Egzamin z Teorii informacji 8.02.2024. Część teoretyczna

Proszę czytelnie podpisać tę kartkę imieniem i nazwiskiem.

Nie trzeba pisać uzasadnień. Wyjątek stanowi punkt 5d gdzie można **opcjonalnie** dodać swój argument na odwrocie strony, co będzie punktowane jako *bonus*.

1. Niech w_n, dla $n \in \mathbb{N}$, będzie ciągiem słów bitowych, takich że $w_n \in \{0,1\}^n$ oraz $C_U(w_n) \geq n$, dla pewnej ustalonej maszyny uniwersalnej Turinga U; czyli każde w_n jest słowem losowym w sensie Kołmogorowa względem maszyny U.

   Które z poniższych własności mogą zachodzić dla nieskończenie wielu słów w_n ?

   (a) w_n należy do pewnego kodu Hamminga $(2^m - 1, 2^m - m - 1)$,
   (b) w_n należy do pewnego kodu Huffmanna (dla pewnej zmiennej losowej),
   (c) w_n zawiera podsłowo 1^k, takie że $k \geq \sqrt{n}$,
   (d) w_n jest binarnym zapisem (być może poprzedzonym zerami) liczby $\lfloor\sqrt{k}\rfloor \cdot \lceil\log_2 m\rceil$, dla pewnych liczb $k, m \geq 5$.

2. Rozważamy zmienne losowe A, B, C o wspólnym rozkładzie. Przypuśćmy, że $I(A;B|C) = I(A;B)$ i $I(A;C|B) = I(A;C)$. Które z poniższych możliwości są niesprzeczne z tymi założeniami (tzn. mogą zajść)? Pytamy o każdą własność z osobna, nie o wszystkie naraz.

   (a) $I(B;C|A) \neq I(B;C)$,
   (b) $I(B;C|A) < I(B;C)$,
   (c) $I(B;C) = 0$,
   (d) $I(A;B|C) \neq I(A;C|B)$.

3. Przypuśćmy, że dla kanału Γ o macierzy $\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$, istnieje ciąg kodów $C_n \subseteq \{0,1\}^n$, taki że $|C_n| \to \infty$, $R(C_n) \to C_\Gamma$ i $\Pr_E(\Delta_o, A_n) \to 0$ (dla $n \to \infty$), gdzie A jest zmienną losową o wartościach w C i rozkładzie jednostajnym, a Δ_o jest (uwaga!) regułą **idealnego obserwatora**. Wtedy **na pewno** możemy stwierdzić, że

   (a) $p = 0$ lub $p = 1$,
   (b) $p \neq \frac{1}{2}$,
   (c) $p > \frac{1}{2}$,
   (d) taki ciąg nie istnieje.

4. Macierz kanału Γ ma wymiar 8×8, ale tylko 8 wyrazów jest różna od zera. Wtedy przepustowość C_Γ

   (a) może być dowolną liczbą rzeczywistą w przedziale $[0, 3]$,
   (b) $0 < C_\Gamma < 3$,
   (c) może przyjąć jedną ze skończonego zbioru wartości,
   (d) $C_\Gamma = 3$.

5. Troje przyjaciół A, B, C postanowiło zjeść łącznie **20** pączków, ale w ich ucztę wkradła się losowość. Zmienne losowe A, B, C przyjmują wartości w zbiorze $\{0, 1, \ldots, 20\}$ i oznaczają, ile pączków zje dana osoba; zakładamy, że **wszystkie pączki zostaną zjedzone**. Wtedy na pewno możemy stwierdzić, że

   (a) $H(A, B, C) \leq \log 231$,
   (b) $H(A, B, C) = H(A + B, B + C, C + A)$,
   (c) $H(A|B + C) \leq I(A; B|C)$,
   (d) któraś para zmiennych jest zależna (tzn. $I(A;B)+I(B;C)+I(A;C) > 0$) lub $H(A) = H(B) = H(C) = 0$.