Obliczalność — podsumowanie

Każdej maszynie Turinga M o alfabecie wejściowym 0,1 i alfabecie pomocniczym 0,1, B, możemy przypisać słowo $\langle M\rangle \in \{0,1\}^*$ zwane *kodem* maszyny M. Na odwrót, każde słowo $w \in \{0,1\}^*$ jest kodem pewnej maszyny Turinga M_w.

Zbiór słów $L_u = \{wv : v \in L(M_w)\}$ nazywamy *językiem uniwersalnym,* gdyż zawiera on informację o wszystkich językach akceptowanych przez maszyny Turinga. Istnieje maszyna Turinga akceptująca ten właśnie język, tzw. *maszyna uniwersalna.* Jest więc on częściowo obliczalny.

Język uniwersalny nie jest jednak całkowicie obliczalny.

A zatem, z dokładnością do *tezy Turinga–Churcha* możemy stwierdzić :

> Nie istnieje algorytm, który dla danych: maszyny Turinga M i słowa w, odpowiada na pytanie, czy $w \in L(M)$.
>
> Jednak istnieje algorytm, który odpowiada na wspomniane wyżej pytanie, o ile odpowiedź jest twierdząca, a w przeciwnym przypadku nie daje odpowiedzi (obliczenie może być nieskończone).

Nierozstrzygalność algorytmiczna tego problemu pociąga za sobą nierozstrzygalność wielu innych.

Twierdzenie Rice'a

Gdy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{N})$ jest dowolną rodziną zbiorów, taką, że istnieją zbiory częściowo obliczalne $A \in \mathcal{A}$ (przykład) i $B \notin \mathcal{A}$ (kontrprzykład), to język

$$\{w \,:\, L(M_w) \in \mathcal{A}\}$$

nie jest obliczalny.

W szczególności, dla danej maszyny M nie jest rozstrzygalne, czy $L(M)$ jest

- niepusty,
- jednoelementowy,
- skończony,
- regularny,
- równy zbiorowi wszystkich słów,
- równy $L(M_0)$, dla ustalonej maszyny M_0

etc.

Nierozstrzygalność

Ogólnie, problem obliczeniowy nazwiemy algorytmicznie *nierozstrzygalnym*, jeśli, przedstawiony jako język, nie jest całkowicie obliczalny.

Oto przykłady problemów nierozstrzygalnych.

- Czy dane dwa programy w języku Pascal obliczają tę samą funkcję ?
- *Problem Posta.* Dane dwie listy słów : $u_1, \ldots, u_n \in \Sigma^*$ i $w_1, \ldots, w_n \in \Sigma^*$. Czy istnieje ciąg indeksów $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}$, taki, że $u_{i_1} \ldots u_{i_n} = w_{i_1} \ldots w_{i_n}$?
- Dla danych gramatyk bezkontekstowych G_1, G_2,
  - czy $L(G_1) = L(G_2)$?
  - czy $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$?
  - czy $L(G_1) = \Sigma^*$?
  - czy G jest gramatyką jednoznaczną ?
- *Dziesiąty problem Hilberta.* Czy dane równanie *diofantyczne* posiada rozwiązanie w liczbach całkowitych?

  (równanie diofantyczne : równość dwóch wyrażeń arytmetycznych o współczynnikach całkowitych)