać $A_{ij}t + B_{ij}u + C_{ij}$ dla pewnych $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}$.
Znajdź przykład układu równań tego typu, który posiada rozwiązania dla dowolnego $u \geq 0$, ale nie ma rozwiązań dla $u < 0$.
Dokładniej: dla $u \geq 0$ istnieje takie t, że układ jest niesprzeczny; natomiast jeśli $u < 0$, to układ jest sprzeczny dla każdego t.

Liczby zespolone (15 X)

Zadania

17. Oblicz

$$\frac{2+3i}{4-7i}$$

18. *(rozwiązaliśmy nie korzystając z postaci trygonometrycznej)*
Znajdź wszystkie liczby zespolone, których kwadrat wynosi $1-i$.

19. Znajdź wszystkie zespolone rozwiązania równania

$$\tfrac{1}{z+i} + \tfrac{1}{z-i} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

20. Rozwiąż układ równań (o współczynnikach zespolonych) o następującej postaci macierzowej:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1+i & 1-i & 1 \\ 1-i & 2i & 0 \end{array}\right]$$

21. Udowodnij, że dla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zachodzi

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

22. Oblicz $(1+i)^{82}$.

Zadania domowe

23. Oblicz:

$$(4-3i)\cdot(-2+2i), \qquad \frac{5-5i}{1-2i}, \qquad \frac{6+2i}{1+i}$$

24. Rozwiąż układ równań o macierzy

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1-i & i & 2 & i & 1+i \\ 1+i & 1 & 2i & 1+2i & 1-i \\ i & 0 & -1+i & i & 0 \end{array}\right]$$

25. Znajdź wszystkie zespolone pierwiastki kwadratowe liczb:

$$-7, \qquad 3-4i, \qquad -1+\sqrt{3}i$$

26. Znajdź wszystkie rozwiązania zespolone równań:

$$z = \tfrac{1+i}{2+i-z},$$

$$\left(\tfrac{3}{10} - \tfrac{2}{5}i\right) z^2 + \left(-1+\sqrt{3}i\right) z - \tfrac{6}{5} - \tfrac{8}{5}i = 0.$$

27. Udowodnij, że dla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zachodzi

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$

$$\overline{\left(\tfrac{z_1}{z_2}\right)} = \tfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \qquad \text{jeśli } z_2 \neq 0.$$

28. Udowodnij, np. wykorzystując wzór na mnożenie postaci trygonometrycznych, równości:

$$\begin{aligned} \left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}, && \text{jeśli } z_2 \neq 0, \\ \arg\frac{z_1}{z_2} &= \arg z_1 - \arg z_2, && \text{jeśli } z_1, z_2 \neq 0. \end{aligned}$$

29. Oblicz (przy pomocy postaci geometrycznej):

$$(-1-\sqrt{3}i)^{53}, \qquad (i-1)^{2010}.$$

30. Oblicz:

$$\left(\frac{i+\sqrt{3}}{i+1}\right)^{55}, \qquad \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{3}i)^{40}}{(\sqrt{3}+i)^{20}}.$$

Wskazówka: Skorzystaj z zadania 28.

Liczby zespolone — pierwiastki (20 X)

Zadania

31. Rozwiąż poniższe równania w liczbach zespolonych. Naszkicuj zbiory rozwiązań:

(a)
$$z^4 = 9$$

(b)
$$z^{10} = 1$$

(c)
$$z^{10} = -1 - \sqrt{3}i$$

32. Znajdź i naszkicuj następujące zbiory:

(a)
$$\big\{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\big((1+i)z\big) \geq 0\big\}$$

(b)
$$\big\{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\big((1+i)z^3\big) \geq 0\big\}$$

(c)
$$\big\{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}\big((1+i)z+2\big) \geq 0\big\}$$

Zadania domowe

33. Znajdź wszystkie zespolone pierwiastki piątego stopnia z $1+i$.

34. Rozwiąż równania w liczbach zespolonych:

(a)
$$\bar{z}z^3 = \tfrac{|z|}{8i}$$

(b)
$$z^6 = \tfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$$

(c)
$$z^9 = (1+i)\bar{z}$$

(d)
$$z|z| = \bar{z}$$

35. Znajdź i naszkicuj na płaszczyźnie zespolonej następujące podzbiory $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
A &= \{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}(iz) < 0\} \\
B &= \big\{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}(z^2) < 0\big\} \\
C &= \big\{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}(iz^4+2) \geq 0\big\} \\
D &= \Big\{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}\, z^2 > \sqrt{3}\,\mathrm{Re}\, z^2\Big\} \\
E &= \{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}((1+i)z) > 0\} \\
F &= \Big\{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\, z^2 > \sqrt{3}\,\mathrm{Im}\, z^2\Big\} \\
G &= \Big\{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\big((1+\sqrt{3}i)(z-1)^3\big) > 0\Big\}
\end{aligned}$$

36. Oblicz sumę oraz iloczyn wszystkich pierwiastków stopnia n z jedynki.

(*) 37. Oblicz przy pomocy liczb zespolonych:

(a)
$$\cos\alpha + \cos(2\alpha) + \cos(3\alpha) + \ldots + \cos(n\alpha),$$

(b)
$$\cos\alpha + 2\cos(2\alpha) + 3\cos(3\alpha) + \ldots + n\cos(n\alpha),$$

(c)
$$\cos\alpha + n\cos(2\alpha) + \binom{n}{2}\cos(3\alpha) + \ldots + \binom{n}{n}\cos((n+1)\alpha),$$

(*) 38. Przy pomocy liczb zespolonych udowodnij twierdzenie Ptolemeusza:
Jeśli na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg, to zachodzi

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|.$$

(w razie wątpliwości: punkty A, B, C, D leżą na okręgu właśnie w tej kolejności)