Zadania domowe z GAL I — seria 9 (termin: 7 I)

Uwaga! Rozwiąż **wybrane** przez siebie **trzy** spośród poniższych zadań. Jeśli rozwiążesz wszystkie, będą się liczyć trzy najlepsze.

1. a) Podaj przykład przekształcenia liniowego $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takiego, że

$$\varphi\Big(\operatorname{lin}\big((1,0,0),\ (0,1,0)\big)\Big) = \operatorname{lin}\big((1,2,3),\ (1,0,2)\big)$$
$$\varphi\Big(\operatorname{lin}\big((0,1,0),\ (0,0,1)\big)\Big) = \operatorname{lin}\big((1,1,1),\ (2,0,1)\big)$$

b) Czy istnieje liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, spełniające warunki:

$$\varphi\Big(\operatorname{lin}\big((1,0,0),\ (0,1,0)\big)\Big) = \operatorname{lin}\big((1,1,1)\big)$$
$$\varphi\Big(\operatorname{lin}\big((0,0,1)\big)\Big) = \operatorname{lin}\big((1,0,1)\big)$$
$$\varphi\Big(\operatorname{lin}\big((1,2,3)\big)\Big) = \operatorname{lin}\big((1,0,0)\big)$$

2. Niech

$$\mathcal{A}: \quad (1,4),\ (1,5),$$
$$\mathcal{B}: \quad (1,0,0,0),\ (1,1,0,0),\ (1,0,0,1),\ (1,0,1,0),$$
$$\mathcal{C}: \quad (1,1), (1,-1),$$

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Znajdź $M(\psi \circ \varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.

3. Niech $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie liniowe, $\mathcal{A}$ będzie bazą $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ bazą $\mathbb{R}^m$, zaś v wektorem w $\mathbb{R}^n$. Przez $v^{\mathcal{A}}$ oznaczamy macierz jednokolumnową, zawierającą współrzędne v w bazie $\mathcal{A}$, na przykład

$$(1,2,3)^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{dla } \mathcal{A} = (e_2, e_1, e_3).$$

(Dygresja: Jeśli $\mathcal{A}$ jest bazą standardową, otrzymujemy często używane utożsamienie wektorów z macierzami o jednej kolumnie: np. $(1,2,3) \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$*)*

a) Udowodnij, że przekształcenie przyporządkowujące wektorowi v jego zestaw współrzędnych $v^{\mathcal{A}}$, jest izomorfizmem (w szczególności, że jest liniowe).
b) Udowodnij, że zachodzi wzór

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \circ v^{\mathcal{A}} = \big(\varphi(v)\big)^{\mathcal{B}}$$

(Możesz korzystać z twierdzenia o macierzy złożenia przekształceń)

Zadanie na gwiazdkę. Na przedświątecznych „konsultacjach" pojawiły się m.in. pierniczki oraz Ptasie Mleczko. Każda osoba wykonała trzy ruchy, polegające na zjedzeniu pierniczka, zjedzeniu Ptasiego Mleczka lub niejedzeniu niczego. Przy tym okazało się, że (dla k równego 1 oraz 2):
- spośród osób, które w k-tym ruchu jadły pierniczka, połowa w następnym ruchu zjadła Ptasie Mleczko, a połowa nic,
- spośród osób, które w k-tym ruchu jadły Ptasie Mleczko, połowa w następnym ruchu zjadła pierniczka, a połowa nic,
- spośród osób, które w k-tym ruchu nic nie jadły, połowa w następnym ruchu zjadła pierniczka, a połowa Ptasie Mleczko.

Łącznie zjedzono 18 pierniczków i 9 kawałków Ptasiego Mleczka. Ile było osób?
(Wskazówka: liczba osób jest zawsze nieujemna i całkowita :))