Zadania nieobowiązkowe z GAL I — seria A
(termin dla chętnych: 19 XI)

1. Niech

$$v_1 = (1,3,1,3), \quad v_2 = (3,8,2,9), \quad v_3 = (1,5,2,6), \quad w = (0,3,2,3).$$

a) Czy układ v_1, v_2, v_3 jest liniowo niezależny? Czy w jest kombinacją liniową wektorów v_1, v_2, v_3?
b) Podaj przykład takiego $z \in \mathbb{R}^4$, że układ v_1, v_2, w, z jest bazą $\mathbb{R}^4$. Znajdź czwartą współrzędną wektora v_3 w tej bazie.

2. Przy pomocy twierdzenia Kroneckera-Capelliego zbadaj w zależności od wartości $p \in \mathbb{R}$ ilość rozwiązań układu równań o macierzy

$$\left[\begin{array}{cccc|c} p & 1 & -2 & 1 & p \\ 1 & p & 1 & p & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

3. Niech $v_1, \ldots, v_n$ będą wektorami w przestrzeni liniowej V. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

(a) układ $v_1, \ldots, v_n$ jest liniowo niezależny i rozpina V;
(b) układ $v_1, \ldots, v_n$ jest maksymalnym układem niezależnym;
(c) dla dowolnego $w \in V$ istnieje dokładnie jeden układ liczb $a_1, \ldots, a_n$ spełniający równość $w = \sum_i a_i v_i$.

(Oczywiście nie wolno w takim zadaniu napisać „To prawda, bo było w skrypcie/na ćwiczeniach". Można w dowodzie korzystać z tw. Steinitza, ew. z jakichś prostych faktów, np. że „kombinacja kombinacji jest kombinacją". Trudniejsze wnioski — na przykład tezę z zadania — wypadałoby udowodnić ;)