Teoria złożoności obliczeniowej

Problemy obliczeniowe

Obliczeniowy problem decyzyjny.

Może być przedstawiony jako język $L \subseteq \Sigma^*$. Na przykład:

- Liczby pierwsze

  $$\{w \in \{0,1\}^* : w \text{ jest binarnym przedstawieniem liczby pierwszej}\}$$

- Grafy ze ścieżką Hamiltona

  $$\{w \in \{0,1\}^* : \begin{array}{l} |w| = n^2 \text{ dla pewnego } n \text{ i istnieje} \\ \text{permutacja } \rho : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\} \\ w_{n\cdot(\rho(i)-1)+\rho(i+1)} = 1 \text{ dla } i = 1,\ldots,n-1 \end{array}\}$$

Obliczeniowy problem funkcyjny.

Może być przedstawiony jako funkcja $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$. Na przykład:

- Faktoryzacja $n \longmapsto (p_1, \alpha_1, \ldots, p_k, \alpha_k)$,
  gdzie $p_1 < \ldots < p_k$ są pierwsze i $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$.

Rozważa się też problemy zadane ogólniej $f : \Sigma^* \to \mathcal{P}_{\mathit{fin}}(\Gamma^*)$, np.:

- graf $\longmapsto$ dowolna ścieżka Hamiltona (lub $\perp$ jeśli brak).

Klasy złożoności czasowej

Czasowa (deterministyczna) złożoność wielomianowa: *P*

Problem $L \subseteq \Sigma^*$ jest w klasie P jeśli istnieje maszyna Turinga M i stała k taka, że $L = L(M)$ i dla każdego w maszyna M wykonuje $\leq |w|^k$ kroków.

Czasowa niedeterministyczna złożoność wielomianowa: *NP*

Problem $L \subseteq \Sigma^*$ jest w klasie NP jeśli istnieje język $R \subseteq \Sigma^* \$ \Sigma^*$ w klasie P i stała k, takie że

$$L = \{w : (\exists v \in \Sigma^*)\, w\$v \in R \wedge |v| \leq |w|^k\}$$

Równoważnie: $L = L(M)$ dla pewnej **niedeterministycznej** maszyny Turinga działającej w czasie wielomianowym.

Czasowa złożoność wykładnicza: *EXPTIME*

Problem $L \subseteq \Sigma^*$ jest w klasie $EXPTIME$ jeśli istnieje maszyna Turinga M i stała k taka, że $L = L(M)$ i dla każdego w maszyna M wykonuje $\leq 2^{|w|^k}$ kroków.

Klasy złożoności pamięciowej

Pamięciowa złożoność logarytmiczna: *L*

Problem $L \subseteq \Sigma^*$ jest w klasie L jeśli istnieje maszyna Turinga M taka, że $L = L(M)$ i dla każdego w maszyna M odwiedza $\leq \log(|w|)$ komórek pamięci.

Pamięciowa złożoność wielomianowa: *PSPACE*

Problem $L \subseteq \Sigma^*$ jest w klasie $PSPACE$ jeśli istnieje maszyna Turinga M i stała k taka, że $L = L(M)$ i dla każdego w maszyna M odwiedza $\leq |w|^k$ komórek pamięci.

Wiadomo:

$$L \subseteq P \subseteq NP \subseteq PSPACE \subseteq EXPTIME$$

$$L \subset PSPACE$$

$$P \subset EXPTIME$$

Hipoteza:

$$L \subset P \subset NP \subset PSPACE \subset EXPTIME$$

Złożoność czasowa funkcji

Klasa funkcji obliczalnych w czasie wielomianowym: *FP*

Funkcja $f : \Sigma^* \to \mathcal{P}_{\mathit{fin}}(\Gamma^*)$ jest w klasie *FP* jeśli istnieje stała k i maszyna Turinga M obliczająca pewne $v \in f(w)$ w nie więcej niż $|w|^k$ krokach (w szczególności $|v| \le |w|^k$).

Redukcje pomiędzy problemami

Problem $A \subseteq \Sigma^*$ *redukuje się* do problemu $B \subseteq \Gamma^*$ w czasie wielomianowym (w sensie Karpa) jeśli istnieje funkcja $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ w klasie *FP* (redukcja), taka, że, dla każdego $w \in \Sigma^*$,

$$w \in A \;\Leftrightarrow\; f(w) \in B$$

Problemy *NP*–zupełne

Problem L jest *NP*–zupełny jeśli:

1. $L \in NP$,
2. dowolny problem $M \in NP$ redukuje się do L w czasie wielomianowym.

Przykłady problemów $\boldsymbol{NP}$–zupełnych:

- SAT — problem spełnialności formuł Boole'owskich (twierdzenie Cooka).
- *3–CNF–SAT* — problem spełnialności formuł Boole'owskich w postaci koniunkcyjno–dyzjunkcyjnej, gdzie każda koniunkcja ma 3 literały.
- Problem spełnialności sieci logicznych.
- Grafy Hamiltonowskie.
- Pary $\langle G, k\rangle$, takie, że graf G można pokolorować k kolorami.
- Grafy kolorowalne 3 kolorami.
- Grafy planarne kolorowalne 3 kolorami.
- Problem plecakowy: układ liczb M, $a_1, \ldots, a_n$ (danych w postaci binarnej), takich, że istnieją $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \{0, 1\}$, takie że

$$M \; = \; \beta_1 \cdot a_1 + \ldots + \beta_n \cdot a_n$$